BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

*

PHAN TRỌNG TIẾN

NGHIỆM β-NHỚT CỦA PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON-JACOBI VÀ ỨNG DỤNG TRONG BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2020

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

*

PHAN TRỌNG TIẾN

NGHIỆM β-NHỚT CỦA PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON-JACOBI VÀ ỨNG DỤNG TRONG BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 9 46 01 02

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. Trần Văn Bằng

PGS.TS. Hà Tiến Ngoạn

Hà Nội - 2020

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Trần Văn Bằng và PGS.TS. Hà Tiến Ngoạn. Các kết quả trình bày trong luận án là mới và chưa từng được công bố trong bất kì luận văn, luận án nào khác.

Nghiên cứu sinh

Phan Trọng Tiến

LỜI CẢM ƠN

Luận án được thực hiện tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, dưới sự hướng dẫn khoa học của thầy giáo TS. Trần Văn Bằng và PGS.TS. Hà Tiến Ngoạn. Sự định hướng của quý Thầy trong nghiên cứu, sự nghiêm khắc của Thầy trong học tập và sự hướng dẫn tận tình của quý Thầy trong làm việc là những yếu tố cơ bản nhất tác động nên việc hoàn thành luận án. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến với các Thầy.

Tác giả xin chân thành cảm ơn GS.TSKH. Đinh Nho Hào (Viện Toán học), PGS.TS. Khuất Văn Ninh, PGS.TS. Nguyễn Năng Tâm, TS. Nguyễn Văn Tuyên (Trường ĐHSP Hà Nội 2), TS. Trần Quân Kỳ (Trường ĐHSP Huế), GS.TS. Cung Thế Anh, PGS.TS. Trần Đình Kế (Trường ĐHSP Hà Nội), PGS.TS. Đỗ Đức Thuận (Trường ĐH Bách Khoa Hà Nội) đã động viên và cho tác giả những góp ý, kinh nghiệm trong nghiên cứu khoa học giúp tác giả hoàn thành luận án này.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới các thầy, các cô trong khoa Toán, trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, đã tạo điều kiện thuận lợi và giúp đỡ tác giả trong thời gian học tập và nghiên cứu. Đặc biệt, tác giả xin chân thành cảm ơn các anh chị nghiên cứu sinh và các thành viên trong Xêmina Giải tích, khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, về những trao đổi, chia sẻ trong khoa học và trong cuộc sống.

Tác giả gửi lời cảm ơn đến Khoa Toán, Phòng Đào tạo - Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, nơi tác giả đã học tập và nghiên cứu trong thời gian làm nghiên cứu sinh; Trường Đại học Quảng Bình và khoa Khoa học Tự nhiên - Trường Đại học Quảng Bình, nơi tác giả công tác, giảng dạy và cũng là nơi cử tác giả đi làm nghiên cứu sinh.

Tác giả gửi lời cảm ơn đến tất cả các nhà khoa học, thầy cô, người thân, bạn bè vì những góp ý, ủng hộ và động viên về tinh thần cũng như vật chất dành cho tác giả.

Mục lục

Lời cam đoan **1**

Lời cảm ơn **2**

Mục lục **3**

MỞ ĐẦU **6**

Chương 1. DƯỚI VI PHÂN $\boldsymbol{\beta}$-NHỚT **15**

1.1. Tính β-khả vi 15

1.2. Dưới vi phân β-nhớt 22

Chương 2. NGHIỆM $\boldsymbol{\beta}$-NHỚT CỦA PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON-JACOBI TRONG KHÔNG GIAN BANACH **36**

2.1. Tính duy nhất của nghiệm β-nhớt 36

2.1.1. Nghiệm β-nhớt 37

2.1.2. Nghiệm bị chặn 40

2.1.3. Nghiệm không bị chặn 46

2.2. Tính ổn định và sự tồn tại của nghiệm β-nhớt 59

2.2.1. Tính ổn định 59

2.2.2. Sự tồn tại 60

Chương 3. ỨNG DỤNG CỦA NGHIỆM $\boldsymbol{\beta}$-NHỚT ĐỐI VỚI BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU **67**

3.1. Bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn 67

3.1.1. Bài toán điều khiển tối ưu-nguyên lý quy hoạch động Bellman với hàm giá trị trơn 67

3.1.2. Tính chất của hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu 70

3.2. Ứng dụng của nghiệm β-nhớt đối với bài toán điều khiển tối ưu 72

Chương 4. PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON-JACOBI VỚI BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU TRÊN KHỚP NỐI VỚI HÀM CHI PHÍ KHÔNG BỊ CHẶN **83**

4.1. Bài toán điều khiển tối ưu trên các khớp nối 83

4.1.1. Khớp nối 83

4.1.2. Bài toán điều khiển tối ưu 84

4.1.3. Một số tính chất của hàm giá trị tại đỉnh 88

4.2. Phương trình Hamilton-Jacobi và nghiệm nhớt 92

4.2.1. Hàm thử 92

4.2.2. Trường véctơ 93

4.2.3. Định nghĩa nghiệm nhớt 93

4.2.4. Hàm Hamilton 94

4.3. Nguyên lý so sánh và tính duy nhất 98

4.4. Ứng dụng của nghiệm nhớt trong bài toán điều khiển tối ưu . . 103

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN **109**

KÍ HIỆU

$\mathbb{R}^N$	Không gian Euclide N chiều;
e_i	Véctơ đơn vị thứ i trong $\mathbb{R}^N$;
Ω	Tập mở trong không gian Banach X với biên $\partial\Omega$;
$C(\Omega)$	Không gian các hàm liên tục trên Ω;
$C^1(\Omega)$	Không gian các hàm khả vi liên tục trên tập Ω;
$D_F^+u(x)$	Trên vi phân Fréchet của hàm u tại x;
$D_F^-u(x)$	Dưới vi phân Fréchet của hàm u tại x;
β	Borno β trên X;
$D_\beta^+u(x)$	Trên vi phân β-nhớt của hàm u tại x;
$D_\beta^-u(x)$	Dưới vi phân β-nhớt của hàm u tại x;
$\overline{B}(x,r)$	Hình cầu đóng tâm x bán kính r;
$B(x,r)$	Hình cầu mở tâm x bán kính r;
$\nabla_\beta f$	β-đạo hàm của hàm f;
τ_β	Tôpô trên X^* tương ứng với sự hội tụ đều trên β;
X_β^*	Không gian véctơ tôpô (X^*, τ_β);
$\mathcal{D}_\beta(X)$	Tập các hàm bị chặn, Lipschitz, β-khả vi trên X;
$\mathcal{D}_\beta^*(X)$	Tập các hàm $g \in \mathcal{D}_\beta(X)$; $\nabla_\beta g : X \to X_\beta^*$ liên tục;
H_β	Tồn tại một hàm bướu $b \in \mathcal{D}_\beta(X)$;
H_β^*	Tồn tại một hàm bướu $b \in \mathcal{D}_\beta^*(X)$;
$\mathrm{diam}(S)$	Đường kính của tập S : $\sup\{\lVert x-y \rVert : x, y \in S\}$;
t.ư.	Tương ứng;
h.k.n.	Hầu khắp nơi;
$a \vee b$	$\max\{a, b\}$;
$L(x,y)$	Đoạn thẳng nối hai điểm x, y;
L^p	Không gian các hàm f đo được và $\lvert f \rvert^p$ khả tích;
l^p	Không gian các dãy số thực $(x_n)_n$ với $\sum_{n=1}^\infty \lvert x_n \rvert^p$ hội tụ.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Phương trình Hamilton-Jacobi cấp một là một lớp phương trình đạo hàm riêng phi tuyến có nhiều ứng dụng, nó xuất hiện trong nhiều lĩnh vực như cơ học, điều khiển tối ưu,... đặc biệt nó bao gồm lớp phương trình quy hoạch động của bài toán điều khiển tối ưu tất định, thường được gọi là phương trình Hamilton-Jacobi-Bellman. Nói chung, lớp phương trình Hamilton-Jacobi phi tuyến thường không có nghiệm cổ điển. Do đó các loại nghiệm yếu được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu và nghiệm nhớt là một trong số đó.

Lý thuyết nghiệm nhớt của phương trình đạo hàm riêng đã xuất hiện từ đầu những năm 80 của thế kỷ trước trong bài báo [23] của M. G. Crandall và P. L. Lions, nó đã được đông đảo các chuyên gia toán học thừa nhận và tiếp tục phát triển, ngoài nước có M. G. Crandall, P. L. Lions, J. M. Borwein, D. Preiss, L.C. Evans, trong [18, 20, 22, 25, 26, 30] và trong nước có T. D. Vân, N. Hoàng, T. V. Bằng,... trong [7, 8, 32]. Sở dĩ được đặt tên "nghiệm nhớt" là vì đối với lớp phương trình được xét ban đầu thì nghiệm này trùng với nghiệm tìm được bằng phương pháp triệt tiêu độ nhớt. Nghiệm nhớt là một khái niệm nghiệm suy rộng phù hợp cho nhiều lớp phương trình đạo hàm riêng phi tuyến. Nghiệm nhớt nói chung chỉ là một hàm liên tục, thỏa mãn cặp bất đẳng thức vi phân thông qua các hàm thử đủ trơn hoặc qua khái niệm dưới vi phân, trên vi phân.

Trong [23], khái niệm nghiệm nhớt được định nghĩa bằng cách sử dụng dưới vi phân Fréchet, sau này các nhà toán học đã mở rộng bằng cách thay thế dưới vi phân Fréchet bằng các loại dưới vi phân khác như dưới vi phân Hadamard, Hadamard yếu, Gâteaux và tổng quát hóa là β-dưới vi phân (xem [18]), với β là một borno (xem mục 1.2.).

Đối với phương trình Hamilton-Jacobi, có hai bài toán thường được nghiên cứu, đó là bài toán Dirichlet

$$u + H(x, u, Du) = 0 \text{ trong } \Omega, u = \varphi \text{ trên } \partial\Omega$$

và bài toán Cauchy

$$\begin{aligned} u_t + H(x, u, Du) = 0 \text{ trong } \Omega \times [0, T], \\ u = \varphi \text{ trên } \partial\Omega \times [0, T], \quad u(x, 0) = u_0 \text{ trong } \Omega. \end{aligned}$$

Trong luận văn này chúng tôi tập trung nghiên cứu bài toán Dirichlet. Thực tế cho thấy, khi nghiên cứu tính đặt chỉnh của bài toán Dirichlet ở trong lý thuyết nghiệm nhớt, vấn đề duy nhất nghiệm là phức tạp nhất, sự tồn tại nói chung được giải quyết nhờ phương pháp Perron ([34]) và sự phụ thuộc liên tục vào các dữ kiện là hệ quả không quá khó của tính duy nhất nghiệm. Phương pháp để chứng minh tính duy nhất nghiệm là phương pháp gấp đôi số biến. Theo phương pháp này, điểm quan trọng là tìm ra hàm phạt thích hợp để đạt được mục đích đặt ra cùng với nó là các nguyên lý biến phân tương ứng với các lớp hàm liên quan tới bài toán đang xét.

Từ năm 1993, nguyên lý biến phân trơn được chứng minh bởi Deville trong [26] đã được sử dụng như một công cụ quan trọng để chứng minh tính duy nhất của nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi có dạng $u+F(Du) = f$, với các giả thiết hàm Hamilton F liên tục đều trên X^*_β và vế phải f liên tục đều và bị chặn trên X trong lớp nghiệm là lớp các hàm liên tục và bị chặn. Cũng sử dụng nguyên lý này Borwein trong [19] đã chứng minh được tính duy nhất nghiệm β-nhớt trong lớp hàm liên tục đều và bị chặn đối với phương trình $u + H(x, Du) = 0$. Tuy nhiên, không cần thiết phải áp dụng nguyên lý này cho phương trình có dạng tổng quát $u + H(x, u, Du) = 0$ trên tập $\Omega \subset X$, trong [20], Crandall và Lions đã thiết lập tính duy nhất của nghiệm Fréchet-nhớt cho phương trình Hamilton-Jacobi có dạng tổng quát ở trên bằng cách sử dụng tính chất Radon-Nikodym như một giả thiết chính. Tính chất Radon-Nikodym được hiểu rằng nếu hàm φ nhận giá trị thực trên một hình cầu đóng B trong X là một hàm bị chặn, nửa liên tục dưới và $\varepsilon > 0$, thì tồn tại một phần tử $x^* \in X^*$ có chuẩn không vượt quá ε sao cho $\varphi + x^*$ đạt cực tiểu trên B.

Bài toán điều khiển tối ưu được giới thiệu vào những năm 1950 (xem [14]) và đã được J. Zabczyk trình bày tương đối hoàn thiện trong không gian hữu hạn chiều và trong không gian Hilbert (xem [42]), bài toán này có rất nhiều ứng dụng trong Toán học, Vật lý và trong các lĩnh vực khác. Theo nguyên lý quy hoạch động, hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu nếu khả vi thì là nghiệm của một phương trình Hamilton-Jacobi-Bellman tương ứng, xem [19, 30]. Tuy nhiên, hàm giá trị thường không khả vi, do đó một số phương pháp khác đã được giới thiệu để nghiên cứu về hàm giá trị này. Nghiệm nhớt một lần nữa là một công cụ hiệu quả để nghiên cứu lý thuyết điều khiển tối ưu. Trong [10], các tác giả đã đưa ra các điều kiện cần, đủ cho bài toán điều khiển tối ưu trong không gian hữu hạn chiều bằng cách sử dụng dưới vi phân Fréchet mà công cụ tiếp cận là sử dụng nghiệm nhớt. Tiếp cận bài toán điều khiển tối ưu thông qua nghiệm nhớt bằng các dưới vi phân khác thì chưa nhiều, đặc biệt là khi hàm giá trị không bị chặn.

Về áp dụng của nghiệm nhớt có thể kể đến Y. Achdou, S. Oudet. [4], Khang [35] đã nghiên cứu nghiệm nhớt trên khớp nối, trên mạng lưới và thu được các kết quả đáng chú ý và áp dụng vào bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn. Y. Giga, T. Namba. [29] đã áp dụng thành công lý thuyết nghiệm nhớt cho phương trình Hamilton-Jacobi với đạo hàm phân thứ theo nghĩa của Caputo. Áp dụng nghiệm nhớt cũng là một cách hiệu quả đối với bài toán điều khiển tối ưu ngẫu nhiên (xem [5]).

Gần đây phương trình Hamilton-Jacobi trên các khớp nối và trên các mạng lưới được nghiên cứu nhiều trong các công trình [2, 3, 4, 11, 12, 35, 37]. Trong các công trình đó, các tác giả tập trung giải quyết về tính chất của hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu, nguyên lý so sánh nghiệm nhớt của bài toán điều khiển tối ưu trong trường hợp hàm chi phí ℓ bị chặn. Mặc dù đã đạt được một số kết quả quan trọng song dường như những giả thiết đưa ra trong các công trình đó là tương đối chặt.

Với những phân tích trên, chúng tôi đặt vấn đề nghiên cứu về β-dưới vi phân, tính duy nhất nghiệm β-nhớt của bài toán Dirichlet đối với phương trình Hamilton-Jacobi có dạng $u + H(x, Du) = 0$ và $u + H(x, u, Du) = 0$, tính ổn định và sự tồn tại nghiệm β-nhớt cũng được chúng tôi quan tâm. Ngoài ra nghiệm β-nhớt còn có nhiều ứng dụng đối với bài toán điều khiển tối ưu, trên cơ sở đó chúng tôi cũng quan tâm đến tìm điều kiện cần và điều kiện đủ cho bài toán điều khiển tối ưu trong không gian vô hạn chiều. Hướng tiếp cận mới về nghiệm nhớt trên các khớp nối cũng được chúng tôi nghiên cứu. Dựa trên mô hình đã có về nghiệm nhớt theo phương pháp cổ điển, vấn đề tính duy nhất nghiệm nhớt, ứng dụng của nghiệm nhớt cho bài toán điều khiển tối ưu trên các khớp nối hứa hẹn cho ta những kết quả có ý nghĩa.

Trên đây là những lý do để chúng tôi lựa chọn đề tài nghiên cứu cho luận án của mình là: "**Nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi và ứng dụng trong bài toán điều khiển tối ưu**".

2. Đối tượng và nội dung nghiên cứu

2.1. β-dưới vi phân

Khi sử dụng β-dưới vi phân, điều đầu tiên mà ta quan tâm đó là những tính chất của β-dưới vi phân có còn được giữ lại giống như dưới vi phân Fréchet hay không. Trong các tài liệu giới thiệu về β-dưới vi phân [19, 26] chưa có sự khảo sát về vấn đề này, những tính chất này được chúng tôi trình bày trong chương 1. Để nghiên cứu tính duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi thì công cụ được sử dụng là nguyên lý biến phân trơn. Trong [26], Deville và Godefroy đã chứng minh được nguyên lý biến phân trơn trên không gian Banach X thỏa mãn giả thiết (H_β^*) và u, v là hai hàm bị chặn xác định trên X sao cho u là nửa liên tục trên và v là nửa liên tục dưới. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x, y \in X$, $p \in D_\beta^+ u(x), q \in D_\beta^- v(y)$ sao cho:

(a) $\|x - y\| < \varepsilon$ và $\|p - q\| < \varepsilon$;

(b) Với mọi $z \in X$, $v(z) - u(z) \geq v(x) - u(y) - \varepsilon$.

Trong việc chứng minh tính duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi ta cần mở rộng kết quả trên, nghĩa là cần có sự đánh giá về độ lớn của $\|x-y\|\sqrt{\|p\|}$, $\|x-y\|\sqrt{\|q\|}$. Kết quả của chúng tôi đưa ra trong chương 1 thể hiện sự quan tâm này. Cho đến nay kết quả mới nhất về dưới vi phân β-nhớt được thể hiện trong [19, Định lý 2.9], kết quả đó là: Cho X là một không gian Banach có chuẩn tương đương với chuẩn β-trơn và $f_1, \cdots, f_N$ là N hàm nửa liên tục dưới trên X. Giả sử rằng $(f_1, \cdots, f_N)$ là nửa liên tục dưới địa phương đều và $\sum_{n=1}^{N} f_n$ đạt cực tiểu tại x. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_n \in x + \varepsilon B$ và $x_n^* \in D_\beta^- f_n(x_n), n = 1, \cdots, N$, sao cho $|f_n(x_n) - f_n(x)| < \varepsilon$, $\|x_n^*\| \operatorname{diam}(\{x_1, \cdots, x_N\}) < \varepsilon, n = 1, \cdots, N$ và $\| \sum_{n=1}^{N} x_n^* \| < \varepsilon$. Trong kết quả này, tính chất $(f_1, \cdots, f_N)$ là nửa liên tục dưới địa phương đều là tương đối mạnh, điều này dẫn đến tính duy nhất cho lớp nghiệm của phương trình Hamilton-Jacobi bị thu hẹp. Vấn đề được chúng tôi tiếp tục đặt ra là làm giảm giả thiết về hàm f_n ở trên.

2.2. Nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi trong không gian Banach

Chúng ta biết rằng có rất nhiều loại dưới đạo hàm (trên đạo hàm) chúng được chỉ ra trong các tài liệu tham khảo. Trong số đó, dưới đạo hàm theo nghĩa Fréchet, Hadamard, Gâteaux và Mordukhovich được sử dụng rộng rãi nhất [15, 25, 27, 38, 39, 30]. Rõ ràng, với một lớp phương trình Hamilton-Jacobi, việc sử dụng các dưới đạo hàm khác nhau dẫn đến các loại nghiệm nhớt khác nhau. Trong những nghiên cứu đầu tiên [9, 23, 20, 21, 30], nghiệm nhớt được đặc trưng bởi nửa đạo hàm Fréchet. Mặt khác, trong nhiều công trình hiện có, để nghiên cứu tính chất định tính của nghiệm nhớt ta cần đến tính trơn của chuẩn. Tuy nhiên điều này không đúng cho hầu hết các không gian Banach như là L^1. Để khắc phục vấn đề này, các tác giả trong [19, 25] đã đề xuất khái niệm Borno β, đạo hàm β-nhớt, β-nghiệm nhớt và đạt được tính duy nhất nghiệm cho phương trình Hamilton-Jacobi có dạng $u + H(x, Du) = 0$.

Chúng tôi quan tâm đến kết quả tính duy nhất nghiệm của phương trình Hamilton-Jacobi trong [19], với mong muốn mở rộng kết quả tính duy nhất của [19] cho một lớp phương trình rộng hơn $u + H(x, u, Du) = 0$ và cũng thiết lập sự tồn tại và tính ổn định của nghiệm β-nhớt dưới các giả thiết nhất định.

2.3. Ứng dụng của nghiệm nhớt đối với bài toán điều khiển tối ưu

Theo nguyên lý quy hoạch động trong [19] thì hàm giá trị $V(x)$ của bài toán điều khiển tối ưu được xác định: với mọi $x \in X$ và $t > 0$,

$$V(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{U}} \left\{ \int_0^t e^{-\lambda s} f(y_x(s, \alpha), \alpha(s)) ds + e^{-\lambda t} V(y_x(t, \alpha)) \right\}.$$

Chúng tôi sử dụng nguyên lý quy hoạch động trong [19] để chứng minh hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu, có thể là hàm không bị chặn, là nghiệm β-nhớt duy nhất của một phương trình Hamilton-Jacobi. Hơn nữa chúng tôi còn thiết lập được điều kiện cần, điều kiện đủ cho bài toán điều khiển tối ưu trên không gian vô hạn chiều bằng cách sử dụng nghiệm β-nhớt.

Trong [20], các tác giả đã trình bày nghiệm Fréchet-nhớt trong không gian Banach và thiết lập được tính duy nhất nghiệm Fréchet-nhớt cho phương trình Hamilton-Jacobi. Một trong những giả thiết được đưa ra để chứng minh tính duy nhất nghiệm là giả thiết Radon-Nikodym. Trong [19], tính duy nhất của nghiệm β-nhớt trong không gian Banach đã được chỉ ra trong lớp hàm liên tục đều và bị chặn. Nội dung nghiên cứu của chúng tôi tiếp theo đó là chứng minh tính duy nhất nghiệm β-nhớt mà không cần sử dụng giả thiết Radon-Nikodym đồng thời lớp hàm nghiệm cũng được nới rộng. Cụ thể hơn, hàm giá trị được trình bày trong [19] là một hàm bị chặn và chúng tôi tập trung nghiên cứu để đạt được những kết quả mới hơn. Một vấn đề được chúng tôi quan tâm nữa đó là tìm điều kiện cần và điều kiện đủ cho bài toán điều khiển tối ưu trong không gian vô hạn chiều với công cụ sử dụng là nghiệm β-nhớt.

2.4. Phương trình Hamilton-Jacobi với bài toán điều khiển tối ưu trên khớp nối với hàm chi phí không bị chặn

Trong [13] và [24] các tác giả đã nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn trên không gian hữu hạn chiều với một giả thiết tốc độ tăng trưởng của hàm chi phí ℓ_i không vượt quá hàm đa thức, chúng tôi nghiên cứu trong trường hợp hàm chi phí ℓ_i có độ tăng trưởng không vượt quá hàm mũ hoặc hàm đa thức bằng cách mở rộng giả thiết trong [4] và [35] sau đó nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu trên các khớp nối bằng cách sử dụng nghiệm nhớt. Cụ thể, chúng tôi đã thay thế giả thiết (H1) trong [4] và [35] về hàm chi phí đó là:

Với $i = 1, \cdots, N$, hàm $\ell_i : J_i \times A_i \to \mathbb{R}$ là liên tục và bị chặn. Tồn tại một môđun liên tục ω_i sao cho với mọi x, y thuộc J_i và với mọi $a \in A_i$,

$$|\ell_i(x,a) - \ell_i(y,a)| \le \omega_i(|x-y|),$$

bởi các giả thiết (H2) hoặc (H2)* (xem trong mục 4.1.2.) được cho bởi.

(H2) **(Hàm chi phí)** Với $i = 1, \cdots, N$, hàm $\ell_i : J_i \times A_i \to \mathbb{R}$ là liên tục và tồn tại hằng số $C, m > 0$, với $0 \le m < \frac{\lambda}{M}$ và một môđun liên tục địa phương $\omega(\cdot, \cdot)$ sao cho

$$|\ell_i(x,a) - \ell_i(y,a)| \le \omega(|x-y|, |x| \vee |y|) \text{ với mọi } x, y \in J_i, a \in A_i,$$

$$|\ell_i(x,a)| \le Ce^{m|x|} \text{ với mọi } x \in J_i, a \in A_i,$$

(H2)* **(Hàm chi phí)** Với $i = 1, \cdots, N$, hàm $\ell_i : J_i \times A_i \to \mathbb{R}$ là liên tục và tồn tại hằng số $C, m \ge 0$ và một hàm môđun địa phương liên tục $\omega(\cdot, \cdot)$ sao cho

$$|\ell_i(x,a) - \ell_i(y,a)| \le \omega(|x-y|, |x| \vee |y|) \text{ với mọi } x, y \in J_i, a \in A_i,$$

$$|\ell_i(x,a)| \le C(1+|x|)^m \text{ với mọi } x \in J_i, a \in A_i.$$

Có thể thấy rằng giả thiết (H1) trong [4] và [35] là trường hợp đặc biệt của các giả thiết (H2) và (H2)* khi ta lấy $m = 0$ và hàm môđun địa phương $\omega(\sigma, r) \equiv \omega(\sigma)$ trong giả thiết (H2) và (H2)*. Theo hiểu biết của chúng tôi, những kết quả với các giả thiết (H2) và (H2)* vẫn còn những hạn chế. Chúng tôi cũng tập trung nghiên cứu về lĩnh vực này.

3. Phương pháp nghiên cứu

Luận án sử dụng các phương pháp của giải tích không trơn và phương trình đạo hàm riêng phi tuyến cấp 1: các công cụ của dưới vi phân, nghiệm nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi; lý thuyết điều khiển tối ưu. Ngoài ra, khi nghiên cứu các nội dung cụ thể, chúng tôi sử dụng một số kĩ thuật tương ứng. Cụ thể đó là kỹ thuật gấp đôi số biến, đánh giá bất đẳng thức.

4. Kết quả đạt được của luận án

Luận án đã đạt được các kết quả sau đây:

1) Đưa ra được một số tính chất của β-dưới vi phân, đưa ra được một số kết quả về nguyên lý biến phân trơn cho hàm nửa liên tục dưới và bị chặn ở trên không gian Banach X thỏa mãn giả thiết (H_β^*) và trên không gian có chuẩn β-trơn.

2) Chứng minh tính duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi trong lớp hàm liên tục và bị chặn, tính duy nhất nghiệm trong lớp hàm liên tục đều và không bị chặn đối với phương trình đạo hàm riêng cấp 1 dạng tổng quát $u + H(x, u, Du) = 0$. Chứng minh được tính ổn định và sự tồn tại nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi dạng tổng quát $u + H(x, u, Du) = 0$.

3) Chứng minh hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu là nghiệm β-nhớt duy nhất của phương trình Hamilton-Jacobi tương ứng, ngoài ra trong luận án còn đưa được điều kiện cần, điều kiện đủ đối với một điều khiển tối ưu.

4) Chứng minh hàm giá trị là liên tục trên khớp nối $\mathcal{G}$ với khớp O và là các hàm liên tục Lipschitz trên mỗi $J_i \cap B(O, \varepsilon), i = 1, \cdots, N$. Đánh giá được hàm giá trị có độ tăng không quá hàm mũ (với giả thiết (H2)) hoặc hàm đa thức (với giả thiết (H2)*); đánh giá được hàm giá trị tại điểm O. Chứng minh điều kiện cần và điều kiện đủ cho một điều khiển tối ưu (xem Định lý 4.3); chỉ ra được một điều khiển phản hồi tối ưu và chứng minh được một điều kiện cần, điều kiện đủ cho một điều khiển tối ưu; xem Định lý 4.4 và Định lý 4.5.

Các kết quả trên đây của luận án được công bố trong những bài báo trên các tạp chí quốc tế và trong nước có uy tín và đã được báo cáo tại:

- Xêmina *Giải tích*, Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2;
- Xêmina *Phương trình vi phân*, Viện Toán học;
- Hội nghị khoa học: *Nâng cao chất lượng, hiệu quả nghiên cứu và ứng dụng khoa học công nghệ, đáp ứng yêu cầu đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và đào tạo*, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 (Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, 18-19/4/2015);
- Đại hội Toán học Việt Nam năm 2018, Nha Trang, ngày 14-18/8/2018.

5. Cấu trúc của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình công bố và tài liệu tham khảo, luận án gồm 4 chương.

- Chương 1. *β-dưới vi phân.* Trong chương này, chúng tôi trình bày khái niệm dưới vi phân β-nhớt và các tính chất của nó, một số kết quả về nguyên lý biến phân trơn.

- Chương 2. *Nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi trong không gian Banach.* Trong chương này, chúng tôi chứng minh kết quả về tính duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi dạng tổng quát $u + H(x, u, Du) = 0$ trong không gian Banach. Tính ổn định và sự tồn tại nghiệm của phương trình này cũng được chúng tôi chỉ ra.

- Chương 3. *Ứng dụng của nghiệm nhớt đối với bài toán điều khiển tối ưu.* Trong chương này, chúng tôi chứng minh hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu là nghiệm β-nhớt duy nhất của phương trình Hamilton-Jacobi tương ứng. Các phản hồi và điều kiện đủ cho điều khiển tối ưu cũng được đưa ra trong chương này.

- Chương 4. *Phương trình Hamilton-Jacobi với bài toán điều khiển tối ưu trên khớp nối với hàm chi phí không bị chặn.* Những nội dung được đưa ra trong chương này là: Nêu các khái niệm về khớp nối, một số giả thiết và thiết lập bài toán điều khiển tối ưu. Một số tính chất của hàm giá trị như tính liên tục trên $\mathcal{G}$, tính Lipschitz địa phương tại O trên mỗi J_i, đánh giá hàm giá trị tại O thông qua Hamilton; Nghiệm nhớt trên các khớp nối và chứng minh hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu là một nghiệm nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi tương ứng; Một số kết quả của nguyên lý so sánh nghiệm và chứng minh hàm giá trị là nghiệm nhớt duy nhất của phương trình Hamilton-Jacobi; Những áp dụng cho kết quả của chúng tôi trong bài toán điều khiển tối ưu.

Chương 1

DƯỚI VI PHÂN β-NHỚT

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu về dưới vi phân β-nhớt trên không gian Banach X và chứng minh được nguyên lý biến phân trơn, nhằm áp dụng để chứng minh tính duy nhất của nghiệm β-nhớt. Các kết quả trong chương được viết dựa trên bài báo [1] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

1.1. Tính β-khả vi

Định nghĩa 1.1 (Borno, [19, tr. 1569])**.** Cho X là một không gian Banach, một *borno* β trên X là một họ các tập con đóng, bị chặn và đối xứng tâm của X thỏa mãn ba điều kiện sau:

1) $X = \bigcup_{B \in \beta} B$;

2) họ β đóng kín đối với phép nhân với một vô hướng;

3) hợp của hai phần tử bất kỳ trong β đều chứa trong một phần tử của β.

Dưới đây là một số borno đặc biệt:

1) Họ F (Fréchet) tất cả các tập con đóng, bị chặn, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là *borno Fréchet;*

2) Họ H (Hadamard) tất cả các tập con compact, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là *borno Hadamard;*

3) Họ WH (Weak Hadamard) tất cả các tập con compact yếu, đóng, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là *borno Hadamard yếu;*

4) Họ G (Gâteaux) tất cả các tập con hữu hạn, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là *borno Gâteaux.*

Theo [1], Định lý 27, trang 415, họ β trong Định nghĩa 1.1 xác định trên X^* một tôpô lồi địa phương Hausdorff τ_β. Không gian X^* với tôpô τ_β này được ký hiệu là X_β^*. Một cơ sở lân cận của điểm gốc 0 trong X_β^* là họ tất cả các tập có dạng

$$\{f : |f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in M\},$$

với $\epsilon > 0$ tùy ý và $M \in \beta$.

Khi đó, dãy phiếm hàm $(f_m) \subset X^*$, hội tụ về phần tử $f \in X^*$ đối với tôpô τ_β khi và chỉ khi với mọi tập $M \in \beta$ và mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m \geq n_0$, mọi $x \in M$ ta đều có $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$. Hay f_m hội tụ đều tới f trên tập M. Do đó tôpô τ_β còn được gọi là *tôpô hội tụ đều trên các tập thuộc họ β*.

Nhận xét 1.1. Nếu β borno là F (Fréchet), H (Hadamard), WH (Hadamard yếu) hoặc G (Gâteaux), khi đó ta có tôpô Fréchet, tôpô Hadamard, Hadamard tôpô yếu và tôpô Gâteaux trên không gian đối ngẫu X^*, tương ứng (xem [25]). Rõ ràng, F-tôpô là tôpô mạnh nhất và G-tôpô là tôpô yếu nhất trong các β-tôpô trên X^*. Vì mọi tập hữu hạn đều là tập compact, mọi tập compact là tập compact yếu, mọi tập compact yếu đều bị chặn nên ta có bao hàm thức $\tau_G \subset \tau_H \subset \tau_{WH} \subset \tau_F$.

Định nghĩa 1.2 (Tính β-khả vi, tính β-trơn, [19, tr. 1569])**.** Cho hàm f xác định trên X và nhận giá trị trong $\mathbb{R}$, ta nói rằng f là *β-khả vi* tại $x \in X$ và có β-đạo hàm $\nabla_\beta f(x) \in X^*$ nếu $f(x)$ là hữu hạn và

$$\frac{f(x+tu) - f(x) - t\langle \nabla_\beta f(x), u\rangle}{t} \to 0$$

khi $t \to 0$ đều theo $u \in V$ với bất kỳ $V \in \beta$. Ta nói rằng hàm f là β-trơn tại x nếu $\nabla_\beta f : X \to X_\beta^*$ liên tục trong lân cận của x. Khi borno β được thay bởi các họ: F, H, WH, G thì ta có các khái niệm khả vi và trơn tương ứng: khả vi Fréchet, trơn Fréchet, khả vi Hadamard, trơn Hadamard, khả vi Hadamard yếu, trơn Hadamard yếu, khả vi Gâteaux, trơn Gâteaux.

Định nghĩa 1.3 (Chuẩn β-trơn, [25])**.** Không gian Banach X với chuẩn $\|\cdot\|$ là β-khả vi hoặc chuẩn β-trơn nếu hàm $\|\cdot\|$ là β-khả vi tại mọi x thuộc mặt cầu đơn vị $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. (Theo tính thuần nhất, hàm chuẩn $\|\cdot\|$ là β-khả vi tại mọi điểm $x \in X\backslash\{0\}$).

Ví dụ 1.1. Theo [25] ta có các kết quả sau:

1) Các không gian Hilbert là những không gian có chuẩn trơn Fréchet.

2) Không gian không có chuẩn trơn nhưng có chuẩn tương đương với một chuẩn trơn.
Xét không gian l^1 có chuẩn được xác định $x = (x_n)_n \in l^1$, $\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ khả vi Gâteaux tại x nếu và chỉ nếu $x_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Như vậy hàm chuẩn được xác định như trên không trơn Gâteaux. Theo [17] thì l^1 có chuẩn tương đương với chuẩn trơn Hadamard yếu đó đó chuẩn tương đương này là trơn Gâteaux.

Nhận xét 1.1. Ta dễ dàng có được các kết quả sau:

1) Nếu f, g là hai hàm β-khả vi tại x thì $f + g$ là β-khả vi tại x và $\nabla_\beta(f + g)(x) = \nabla_\beta f(x) + \nabla_\beta g(x)$.

2) Với $\alpha \in \mathbb{R}$, f là một hàm β-khả vi tại $x \in X$ thì hàm αf cũng β-khả vi tại x và $\nabla_\beta(\alpha f)(x) = \alpha \nabla_\beta f(x)$.

Nhận xét 1.2.

1) Theo định nghĩa ta có: nếu $\beta_1 \subset \beta_2$ thì tính β_2-khả vi kéo theo tính β_1-khả vi. Nói riêng nếu β là borno bất kỳ và f là β-khả vi tại x thì f khả vi Gâteaux tại x, f khả vi Fréchet tại x thì f là β-khả vi tại x. Từ đây ta có: tính khả vi Fréchet $\Rightarrow$ tính khả vi Hadamard yếu $\Rightarrow$ tính khả vi Hadamard $\Rightarrow$ tính khả vi Gâteaux.

2) Nếu X là không gian phản xạ thì tính khả vi Fréchet $\Leftrightarrow$ tính khả vi Hadamard yếu. Vì trong không gian phản xạ, tập đóng và bị chặn khi và chỉ khi là compact yếu.

3) Nếu $X = \mathbb{R}^n$ là không gian hữu hạn chiều thì tính khả vi Fréchet $\Leftrightarrow$ tính khả vi Hadamard yếu $\Leftrightarrow$ tính khả vi Hadamard. Vì trong không gian hữu hạn chiều một tập đóng và bị chặn khi và chỉ khi nó là tập compact.

4) Nếu $X = \mathbb{R}$ thì tính khả vi Gâteaux và tính khả vi Fréchet trùng nhau. Vì khi đó hàm f khả vi bên trái và bên phải tại điểm x nên nó khả vi Fréchet tại x.

Dưới đây là các ví dụ để chiều ngược lại của 1) trong Nhận xét 1.2 là không đúng.

Ví dụ 1.2 (Hàm khả vi Gâteaux nhưng không khả vi Fréchet)**.** Cho hàm số $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^6+y^2} & \text{nếu } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Nếu $x = 0$ hoặc $y = 0$ thì $\dfrac{f((0,0)+t(x,y)) - f(0,0)}{t} = 0$.
Nếu $x \neq 0$ và $y \neq 0$ thì

$$\left|\frac{f((0,0)+t(x,y)) - f(0,0)}{t}\right| = \frac{|tx^2y|}{y^2+t^4x^6} \leq \frac{|tx^2y|}{y^2} = |t|\frac{x^2}{|y|}.$$

Do đó với (x,y) thuộc một tập hữu hạn nào đó, với mọi $\varepsilon > 0$ thì ta tìm được $\delta > 0$ sao cho với mọi $t \in (0,\delta)$ thì $|t|\frac{x^2}{|y|} < \varepsilon$. Theo định nghĩa, hàm f là khả vi Gâteaux tại $(0,0)$ và $\nabla_G f(0,0) = (0,0)$. Nhưng giới hạn sau không tồn tại

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f((0,0)+(x,y)) - f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Do đó f không khả vi Fréchet tại $(0,0)$.

Theo 3) của Nhận xét 1.2 thì f không khả vi Hadamard yếu và cũng không khả vi Hadamard vì hàm f xác định trên không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ sau chỉ ra một hàm khả vi Hadamard nhưng không khả vi Hadamard yếu, ví dụ này được chúng tôi lấy ý tưởng trong [31].

Ví dụ 1.3. Xét trên không gian Hilbert

$$l^2 = \{x = (x_n)_n : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty\}.$$

Xét hệ các véctơ $\{e_n, n \in \mathbb{N}\} \subset l^2$ với $e_n = (0,\cdots,0,1,0,\cdots)$, số 1 ở vị trí thứ n. Ta xác định một hàm $f : l^2 \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$f(x) = \sup_{n\geq 1}\left\{2\langle e_n, x\rangle - \frac{1}{n}\right\}.$$

Ta có $f(0) = 0$ và $|f(x) - f(y)| \leq \sup_{n\geq 1}\{|2\langle e_n, x\rangle - 2\langle e_n, y\rangle|\} \leq 2\|x - y\|$ với mọi $x, y \in l^2$. Nên f là hàm liên tục Lipschitz trên l^2.

Với $x = (x_n)_n \in l^2$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ mà $|\langle e_n, x\rangle| \leq \|x_n\|$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \langle e_n, x\rangle = 0$, ta có $f(x) \geq 2\langle e_n, x\rangle - \frac{1}{n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ nên $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in l^2$.

Ta sẽ chứng minh f là khả vi Hadamard tại 0 và $f'(0) = 0$, xét tập con compact V của l^2. Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại hữu hạn các điểm $u_1, \cdots, u_m$ trong l^2 sao cho $V \subset \cup_{i=1}^{m} B(u_i, \varepsilon/2)$ trong đó $B(u, r)$ là hình cầu mở tâm u và bán kính $r > 0$ trong l^2. Với mỗi $i = \overline{1..m}$, tồn tại $n(i, \varepsilon)$ sao cho $|\langle e_n, u_i\rangle| \leq \varepsilon/2$ với mọi $n > n(i, \varepsilon)$. Lấy $n(\varepsilon) = \max_{1\leq i\leq m} n(i, \varepsilon)$. Với mọi $n > n(\varepsilon)$ và với mọi $v \in V$. Ta có

$$|\langle e_n, v\rangle| \leq |\langle e_n, v - u_i\rangle| + |\langle e_n, u_i\rangle| < \varepsilon.$$

Do đó

$$2\langle e_n, tv\rangle - \frac{1}{n} < 2\varepsilon|t|$$

với mọi $t \in \mathbb{R}, v \in V$ và $n \geq n(\varepsilon)$.

Đặt $K = 1 + \sup\{\|v\| : v \in V\}$, với $v \in V$ và $|t| \leq \frac{1}{2Kn(\varepsilon)}$ ta có

$$2\langle e_n, tv\rangle - \frac{1}{n} < 2\|v\||t| - \frac{1}{n(\varepsilon)} \leq 0.$$

Do đó, khi $|t| \leq \frac{1}{2Kn(\varepsilon)}$ và $v \in V$ thì

$$f(tv) = \sup_{n\geq 1}\left\{2\langle e_n, tv\rangle - \frac{1}{n}\right\} \leq 2\varepsilon|t|.$$

Suy ra

$$0 \leq \left|\frac{f(0 + tv) - f(0)}{t}\right| = \frac{f(tv)}{t} \leq 2\varepsilon,$$

nếu $|t| \leq \frac{1}{2Kn(\varepsilon)}$ và $v \in V$.

Hay $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(0+tv)-f(0)}{t} = 0$ đều trên $v \in V$. Vậy hàm f khả vi Hadamard tại $u = 0$ và $f'(0) = 0$.

Ta thấy rằng $(e_n)_n$ hội tụ yếu về 0 trong l^2, xét dãy $(t_n)_n$ với $t_n = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, rõ ràng $t_n \to 0$. Nếu f là khả vi Hadamard yếu tại $u = 0$ thì

$$\frac{f(0 + t_n e_n) - f(0)}{t_n} = \frac{f(t_n e_n)}{t_n} \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Nhưng

$$\begin{aligned}\frac{f(t_n e_n)}{t_n} &= nf\left(\frac{e_n}{n}\right) = n\sup_{m\geq 1}\left\{2\left\langle e_m, \frac{e_n}{n}\right\rangle - \frac{1}{m}\right\}\\ &\geq n\left\{2\left\langle e_n, \frac{e_n}{n}\right\rangle - \frac{1}{n}\right\} = 1, \text{ với mọi } n \geq 1.\end{aligned}$$

Do đó f không khả vi Hadamard yếu tại $u = 0$. Vì l^2 là không gian phản xạ nên f cũng không khả vi Fréchet tại $u = 0$.

Ví dụ 1.4 (Hàm khả vi Hadamard yếu nhưng không khả vi Fréchet)**.** Xét $X = l^1$ với hàm chuẩn được xác định $x = (x_n)_n \in l^1$, $\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$. Theo Ví dụ 1.6, c) trong [25] thì hàm chuẩn $\|\cdot\|$ được xác định như trên là khả vi Gâteaux tại các điểm $x \in l^1$ mà $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ và không khả vi Fréchet tại bất kì điểm nào.

Theo tính chất của chuẩn thì $\|\cdot\|$ là một hàm Lipschitz, vậy theo Nhận xét 1.2 thì tính khả vi Gâteaux và khả vi Hadamard của chuẩn $\|\cdot\|$ trùng nhau. Vậy hàm chuẩn $\|\cdot\|$ là khả vi Hadamard nhưng không khả vi Fréchet.

Theo [16, tr. 1124] thì trên không gian l^1 tính khả vi Gâteaux và khả vi Hadamard yếu của một hàm số trùng nhau. Như vậy hàm chuẩn $\|\cdot\|$ là khả vi Hadamard yếu nhưng không khả vi Fréchet.

Dưới đây là kết quả về tính khả vi Gâteaux và khả vi Hadamard của hàm Lipschitz.

Định nghĩa 1.4 (Tính Lipschitz địa phương)**.** Hàm $f : X \to \mathbb{R}$ được gọi là *Lipschitz địa phương* tại $x \in X$ nếu tồn tại $\delta > 0$ và hằng số K sao cho

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K\|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in B(x, \delta).$$

Trong đó $B(x, \delta)$ là hình cầu mở tâm x bán kính δ.

Ví dụ 1.5. Nếu $f : X \to \mathbb{R}$ là hàm Lipschitz địa phương tại x thì hàm f khả vi Gâteaux tại x khi và chỉ khi khả vi Hadamard tại x. Thật vậy, nếu f khả vi Hadamard tại x thì hiển nhiên f khả vi Gâteaux tại x.
Ngược lại giả sử rằng f là hàm khả vi Gâteaux tại x.
Vì f là hàm Lipschitz địa phương tại x nên tồn tại $\delta_1 > 0$ sao cho

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K\|x_1 - x_2\|, \forall x_1, x_2 \in B(x, r_1).$$

Với V là tập compact trong X, $\varepsilon > 0$ đặt $r_2 = \dfrac{\varepsilon}{2(K + \|\nabla_G f(x)\|)}$. Vì $V \subset \cup_{x \in V} B(x, r_2)$ nên tồn tại hữu hạn hình cầu $B(x_i, r_2), i = 1, 2, \cdots, n$ sao cho

$$V \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, r_2).$$

Lấy tập hữu hạn, đối xứng tâm U chứa $x_1, x_2, \cdots, x_n$, theo giả thiết f là khả vi Gâteaux tại x nên tồn tại $\delta_0 > 0$ sao cho, với mọi $t \in (-\delta_0, \delta_0)$, mọi $y \in U$ thì

$$\left| \frac{f(x + ty) - f(x)}{t} - \langle \nabla_G f(x), y \rangle \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nói riêng

$$\left| \frac{f(x + tx_i) - f(x)}{t} - \langle \nabla_G f(x), x_i \rangle \right| < \frac{\varepsilon}{2}, i = 1, \cdots, n.$$

Đặt $\delta = \min \left\{ r_1, r_2, \delta_0, \frac{r_1}{1 + r_2 + \max\{\|x_i\|, i = 1, \cdots, n\}} \right\}$, với mọi $u \in V$ thì tồn tại i_0 sao cho $u \in B(x_{i_0}, r_2)$.

Với mọi $t \in (-\delta, \delta)$ ta có đánh giá

$$\|x + tu - x\| = \|t(u - x_{i_0}) + tx_{i_0}\| \le |t|(r_2 + \max\{\|x_i\|, i = 1, \cdots, n\}) < r_1$$

và $\|tx_{i_0}\| < r_1$. Ta phân tích

$$\begin{aligned} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} - \langle \nabla_G f(x), u \rangle &= \frac{f(x + tu) - f(x + tx_{i_0})}{t} \\ + \langle \nabla_G f(x), x_{i_0} - u \rangle &+ \frac{f(x + tx_{i_0}) - f(x)}{t} - \langle \nabla_G f(x), x_{i_0} \rangle. \end{aligned}$$

Do tính Lipschitz của hàm f nên

$$\left| \frac{f(x + tu) - f(x + tx_{i_0})}{t} \right| \le K\|u - x_{i_0}\| \le K r_2;$$

lại có đánh giá

$$|\langle \nabla_G f(x), x_{i_0} - u \rangle| \le \|\nabla_G f(x)\| \, r_2$$

nên

$$\left| \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} - \langle \nabla_G f(x), u \rangle \right| \le r_2(K + \|\nabla_G f(x)\|) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Vậy f là khả vi Hadamard tại x.

1.2. Dưới vi phân β-nhớt

Định nghĩa 1.5 (Dưới vi phân β-nhớt, [19, Định nghĩa 2.1]). Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm nửa liên tục dưới và $f(x) < +\infty$. Ta nói rằng f là *khả dưới vi phân β-nhớt* và x^* là một *dưới đạo hàm β-nhớt* của f tại x nếu tồn tại một hàm Lipschitz địa phương $g : X \to \mathbb{R}$ sao cho g là β-trơn tại x, $\nabla_\beta g(x) = x^*$ và $f - g$ đạt cực tiểu địa phương tại x. Ta ký hiệu tập tất cả các dưới đạo hàm β-nhớt của f tại x là $D_\beta^- f(x)$ và gọi là *dưới vi phân β-nhớt* của f tại x.

Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm nửa liên tục trên và $f(x) > -\infty$. Ta nói rằng f là *khả trên vi phân β-nhớt* và x^* là một *trên đạo hàm β-nhớt* của f tại x nếu tồn tại một hàm Lipschitz địa phương $g : X \to \mathbb{R}$ sao cho g là β-trơn tại x, $\nabla_\beta g(x) = x^*$ và $f - g$ đạt cực đại địa phương tại x.

Ta ký hiệu tập tất cả các trên đạo hàm β-nhớt của f tại x là $D_\beta^+ f(x)$ và gọi là *trên vi phân β-nhớt* của f tại x.

Nhận xét 1.3. Trong [19, Chú ý 2.2] các tác giả đã đưa ra một định nghĩa theo giới hạn của trên vi phân β-nhớt của f tại x là tập $\partial_\beta f(x)$ như sau: $x^* \in \partial_\beta f(x)$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, với mọi $V \in \beta$, tồn tại $\eta > 0$ sao cho

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} - \langle x^*, h\rangle > -\varepsilon, \quad \forall t \in (0, \eta), \quad h \in V.$$

Ta có thể kiểm tra được rằng $D_\beta^- f(x) \subset \partial_\beta f(x)$. Trong [25] các tác giả chỉ ra rằng $D_F^- f(x) = \partial_F f(x)$ trong trường hợp không gian X tồn tại một hàm bướu (tức là hàm có giá khác rỗng và bị chặn) là Lipschitz và khả vi Fréchet. Tuy nhiên hai khái niệm này là khác nhau.

Xét hàm f trong Ví dụ 1.2, đặt hàm $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(h) = -|f(h) - f(0) - \nabla_G f(0)h| = -|f(h)|.$$

Khi đó

1) $\partial_G g(0) = \{0\}$;

2) $D_G^- g(0) = \emptyset$.

Thật vậy, ta kiểm tra được $\nabla_G g(0) = 0$ do đó $\partial_G g(0) = \{0\}$. Ta luôn có $D_G^- g(0) \subset \partial_G g(0)$ nên hoặc $D_G^- g(0) = \{0\}$ hoặc $D_G^- g(0) = \emptyset$. Nếu $D_G^- g(0) =$

$\{0\}$ thì tồn tại hàm Lipschitz địa phương và khả vi Gâteaux k sao cho $k(0) = g(0) = 0$, $\nabla_G k(0) = \nabla_G g(0) = 0$ và $k \leq g$ trong một lân cận của 0. Vì k là một hàm Lipschitz địa phương và không gian $\mathbb{R}^2$ hữu hạn chiều nên k là khả vi Fréchet tại 0. Như vậy

$$\frac{|f(0+h) - f(0) - \nabla_G f(0)h|}{\|h\|} \leq -\frac{k(h) - k(0)}{\|h\|} = \frac{|k(h) - k(0)|}{\|h\|}.$$

Do đó f là khả vi Fréchet tại 0, điều này mâu thuẫn với kết quả của Ví dụ 1.2.

Định lý 1.1. 1) *Nếu $\beta_1 \subset \beta_2$ thì $D^-_{\beta_2} f(x) \subset D^-_{\beta_1} f(x)$ nói riêng $D^-_F f(x) \subset D^-_\beta f(x) \subset D^-_G f(x)$ với mọi borno β.*

2) *Nếu f là hàm liên tục, $f(x)$ hữu hạn và $D^-_\beta f(x)$, $D^+_\beta f(x)$ là hai tập khác rỗng thì f là β-khả vi tại x.*

3) *Nếu $\beta_1 \subset \beta_2$ và f là β_1-khả vi tại x và f khả dưới vi phân β_2-nhớt tại x thì $D^-_{\beta_2} f(x) = \{\nabla_{\beta_1} f(x)\}$.*

4) *$D^-_\beta f(x) + D^-_\beta g(x) \subset D^-_\beta (f+g)(x)$.*

5) *$D^-_\beta f(x)$ là một tập lồi.*

Chứng minh. 1) Kết quả là hiển nhiên được suy ra từ định nghĩa.

2) Giả sử $x_1^* \in D^+_\beta f(x)$ và $x_2^* \in D^-_\beta f(x)$. Khi đó tồn tại các hàm g_1, g_2 Lipschitz địa phương và β-trơn tại x, $x_1^* = \nabla_\beta g_1(x)$ và $x_2^* = \nabla_\beta g_2(x)$, $f - g_1$ đạt cực đại địa phương tại x, $f - g_2$ đạt cực tiểu địa phương tại x. Khi đó, tồn tại $\delta_1, \delta_2 > 0$ sao cho

$$f(y) - g_1(y) \leq f(x) - g_1(x), \forall y \in B(x, \delta_1),$$
$$f(y) - g_2(y) \geq f(x) - g_2(x), \forall y \in B(x, \delta_2).$$

Lấy $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ta có $g_2(y) - g_1(y) \leq g_2(x) - g_1(x), \forall y \in B(x, \delta)$ hay $g_2 - g_1$ đạt cực tiểu địa phương tại x. Theo định nghĩa dưới vi phân β-nhớt ta có $x_2^* \in \{x_1^*\}$ hay $x_2^* = x_1^*$ gọi phần tử này là x^*.

Vì g_1, g_2 là β-khả vi tại x nên với mọi $V \in \beta$, mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $t \in (-\delta, \delta)$, mọi $y \in V$ thì

$$\left|\frac{g_1(x+ty) - g_1(x)}{t} - \langle x^*, y\rangle\right| \leq \varepsilon; \left|\frac{g_2(x+ty) - g_2(x)}{t} - \langle x^*, y\rangle\right| \leq \varepsilon.$$

Khi đó

$$\frac{f(x+ty) - f(x)}{t} - \langle x^*, y\rangle \leq \frac{g_1(x+ty) - g_1(x)}{t} - \langle x^*, y\rangle < \varepsilon$$

và

$$\frac{f(x+ty) - f(x)}{t} - \langle x^*, y\rangle \geq \frac{g_2(x+ty) - g_2(x)}{t} - \langle x^*, y\rangle > -\varepsilon$$

suy ra

$$\left|\frac{f(x+ty) - f(x)}{t} - \langle x^*, y\rangle\right| < \varepsilon.$$

3) Điều này là hiển nhiên vì nếu $x^* \in D^-_{\beta_2} f(x)$ thì $x^* \in D^-_{\beta_1} f(x)$. Theo định nghĩa dưới vi phân β-nhớt, tồn tại hàm g Lipschitz địa phương, β_1-trơn tại x, $\nabla_{\beta_1} g(x) = x^*$. Và g là β_1-khả vi tại x nên với mọi $\varepsilon > 0$, mọi $V \subset \beta_1$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$-\varepsilon < \frac{g(x+ty) - g(x)}{t} - \langle x^*, y\rangle < \varepsilon.$$

Mặt khác $f(x+ty) - f(x) \geq g(x+ty) - g(x)$ nên

$$\frac{f(x+ty) - f(x)}{t} - \langle x^*, y\rangle \geq \frac{g(x+ty) - g(x)}{t} - \langle x^*, y\rangle > -\varepsilon.$$

Do đó

$$\langle x^*, y\rangle < \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} + \varepsilon.$$

Hàm f là β_1-khả vi tại x nên

$$\langle \nabla_{\beta_1} f(x), y\rangle > \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} - \varepsilon.$$

Suy ra

$$\langle x^*, y\rangle - \langle \nabla_{\beta_1} f(x), y\rangle < 2\varepsilon$$

do đó $x^* = \nabla_{\beta_1} f(x)$.

4) Lấy $p \in D^-_\beta f(x), q \in D^-_\beta g(x)$ khi đó tồn tại hai hàm Lipschitz địa phương h_1, h_2 sao cho h_1, h_2 là β-trơn tại x, $\nabla_\beta h_1(x) = p, \nabla_\beta h_2(x) = q$ và $f - h_1, g - h_2$ đạt cực tiểu địa phương tại x. Suy ra $f + g - (h_1 + h_2)$ đạt cực tiểu địa phương tại x. Do đó $\nabla_\beta (h_1 + h_2)(x) = p + q \in D^-_\beta (f + g)(x)$.

5) Với $p, q \in D^-_\beta f(x)$, $\alpha \in (0, 1)$. Khi đó tồn tại hai hàm $g, h : X \to \mathbb{R}$ Lipschitz địa phương tại x sao cho g, h là β-trơn tại x, $\nabla_\beta g(x) = p$, $\nabla_\beta h(x) = q$ và $f - g, f - h$ đạt cực tiểu địa phương tại x.

$$f(y) - g(y) \geq f(x) - g(x), \forall y \in B(x, r), \tag{1.1}$$

$$f(y) - h(y) \geq f(x) - h(x), \forall y \in B(x, r) \tag{1.2}$$

với $r > 0$ nào đó.

Nhân bất đẳng thức (1.1) với α và (1.2) với $1 - \alpha$ rồi cộng theo vế ta có

$$f(y) - [\alpha g + (1 - \alpha)h](y) \geq f(x) - [\alpha g + (1 - \alpha)h](x), \quad \forall y \in B(x, \delta).$$

Suy ra $\nabla_\beta [\alpha g + (1 - \alpha)h](x) \in D^-_\beta f(x)$, hay $\alpha p + (1 - \alpha)q \in D^-_\beta f(x)$.

□

Theo Nhận xét 1.2 ta có các kết quả sau.

Nhận xét 1.4.

1) $D^-_F f(x) \subset D^-_{WH} f(x) \subset D^-_H f(x) \subset D^-_G f(x)$.

2) Nếu X là không gian phản xạ thì $D^-_F f(x) = D^-_{WH} f(x)$.

3) Nếu $X = \mathbb{R}^n$ thì $D^-_F f(x) = D^-_{WH} f(x) = D^-_H f(x)$.

4) Nếu $X = \mathbb{R}$ thì $D^-_F f(x) = D^-_G f(x)$.

Định lý 1.2. *Nếu f là một hàm lồi xác định trên tập lồi C và $x \in C$, với mọi borno β thì ta có*

$$D^-_\beta f(x) = D^-_G f(x) = \partial f(x).$$

Chứng minh. Theo 1) trong Nhận xét 1.1 thì $D^-_\beta f(x) \subset D^-_G f(x)$. Ngược lại, nếu $x^* \in D^-_G f(x)$ thì tồn tại một hàm Lipschitz địa phương g sao cho g là β-trơn tại x, $\nabla_G g(x) = x^*$ và $f - g$ đạt cực tiểu địa phương tại x (ta có thể xem $f(x) = g(x)$). Với mọi $y \in C$ ta có

$$\begin{aligned}\langle x^*, y - x\rangle &= \lim_{t\to 0^+} \frac{g(x + t(y - x)) - g(x)}{t}\\ &\le \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Mặt khác, với $t \in (0, 1)$ ta có biểu diễn $x + t(y - x) = (1 - t)x + ty$ và do f là hàm lồi nên

$$f(x + t(y - x)) \le (1 - t)f(x) + tf(y)$$

hay

$$f(x + t(y - x)) - f(x) \le t(f(y) - f(x)).$$

Suy ra

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x + t(y - x)) - f(x)}{t} \le f(y) - f(x). \tag{1.4}$$

Từ (1.3) và (1.4) ta có $\langle x^*, y - x\rangle \le f(y) - f(x)\ \ \forall y \in C$. Do đó $x^* \in \partial f(x)$.

Nếu $x^* \in \partial f(x)$ thì chọn hàm $g(x) = \langle x^*, y - x\rangle + f(x)$, khi đó g là một hàm Lipschitz địa phương g sao cho g là β-trơn tại x, $\nabla_\beta g(x) = x^*$ và $f - g$ đạt cực tiểu địa phương tại x. Hay $x^* \in D^-_\beta f(x)$ nên $\partial f(x) \subset D^-_\beta f(x)$. $\square$

Tiếp theo, ta ký hiệu

$$\mathcal{D}_\beta(X) = \{g : X \to \mathbb{R}|\ g \text{ là bị chặn, Lipschitz và } \beta\text{-khả vi trên } X\},$$

$$\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| :\ x \in X\}, \quad \|\nabla_\beta g\|_\infty = \sup\{\|\nabla_\beta g(x)\| :\ x \in X\}$$

và

$$\mathcal{D}^*_\beta(X) = \{g \in \mathcal{D}_\beta(X)|\ \nabla_\beta g : X \to X^*_\beta \text{ là liên tục}\}.$$

Chúng tôi sử dụng các giả thiết sau.

(H_β) Tồn tại một hàm bướu (tức là hàm có giá khác rỗng và bị chặn) b sao cho $b \in \mathcal{D}_\beta(X)$; và

(H^*_β) Tồn tại một hàm bướu b sao cho $b \in \mathcal{D}^*_\beta(X)$.

Mệnh đề 1.1. *Giả thiết* (H_β) *và* (H^*_β) *được thỏa mãn nếu không gian Banach* X *có chuẩn là* β*-trơn.*

Chứng minh. Lấy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi liên tục có đạo hàm bị chặn và có giá chứa trong đoạn $[1, 3]$. Ví dụ, một hàm f được cho bởi

$$f(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(t-2)^2-1}\right) & \text{nếu } |t-2| < 1, \\ 0 & \text{nếu } |t-2| \geq 1. \end{cases}$$

Ta xác định hàm $b(x) = f(\|x\|)$ với $x \in X$. Rõ ràng b là bị chặn và liên tục Lipschitz. Với $\|x\| \leq 1$ hoặc $\|x\| \geq 3$, $b(x) = 0$. Vì chuẩn là β-trơn, b là khả vi tại mọi điểm thỏa mãn $1 < \|x\| < 3$. Kết hợp với tính trơn của f, ta có thể kết luận rằng (H_β) và (H^*_β) là thỏa mãn. $\square$

Trong trường hợp tổng quát, điều ngược lại của Mệnh đề 1.1 không đúng. Một ví dụ cho điều này có thể được tìm thấy trong [40, tr. 59], trong đó các tác giả đã chỉ ra rằng tồn tại một hàm bướu liên tục Lipschitz, khả vi Fréchet trong không gian Banach X nhưng hàm chuẩn không khả vi Gâteaux tại bất kỳ điểm nào (do đó, hàm chuẩn không khả vi Fréchet).

Trong [26], các tác giả đã thiết lập nguyên lý biến phân trơn trong không gian Banach X trong đó tồn tại một hàm bướu Lipschitz, bị chặn và khả vi. Nguyên lý này được nhắc lại trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 1.2 ([26, Chú ý II.5])**.** *Cho* X *là một không gian Banach thỏa mãn giả thiết* (H_β) *(tương ứng,* (H^*_β)*) và* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *là một hàm nửa liên tục dưới và bị chặn dưới trên* X*. Khi đó tồn tại một hằng số* $a = a_X > 0$ *sao cho với mọi* $\varepsilon \in (0, 1)$ *và* $y_0 \in X$ *thỏa mãn* $f(y_0) < \inf_X(f) + a\varepsilon^2$*, tồn tại một hàm* $g \in \mathcal{D}_\beta(X)$ *(tương ứng,* $g \in \mathcal{D}^*_\beta(X)$*) và* $x_0 \in X$ *sao cho:*

(a) $f + g$ *đạt cực tiểu tại* x_0;

(b) $\|g\|_\infty \leq \varepsilon$ *và* $\|\nabla_\beta g\|_\infty \leq \varepsilon$;

(c) $\|x_0 - y_0\| \leq \varepsilon$.

Từ Mệnh đề 1.2 ta có kết quả sau.

Mệnh đề 1.3. *Cho X là một không gian Banach thỏa mãn (H_β) (tương ứng, (H_β^*)) và E là một tập con đóng của X. Khi đó, với hàm nửa liên tục dưới, bị chặn dưới f trên E và mọi $\varepsilon \in (0,1)$, tồn tại $g \in \mathcal{D}_\beta(X)$ (tương ứng, $g \in \mathcal{D}_\beta^*(X)$) và $x_0 \in E$ sao cho:*

(a) $f + g$ đạt cực tiểu tại x_0;

(b) $\|g\|_\infty \le \varepsilon$ và $\|\nabla_\beta g\|_\infty \le \varepsilon$.

Chứng minh. Ta mở rộng hàm f thành hàm $\widetilde{f}$ xác định trên X bởi

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \in E, \\ \infty & \text{nếu } x \notin E. \end{cases}$$

Do E là đóng và theo tính chất của hàm f thì $\widetilde{f}$ là nửa liên tục dưới và bị chặn dưới. Như vậy, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $y_0 \in X$ sao cho $\widetilde{f}(y_0) < \inf_X(\widetilde{f}) + \varepsilon$. Hơn nữa, $\widetilde{f}(y_0) < \infty$ và $y_0 \in E$ từ $\inf_X(\widetilde{f}) + \varepsilon < \infty$. Theo Mệnh đề 1.2, tồn tại một hàm $g \in \mathcal{D}_\beta(X)$ (tương ứng, $g \in \mathcal{D}_\beta^*(X)$) và $x_0 \in X$ sao cho:

(a) $\widetilde{f} + g$ đạt cực tiểu tại x_0;

(b) $\|g\|_\infty \le \varepsilon$ và $\|\nabla_\beta g\|_\infty \le \varepsilon$.

Theo (a) thì $(\widetilde{f}+g)(y) \ge (\widetilde{f}+g)(x_0)$ với mọi $y \in X$. Nói riêng, với $y \in E$, ta có $\infty > (\widetilde{f} + g)(y) = (f + g)(y) \ge (\widetilde{f} + g)(x_0)$. Từ $\|g\|_\infty \le \varepsilon$, ta kết luận rằng $x_0 \in E$. Như vậy, mệnh đề được chứng minh. $\square$

Tương tự, khi f là nửa liên tục trên và bị chặn trên ở trên E, hàm $\widehat{f} = -f$ là nửa liên tục dưới và bị chặn dưới trên E. Ta có kết quả sau.

Mệnh đề 1.4. *Cho X là một không gian Banach thỏa mãn (H_β) (tương ứng, (H_β^*)) và E là tập con đóng của X. Với mỗi hàm nửa liên tục trên và bị chặn trên f ở trên tập E và mọi $\varepsilon \in (0,1)$, tồn tại một hàm $g \in \mathcal{D}_\beta(X)$ (tương ứng, $g \in \mathcal{D}_\beta^*(X)$) và một $x_0 \in E$ sao cho:*

(a) $f - g$ đạt cực đại tại x_0;

(b) $\|g\|_\infty \le \varepsilon$ và $\|\nabla_\beta g\|_\infty \le \varepsilon$.

Mệnh đề sau cho ta thông tin về mối quan hệ giữa dưới vi phân β-nhớt của một hàm bị chặn nửa liên tục trên và một hàm bị chặn nửa liên tục dưới. Kết quả này được dùng để chứng minh tính duy nhất của nghiệm β-nhớt cho phương trình Hamilton-Jacobi.

Mệnh đề 1.5. *Cho X là một không gian Banach thỏa mãn giả thiết (H_β^*) và u, v là hai hàm bị chặn trên X sao cho u là nửa liên tục trên và v là hàm nửa liên tục dưới. Khi đó, tồn tại hằng số C sao cho với mọi $\varepsilon \in (0,1)$, tồn tại $x, y \in X, p \in D_\beta^+ u(x), q \in D_\beta^- v(y)$ sao cho:*

(a) $\|x-y\| < \varepsilon^2$ và $\|p-q\| < \varepsilon$;

(b) Với mọi $z \in X$, $v(z) - u(z) \geq v(y) - u(x) - \varepsilon$;

(c) $\|x-y\|\sqrt{\|p\|} < C\varepsilon, \quad \|x-y\|\sqrt{\|q\|} < C\varepsilon$.

Chứng minh. Lấy $b \in \mathcal{D}_\beta^*(X)$ là một hàm bướu sao cho $b(0) = 1$ và có giá nằm trong hình cầu đơn vị. Nếu cần, ta có thể thay thế hàm b bởi hàm $\varphi \circ b$ trong đó $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm bướu liên tục, khả vi và thỏa mãn $0 \leq \varphi \leq 1, \varphi(0) = 1$, ta có thể giả sử rằng $0 \leq b \leq 1$. Lấy $M = \sup\{\|\nabla_\beta b\|_\infty, 1\}$ và $\lambda > 0$ thỏa mãn

$$\lambda > 4\max(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty) + 1.$$

Xét hàm $w : X \times X \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$w(x,y) = v(y) - u(x) - \lambda b\left(\frac{x-y}{\varepsilon^2}\right).$$

w là hàm nửa liên tục dưới và bị chặn dưới trên $X \times X$ và không gian $X \times X$ thỏa mãn (H_β^*) (với hàm bướu B xác định bởi $B(x,y) = b(x)b(y)$ thuộc $\mathcal{D}_\beta^*(X \times X)$). Như vậy, từ Mệnh đề 1.2 dẫn đến tồn tại $(x,y) \in X \times X$ và $g \in \mathcal{D}_\beta^*(X \times X)$ sao cho

(i) $\|g\|_\infty < \varepsilon/2$ và $\|\nabla_\beta g\|_\infty < \varepsilon/2$,

(ii) với mọi $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in X \times X$,

$$v(\widehat{y}) - u(\widehat{x}) - \lambda b\left(\frac{\widehat{x}-\widehat{y}}{\varepsilon^2}\right) + g(\widehat{x},\widehat{y}) \geq v(y) - u(x) - \lambda b\left(\frac{x-y}{\varepsilon^2}\right) + g(x,y).$$

Cố định $\widehat{x} = x$, khi đó v là khả dưới vi phân β-nhớt tại y và

$$q = -\frac{\lambda}{\varepsilon^2}\nabla_\beta b\left(\frac{x-y}{\varepsilon^2}\right) - \nabla_\beta g_y(x,y) \in D_\beta^- v(y).$$

Tương tự, u là khả trên vi phân β-nhớt tại x và

$$p = -\frac{\lambda}{\varepsilon^2}\nabla_\beta b\left(\frac{x-y}{\varepsilon^2}\right) + \nabla_\beta g_x(x,y) \in D_\beta^+ u(x).$$

Ta có

$$\|p-q\| = \|\nabla_\beta g_x(x,y) + \nabla_\beta g_y(x,y)\| < \varepsilon.$$

Nếu $\|x-y\| \geq \varepsilon^2$, thì với mọi $z \in X$,

$$v(z) - u(z) - \lambda + g(z,z) \geq v(y) - u(x) + g(x,y),$$

điều này mâu thuẫn với việc chọn lựa λ. Do đó $\|x-y\| < \varepsilon^2$. Khẳng định (a) được chứng minh.

Mặt khác, từ $\|g\|_\infty < \varepsilon/2$ và $1 = b(0) \geq b\left(\frac{x-y}{\varepsilon^2}\right)$, ta có

$$\begin{aligned} v(z) - u(z) &\geq v(y) - u(x) + \lambda\left(1 - b\left(\frac{x-y}{\varepsilon^2}\right)\right) + g(x,y) - g(z,z) \\ &\geq v(y) - u(x) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Vậy khẳng định (b) được chứng minh.

Hơn nữa,

$$\|x-y\|\sqrt{\|p\|} < \varepsilon^2\sqrt{\frac{\lambda M}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{2}} = \varepsilon(\sqrt{\lambda M + \varepsilon^3/2}) < \varepsilon\sqrt{\lambda M + 1},$$

tương tự $\|x-y\|\sqrt{\|q\|} < \varepsilon\sqrt{\lambda M + 1}$. Với $C = \sqrt{\lambda M + 1}$, ta có kết luận (c). Lúc này khẳng định mệnh đề được chứng minh. □

Nhận xét 1.2. Kết luận a) là một phiên bản của kết quả a) trong [26], Bổ đề III.6, chúng tôi điều chỉnh để đạt được kết luận c). Chứng minh kết luận c) là của chúng tôi dựa vào ý tưởng chứng minh trong [19, Định lý 3.2].

Định lý dưới đây cho chúng ta thông tin về sự liên hệ giữa các dưới đạo hàm β-nhớt của hàm bị chặn, nửa liên tục dưới. Kết quả này được sử dụng trong việc chứng minh tính duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi.

Định lý 1.3. *Cho X là một không gian Banach với chuẩn tương đương với chuẩn β-trơn và $f_1, \cdots, f_N : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là N hàm nửa liên tục dưới, bị chặn dưới và $\lim_{\eta\to 0}\inf\{\sum_{n=1}^N f_n(y_n) : \operatorname{diam}(y_1, \cdots, y_N) \le \eta\} < +\infty$. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_n \in X, n = 1, \cdots, N$ và $x_n^* \in D_\beta^- f_n(x_n)$ thỏa mãn*

$$(i)\ \operatorname{diam}(x_1, \cdots, x_N)\max(1, \|x_1^*\|, \cdots, \|x_N^*\|) < \varepsilon;$$

$$(ii)\ \sum_{n=1}^N f_n(x_n) < \inf_{x\in X}\sum_{n=1}^N f_n(x) + \varepsilon;$$

$$(iii)\ \left\|\sum_{n=1}^N x_n^*\right\| < \varepsilon.$$

Chứng minh. Với mỗi số thực $t > 0$, ta xác định hàm $w_t : X^N \to \mathbb{R}$ cho bởi

$$w_t(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{n=1}^N f_n(x_n) + t\sum_{n,m=1}^N \|x_n - x_m\|^2.$$

Đặt $M_t = \inf w_t$, khi đó M_t đơn điệu tăng theo t và bị chặn trên bởi

$$\alpha := \lim_{\eta\to 0}\inf\left\{\sum_{n=1}^N f_n(x_n) : \operatorname{diam}(x_1, \cdots, x_N) \le \eta\right\}.$$

Thật vậy, với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, tồn tại $\eta_0 > 0$ sao cho với mọi $0 < \eta < \eta_0$ thì

$$\inf\left\{\sum_{n=1}^N f_n(x_n) : \operatorname{diam}(x_1, \cdots, x_N) \le \eta\right\} < \alpha + \varepsilon.$$

Chọn $\eta \in (0, \eta_0)$ thỏa mãn $t.N^2.\eta^2 < \varepsilon$. Khi đó, tồn tại $y_1, \cdots, y_N$ sao cho

$$\operatorname{diam}(y_1, \cdots, y_N) < \eta$$

và

$$\sum_{n=1}^N f_n(y_n) < \inf\left\{\sum_{n=1}^N f_n(x_n) : \operatorname{diam}(x_1, \cdots, x_N) \le \eta\right\} + \varepsilon.$$

Theo cách chọn η ở trên ta có $t\sum_{n,m=1}^N \|y_n - y_m\|^2 < \varepsilon$ nên

$$\sum_{n=1}^N f_n(y_n) + t\sum_{n,m=1}^N \|y_n - y_m\|^2$$

$$< \inf \left\{ \sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) : \mathrm{diam}(x_1, \cdots, x_N) \le \eta \right\} + 2\varepsilon < \alpha + 3\varepsilon.$$

Do đó $M_t < \alpha + 3\varepsilon$, mà $\varepsilon > 0$ bất kỳ nên $M_t \le \alpha$. Đặt $M = \lim_{t\to+\infty} M_t$. Trên không gian tích X^N có một chuẩn tương đương với một chuẩn β-trơn. Với mỗi $t > 0$ áp dụng nguyên lý biến phân trơn [18] cho hàm w_t tồn tại hàm ϕ_t lồi, C^1 và $x_n^t, n = 1, \cdots, N$ sao cho $w_t + \phi_t$ đạt cực tiểu địa phương tại $(x_1^t, \cdots, x_N^t)$, $\|\nabla_\beta \phi_t(x_1^t, \cdots, x_N^t)\| < \varepsilon/N$ và

$$w_t(x_1^t, \cdots, x_N^t) < \inf w_t + \frac{1}{t} \le M + \frac{1}{t}. \tag{1.5}$$

Với mỗi n, hàm

$$y \mapsto w_t(x_1^t, \cdots, x_{n-1}^t, y, x_{n+1}^t, \cdots, x_N^t) + \phi_t(x_1^t, \cdots, x_{n-1}^t, y, x_{n+1}^t, \cdots, x_N^t)$$

đạt cực tiểu địa phương tại $y = x_n^t$. Như vậy, với $n = 1, \cdots, N$ thì

$$x_{n_t}^* := -\nabla_{\beta x_n} \phi_t(x_1^t, \cdots, x_N^t) - 2t \sum_{m=1}^{N} \nabla_\beta \| \cdot \|^2 (x_n^t - x_m^t) \in D_\beta^- f_n(x_n^t). \tag{1.6}$$

Do đó

$$\sum_{n=1}^{N} x_{n_t}^* = -\sum_{n=1}^{N} \nabla_{\beta x_n} \phi_t(x_1^t, \cdots, x_N^t) - 2t \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \nabla_\beta \| \cdot \|^2 (x_n^t - x_m^t).$$

Vì $\| - \sum_{n=1}^{N} \nabla_{\beta x_n} \phi_t(x_1^t, \cdots, x_N^t)\| < \varepsilon$ và

$$\nabla_\beta \| \cdot \|^2 (x_n^t - x_m^t) + \nabla_\beta \| \cdot \|^2 (x_m^t - x_n^t) = 0$$

nên

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} x_{n_t}^* \right\| < \varepsilon.$$

Theo Định nghĩa M_t, kết hợp với (1.5) ta có

$$\begin{aligned} M_{t/2} &\le w_{t/2}(x_1^t, \cdots, x_N^t) = w_t(x_1^t, \cdots, x_N^t) - \frac{t}{2} \sum_{n,m=1}^{N} \|x_n^t - x_m^t\|^2 \\ &\le M_t + \frac{1}{t} - \frac{t}{2} \sum_{n,m=1}^{N} \|x_n^t - x_m^t\|^2. \end{aligned}$$

Do đó

$$t\sum_{n,m=1}^{N}\|x_n^t - x_m^t\|^2 \leq 2(M_t - M_{t/2} + \frac{1}{t})$$

và từ đó ta có kết luận

$$\lim_{t\to+\infty} t\sum_{n,m=1}^{N}\|x_n^t - x_m^t\|^2 = 0.$$

Suy ra

$$\lim_{t\to+\infty}\operatorname{diam}(x_1^t,\cdots,x_N^t) = 0.$$

Mặt khác ta có đánh giá $\|\nabla_\beta\|\cdot\|^2(x)\| \leq 2\|x\|$ nên từ công thức (1.6) ta có

$$\begin{aligned}\|x_{n_t}^*\| &\leq \|-\nabla_{x_n}\phi_t(x_1^t,\cdots,x_N^t)\| + 2t\left\|\sum_{m=1}^{N}\nabla\|\cdot\|^2(x_n^t - x_m^t)\right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{N} + 2t\sum_{m=1}^{N}2\|x_n^t - x_m^t\| \leq \frac{\varepsilon}{N} + 4tN\operatorname{diam}(x_1^t,\cdots,x_N^t)\end{aligned}$$

suy ra $\lim\limits_{t\to+\infty}\|x_{n_t}^*\| = 0$ do đó

$$\lim_{t\to+\infty}\operatorname{diam}(x_1^t,\cdots,x_N^t)\max(\|x_{1_t}^*\|,\cdots,\|x_{N_t}^*\|) = 0$$

và

$$\lim_{t\to+\infty}\operatorname{diam}(x_1^t,\cdots,x_N^t)\max(1,\|x_{1_t}^*\|,\cdots,\|x_{N_t}^*\|) = 0.$$

Như vậy, vì α là một chặn trên của M_t nên ta có

$$\begin{aligned}M &\leq \lim_{\eta\to 0}\inf\left\{\sum_{n=1}^{N}f_n(x_n) : \operatorname{diam}(x_1,\cdots,x_N) \leq \eta\right\} \\ &\leq \liminf_{t\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}f_n(x_n^t) = \liminf_{t\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}w_t(x_1^t,\cdots,x_N^t) \leq M\end{aligned}$$

nên

$$M = \lim_{\eta\to 0}\inf\left\{\sum_{n=1}^{N}f_n(x_n) : \operatorname{diam}(x_1,\cdots,x_N) \leq \eta\right\}.$$

Với $\eta > 0$ bất kỳ ta có

$$\inf\left\{\sum_{n=1}^{N}f_n(x_n) : \operatorname{diam}(x_1,\cdots,x_N) \leq \eta\right\} \leq \inf_{x\in X}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)$$

suy ra

$$M = \liminf_{\eta \to 0} \left\{ \sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) : \operatorname{diam}(x_1, \cdots, x_N) \le \eta \right\} \le \inf_{x \in X} \sum_{n=1}^{N} f_n(x).$$

Theo cách xác định hàm w_t ta có $\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n^t) \le w_t(x_1^t, \cdots, x_N^t)$. Từ công thức (1.5) ta có $\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n^t) < M + \frac{1}{t} \le \inf_{x \in X} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) + \frac{1}{t}$. Lấy $x_n = x_n^t$ và $x_n^* = x_{n_t}^*, n = 1, \cdots, N$ với t đủ lớn ta có kết luận của định lý. $\square$

Định lý 1.4. *Cho X là một không gian Banach với chuẩn tương đương với chuẩn β-trơn. Giả sử $\Omega \subset X$ là tập mở và $f_1, \cdots, f_N : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ là N hàm nửa liên tục dưới, bị chặn. Khi đó, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_n \in \overline{\Omega}, n = 1, \cdots, N$ và $x_n^* \in D_\beta^- f_n(x_n)$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned} &(i)\ \operatorname{diam}(x_1, \cdots, x_N) \max(1, \|x_1^*\|, \cdots, \|x_N^*\|) < \varepsilon, \\ &(ii)\ \sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) < \inf_{x \in \overline{\Omega}} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) + \varepsilon, \\ &(iii)\ \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n^* \right\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Chứng minh. Thác triển các hàm $f_n, n = 1, \cdots, N$ thành các hàm $\widetilde{f}_n$ trên X, với

$$\widetilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{nếu } x \in \overline{\Omega}, \\ \infty & \text{nếu } x \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Khi đó, ta thấy rằng $\widetilde{f}_n, n = 1, \cdots, N$ là các hàm nửa liên tục dưới và bị chặn dưới trên X. Theo Định lý 1.3, với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_n \in X, n = 1, \cdots, N$ và $x_n^* \in D_\beta^- \widetilde{f}_n(x_n)$ sao cho

$$\begin{aligned} &(i)\ \operatorname{diam}(x_1, \cdots, x_N) \max(1, \|x_1^*\|, \cdots, \|x_N^*\|) < \varepsilon, \\ &(ii)\ \sum_{n=1}^{N} \widetilde{f}_n(x_n) < \inf_{x \in X} \sum_{n=1}^{N} \widetilde{f}_n(x) + \varepsilon, \qquad (1.7) \\ &(iii)\ \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n^* \right\| < \varepsilon \end{aligned}$$

được thỏa mãn. Vì $\inf_{x\in X}\sum_{n=1}^{N}\widetilde{f}_n(x) < \infty$ nên từ công thức (1.7) ta có $x_n \in \overline{\Omega}, n = 1, \cdots, N$. Khi đó (1.7) trở thành

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) < \inf_{x\in\overline{\Omega}} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) + \varepsilon,$$

vậy Định lý 1.4 được chứng minh. □

Kết luận chương 1

Trong chương 1 này chúng tôi tập trung một số vấn đề chính:

1) Đưa ra một số nhận xét về β-khả vi, mối quan hệ giữa các β-khả vi khi các borno β có mối quan hệ bao hàm. Đặc biệt là đưa ra mối quan hệ giữa các đạo hàm thường gặp như: Fréchet, Hadamard yếu, Hadamard, Gâteaux. Bên cạnh đó trong nội dung của chương cũng đưa ra các ví dụ cho thấy sự khác nhau giữa các đạo hàm Fréchet, Hadamard yếu, Hadamard, Gâteaux. Tương ứng với khái niệm β-khả vi, ta có khái niệm dưới vi phân β-nhớt, trên vi phân β-nhớt. Trong chương này cũng đưa ra một số nhận xét về tính chất dưới vi phân thường gặp và mối quan hệ của dưới vi phân thường gặp. Chỉ ra một số trường hợp đặc biệt mà tập dưới vi phân của các hàm bằng nhau.

2) Chứng minh được các kết quả về quy tắc tổng mờ của β-dưới vi phân.

Chương 2

NGHIỆM β-NHỚT CỦA PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON-JACOBI TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Nội dung của chương này là chứng minh tính duy nhất của nghiệm β-nhớt (chúng yếu hơn nghiệm Fréchet-nhớt) cho phương trình Hamilton-Jacobi dạng $u + H(x, Du) = 0$ và $u + H(x, u, Du) = 0$ trên một tập $\Omega \subset X$ bằng kỹ thuật gấp đôi số biến. Kết quả này được chỉ ra trên một không gian Banach X có một chuẩn β-trơn hoặc chuẩn tương đương với một chuẩn β-trơn mà không sử dụng giả thiết Radon-Nikodym. Trong chương này chúng tôi cũng chứng minh sự tồn tại và tính ổn định của nghiệm. Cụ thể, theo phương pháp Perron (được đề xuất bởi Ishii, H. trong [34]), chúng tôi chỉ ra rằng trong một số điều kiện nhất định phương trình có dạng $u + H(x, u, Du) = 0$ có nghiệm β-nhớt ổn định. Các kết quả trong chương được viết dựa trên bài báo [1] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án. Trong luận án này, kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán Dirichlet cần thêm giả thiết tồn tại nghiệm dưới và nghiệm trên bằng nhau trên biên (so với định lý tồn tại nghiệm trong bài báo [1]). Đồng thời chúng tôi chứng minh thêm một kết quả về sự tồn tại nghiệm của phương trình Hamilton-Jacobi (Định lý 2.6).

2.1. Tính duy nhất của nghiệm β-nhớt

Cho X là một không gian Banach thực với chuẩn β-trơn $\|\cdot\|$ (xem nội dung cụ thể trong mục sau), $\Omega \subset X$ là một tập con mở. Chúng ta nghiên cứu sự tồn tại, tính duy nhất, tính ổn định của nghiệm β-nhớt cho phương trình Hamilton-Jacobi sau

$$u + H(x, u, Du) = 0 \text{ trên } \Omega, \tag{2.1}$$

với điều kiện biên (trong trường hợp $\Omega \neq X$)

$$u = \varphi \text{ trên } \partial\Omega. \tag{2.2}$$

Ở đây $u : \Omega \to \mathbb{R}$ và $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$; $H : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times X^*_\beta \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục, trong đó X^*_β là không gian đối ngẫu của không gian Banach X, với tôpô τ_β (xem mục 1.1.).

2.1.1. Nghiệm β-nhớt

Định nghĩa 2.1 (Nghiệm β-nhớt của phương trình)**.** Một hàm $u : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là

(i) một *nghiệm dưới β-nhớt của* (2.1) nếu u là nửa liên tục trên và với mọi $x \in \Omega$, $x^* \in D^+_\beta u(x)$, $u(x) + H(x, u(x), x^*) \leq 0$;

(ii) một *nghiệm trên β-nhớt của* (2.1) nếu u là nửa liên tục dưới và với mọi $x \in \Omega$, $x^* \in D^-_\beta u(x)$, $u(x) + H(x, u(x), x^*) \geq 0$;

(iii) một *nghiệm β-nhớt* của (2.1) nếu u vừa là một nghiệm dưới β-nhớt vừa là một nghiệm trên β-nhớt.

Để thuận tiện, sau đây chúng tôi sử dụng các cụm từ "nghiệm β-nhớt của $u+H(x, u, Du) \leq 0$" và "nghiệm dưới β-nhớt của $u+H(x, u, Du) = 0$" thay thế cho nhau. Tương tự với cụm từ "nghiệm β-nhớt của $u+H(x, u, Du) \geq 0$" và "nghiệm trên β-nhớt của $u + H(x, u, Du) = 0$".

Ví dụ 2.1. Cho $X = \mathbb{R}$ với Gâteaux borno-G. Khi đó, hàm $u = 1 - |x|$ là một nghiệm G-nhớt của

$$u(x) + H(x, u, Du) = 0 \text{ trên } \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

trong đó $H(x, u, Du) = -u + |Du| - 1$.

Thật vậy, với $x > 0$ ta có $u = 1 - x$. Do đó, $D^-_G u(x) = D^+_G u(x) = \{-1\}$. Với $x < 0$, ta có $u = 1 + x$, nên $D^-_G u(x) = D^+_G u(x) = \{1\}$. Trong mỗi trường hợp thì (2.3) thỏa mãn.
Tại $x = 0$, ta có thể chỉ ra rằng $D^-_G u(0) = \emptyset, D^+_G u(0) = [-1, 1]$. Theo định nghĩa $u = 1-|x|$ là một nghiệm G-nhớt của (2.3). Ta thấy rằng hàm u không khả vi tại $x = 0$ nên nó không phải là nghiệm cổ điển của (2.3).

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng có một phương trình tồn tại nghiệm F-nhớt nhưng không tồn tại nghiệm G-nhớt, ví dụ này được chúng tôi lấy ý tưởng trong [19, Ví dụ 3.6].

Ví dụ 2.2. Xét không gian $X = l^1$. Trên không gian này hàm chuẩn $\|\cdot\|$ khả vi Gâteaux tại các điểm $x = (x_n) \in l^1$ mà $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ và không khả vi Fréchet tại bất kì điểm nào (xem Ví dụ 1.4). Xét phương trình

$$u(x) + H(x, u, Du) = 0 \text{ trên } X \tag{2.4}$$

trong đó hàm $H(x, u, Du) = 1 - u + |Du|$.

Hàm $u(x) = \|x\|$ không là nghiệm dưới G-nhớt của (2.4) vì tại các điểm x mà ở đó hàm u khả vi thì $D^+_G u(x) = \{Du(x)\}$, khi đó bất đẳng thức cho nghiệm dưới G-nhớt của (2.4) trở thành $1 + |Du| \leq 0$ (vô lí). Do đó nó không là nghiệm G-nhớt. Nhưng hàm $u(x) = \|x\|$ lại là nghiệm F-nhớt của (2.4). Thật vậy, dễ thấy u là nghiệm trên F-nhớt. Hơn nữa, do u là hàm lồi và không khả vi Fréchet tại bất kì điểm nào, nên $D^+_F u(x) = \emptyset$. Do vậy u cũng là nghiệm dưới F-nhớt của (2.4).

Định nghĩa 2.2 (Nghiệm β-nhớt của bài toán Dirichlet)**.** Một hàm $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ được gọi là một *nghiệm dưới* (tương ứng, *nghiệm trên, nghiệm*) *β-nhớt* của bài toán (2.1)-(2.2) nếu u là một nghiệm dưới β-nhớt (tương ứng, nghiệm trên, nghiệm) của phương trình (2.1) và $u \leq \varphi$ (tương ứng $u \geq \varphi, u = \varphi$) trên $\partial\Omega$.

Trước hết, chúng ta nhắc lại một số kết quả bổ trợ. Một hàm $m : [0, \infty) \to [0, \infty)$ được gọi là một *môđun* nếu nó liên tục, không âm, không giảm, dưới cộng tính trên $[0, \infty)$ và $m(0) = 0$. Ta cũng nói rằng hàm $\sigma : [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ là *môđun địa phương* nếu hàm $\sigma(r, R)$ là một môđun với mỗi $R \geq 0$ và $\sigma(r, R)$ liên tục và không giảm theo cả hai biến.

Nhận xét 2.1. Nếu hàm $m : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ là một môđun thì:
a) Tồn tại các số thực A, B sao cho $m(x) \leq A + Bx$ với mọi $x \in [0, +\infty)$. Thật vậy, với mọi $x \in [0, +\infty)$, lấy $[x]$ là phần nguyên của x và A là giá trị lớn nhất của m trên $[0, 1]$ khi đó $m(x - [x]) \leq A$. Do đó

$$\begin{aligned} m(x) &= m(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{[x] \text{ số}} + x - [x]) \\ &\leq [x]m(1) + m(x - [x]) \leq m(1)x + A = A + Bx, \end{aligned}$$

trong đó $B = m(1)$.

b) Với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số thực $C_\varepsilon > 0$ sao cho

$$m(x) \leq \varepsilon + C_\varepsilon x \quad \text{với mọi} \quad x \in [0, +\infty).$$

Thật vậy, do m là liên tục tại 0, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $x \in [0, \delta)$ kéo theo $m(x) < \varepsilon$. Với mọi $x \in [0, +\infty)$, lấy n là số tự nhiên thỏa mãn $n \leq \frac{x}{\delta} < n+1$. Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} m(x) &= m(\underbrace{\delta + \delta + \cdots + \delta}_{n \text{ số}} + x - n\delta) \\ &\leq nm(\delta) + m(x - n\delta) \leq m(\delta)\frac{x}{\delta} + \varepsilon = \varepsilon + C_\varepsilon x, \end{aligned}$$

trong đó $C_\varepsilon = \frac{m(\delta)}{\delta}$.

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra các giả thiết về hàm H.

(H0) Tồn tại một hàm liên tục $w_R : X^*_\beta \to \mathbb{R}$ với mỗi $R > 0$, thỏa mãn

$$|H(x, r, p) - H(x, r, q)| \leq w_R(p - q)$$

với mọi $x \in X$, $p, q \in X^*_\beta$ và $r \in \mathbb{R}$ sao cho $\|x\|, \|q\|, \|p\| \leq R$.

(H1) Với mỗi $(x, p) \in X \times X^*_\beta$, $r \mapsto H(x, r, p)$ là không giảm.

(H1)* Với mỗi $(x, p) \in X \times X^*_\beta$, $r \mapsto H(x, r, p)$ là liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz $L_H < 1$.

(H2) Tồn tại một môđun địa phương σ_H sao cho

$$H(x, r, p) - H(x, r, p + q) \leq \sigma_H(\|q\|, \|p\| + \|q\|)$$

với mọi $r \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ và $p, q \in X^*_\beta$.

(H3) Tồn tại một môđun m_H sao cho

$$\begin{aligned} H(y, r, \lambda(\nabla_\beta\|.\|^2)(x - y)) - &H(x, r, \lambda(\nabla_\beta\|.\|^2)(x - y)) \\ &\leq m_H(\lambda\|x - y\|^2 + \|x - y\|) \end{aligned}$$

với mọi $x, y \in \Omega$ với $x \neq y$, $r \in \mathbb{R}$ và $\lambda \geq 0$.

Ví dụ 2.3. Giả sử rằng X là một không gian Banach với chuẩn β-trơn. Cho $b : X \to X$ là một hàm bị chặn và liên tục Lipschitz. Xét hàm:

$$H(x,r,p) = \langle p, b(x)\rangle \text{ và } H^*(x,r,p) = -\frac{1}{2}r + \langle p, b(x)\rangle.$$

Ta có thể chỉ ra rằng hàm H thỏa mãn giả thiết (H0), (H1), (H2) và (H3). Cụ thể, nếu b là bị chặn trên X bởi hằng số K và hằng số Lipschitz là L_b, thì

$$\begin{aligned}|H(x,r,p) - H(x,r,q)| &= |\langle p-q, b(x)\rangle| \le \|p-q\||b(x)| \\ &\le K\|p-q\| =: w_R(p-q)\end{aligned}$$

với mọi $x \in X$, $p, q \in X^*, r \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\|x\|, \|q\|, \|p\| \le R$. Như vậy, (H0) thỏa mãn. Hơn nữa (H1) và (H2) là hiển nhiên. Ta cũng có

$$\begin{aligned}H(y,r,\lambda(\nabla_\beta\|.\|^2)(x-y)) &- H(x,r,\lambda(\nabla_\beta\|.\|^2)(x-y)) \\ &= \langle \lambda(\nabla_\beta\|.\|^2)(x-y), b(y)-b(x)\rangle \\ &\le 4KL_b\lambda\|x-y\|^2 \\ &\le 4KL_b(\lambda\|x-y\|^2 + \|x-y\|) \\ &=: m_H(\lambda\|x-y\|^2 + \|x-y\|).\end{aligned}$$

Do đó, (H3) được thỏa mãn.

Tương tự, hàm H^* thỏa mãn giả thiết (H0), (H2), (H3). Cũng để ý rằng hàm H^* không thỏa mãn (H1) trong khi đó nó thỏa mãn $(H1)^*$.

2.1.2. Nghiệm bị chặn

Định lý 2.1. *Cho X là một không gian Banach thỏa mãn giả thiết (H_β^*) (ở trang 26) và u, v là hai hàm bị chặn trên X sao cho u là hàm nửa liên tục trên và v là hàm nửa liên tục dưới. Giả sử rằng $F(x,u,Du) = u + H(x,Du)$ và $H : X \times X_\beta^* \to \mathbb{R}$ thỏa mãn giả thiết sau:*
(A) với mọi $x, y \in X$ và $x^*, y^* \in X_\beta^*$,

$$|H(x,x^*) - H(y,y^*)| \le w(x-y, x^*-y^*) + K\max(\sqrt{\|x^*\|}, \sqrt{\|y^*\|})\|x-y\|,$$

trong đó K là một hằng số và $w : X \times X_\beta^* \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục và $w(0,0) = 0$.

Nếu u là một nghiệm dưới β-nhớt, v là một nghiệm trên β-nhớt của phương trình

$$F(x, u, Du) = 0 \tag{2.5}$$

thì $u \leq v$.

Chứng minh.

Lấy $\varepsilon > 0$ là một số dương bất kỳ. Vì hàm w liên tục tại $(0, 0)$ và theo giả thiết (A), tồn tại $\eta \in (0, \varepsilon)$ và một lân cận V_β của 0 trong X_β^* sao cho với mọi $x, y \in X$, $\|x - y\| < \eta$ và $x^*, y^* \in X_\beta^*$, $x^* - y^* \in V_\beta$ ta có

$$|H(x, x^*) - H(y, y^*)| < \varepsilon + K \max(\sqrt{\|x^*\|}, \sqrt{\|y^*\|})\|x - y\|. \tag{2.6}$$

Không mất tính tổng quát ta có thể chọn η sao cho $\sqrt{\eta} < \varepsilon$.

Theo Nhận xét 1.1, trên X^*, tôpô Fréchet τ_F là tôpô mạnh nhất trong lớp tất cả các tôpô τ_β. Do đó V_β là một τ_F-lân cận của 0. Như vậy, tồn tại $r > 0$ (ta có thể giả sử rằng $r > \sqrt{\eta}$, vì có thể chọn η nhỏ) sao cho $B(0, r) \subset V_\beta$.

Hàm u, v thỏa mãn giả thiết của Mệnh đề 1.5, do đó tồn tại $x, y \in X, p \in D_\beta^+ u(x), q \in D_\beta^- v(y)$ sao cho $\|x - y\| < \eta$, $\|p - q\| < \sqrt{\eta} < r$, với mọi $z \in X$ thì $v(z) - u(z) \geq v(y) - u(x) - \sqrt{\eta} \geq v(y) - u(x) - \varepsilon$ và $\|x - y\|\sqrt{\|p\|} < C\sqrt{\eta} < C\varepsilon$, $\|x - y\|\sqrt{\|q\|} < C\sqrt{\eta} < C\varepsilon$ (với $C > 0$ là hằng số được xác định trong Mệnh đề 1.5).

Từ u là một nghiệm dưới β-nhớt và v là một nghiệm trên β-nhớt của phương trình (2.5), nên

$$u(x) + H(x, p) \leq 0, \quad v(y) + H(y, q) \geq 0.$$

Do đó với mọi $z \in X$ ta có

$$\begin{aligned} v(z) - u(z) &\geq v(y) - u(x) - \varepsilon \geq H(x, p) - H(y, q) - \varepsilon \\ &\geq -(\varepsilon + K \max(\sqrt{\|x^*\|}, \sqrt{\|y^*\|})\|x - y\|) - \varepsilon, \text{ theo } (2.6) \\ &\geq -(2 + KC)\varepsilon. \end{aligned}$$

Từ ε nhỏ bất kỳ, ta có $v \geq u$. □

Hệ quả 2.1. *Dưới giả thiết của Định lý 2.1, nghiệm β-nhớt trong lớp hàm liên tục và bị chặn của phương trình $u + H(x, Du) = 0$ là duy nhất.*

Chứng minh.

Nếu u, v là hai nghiệm β-nhớt của phương trình $u + H(x, Du) = 0$, khi đó u là nghiệm dưới β-nhớt, v là nghiệm trên β-nhớt. Từ Định lý 2.1 ta có $u \leq v$. Tương tự, v là nghiệm dưới β-nhớt và u là nghiệm trên β-nhớt nên $v \leq u$. Từ đó ta có kết luận của hệ quả. □

Nhận xét 2.2. Tính duy nhất của nghiệm β-nhớt ở đây là sự mở rộng của [19, Định lý III.2], nghiệm của chúng tôi là hàm nằm trong lớp hàm liên tục và bị chặn còn ở trong [19] thì nghiệm nằm trong lớp hàm liên tục đều và bị chặn.

Trong kết quả trên điều kiện về hàm H còn xuất hiện căn bậc hai của $\|x^*\|$, để đạt được kết quả tính duy nhất nghiệm β-nhớt trong lớp hàm bị chặn ta có định lý dưới đây, tuy nhiên một trong những điều kiện cần có đó là không gian Banach X phải có chuẩn β-trơn hoặc chuẩn tương đương với một chuẩn β-trơn.

Định lý 2.2. *Cho X là một không gian Banach với chuẩn tương đương với một chuẩn β-trơn. Xét $F(x, u, Du) = u + H(x, Du)$ với $H : X \times X^*_\beta \to \mathbb{R}$ thỏa mãn giả thiết:*
(B) với mọi $x, y \in X$ và $x^*, y^* \in X^*_\beta$,

$$|H(x, x^*) - H(y, y^*)| \leq w(x - y, x^* - y^*) + K \max(\|x^*\|, \|y^*\|)\|x - y\|,$$

trong đó K là hằng số dương và $w : X \times X^*_\beta \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục với $w(0, 0) = 0$.
Cho u, v là hai hàm bị chặn sao cho u nửa liên tục trên và v nửa liên tục dưới. Nếu u là nghiệm dưới β-nhớt và v là nghiệm trên β-nhớt của phương trình $F(x, u, Du) = 0$ thì $u \leq v$.

Chứng minh. Lấy ε là hằng số dương bất kỳ. Theo giả thiết (B) tồn tại $\eta \in (0, \varepsilon)$ và một lân cận V_β của 0 trong X^* sao cho với $\|x_1 - x_2\| < 2\eta$ và $x_1^* - x_2^* \in V_\beta$ thì

$$|H(x_1, x_1^*) - H(x_2, x_2^*)| \leq \varepsilon + K \max(\|x^*\|, \|y^*\|)\|x - y\|.$$

Trên X^* tôpô Fréchet τ_F là tôpô mạnh nhất trong các tôpô τ_β nên V_β là một τ_F-lân cận của 0. Do vậy, tồn tại $r > 0$ (ta có thể giả thiết $r > \eta$, nếu không thì ta giảm η) sao cho $B(0, r) \subset V_\beta$.

Áp dụng Định lý 1.3 cho hàm $f_1 = v, f_2 = -u$ tồn tại $x_1^* \in D_\beta^- v(x_1)$ và $x_2^* \in D_\beta^+ u(x_2)$ thỏa mãn

(i) $\|x_1^*\|.\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$ và $\|x_2^*\|.\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$;

(ii) $x_1^* - x_2^* \in B(0, r)$;

(iii) $v(x_1) - u(x_2) < \inf_X (v - u) + \varepsilon$.

Vì u là nghiệm dưới β-nhớt nên ta có

$$F(x_2, u(x_2), x_2^*) = u(x_2) + H(x_2, x_2^*) \leq 0$$

và v là nghiệm trên β-nhớt nên

$$F(x_1, v(x_1), x_1^*) = v(x_1) + H(x_1, x_1^*) \geq 0.$$

Do đó, với $\|x_1 - x_2\| < 2\eta$ và $x_1^* - x_2^* \in V_\beta$,

$$\begin{aligned} \inf_X (v - u) &> v(x_1) - u(x_2) - \varepsilon \\ &\geq H(x_2, x_2^*) - H(x_1, x_1^*) - \varepsilon \geq -\varepsilon(2 + K). \end{aligned}$$

Vì $\varepsilon > 0$ bất kỳ nên $\inf_X (v - u) \geq 0$ hay $v \geq u$. □

Chứng minh tương tự Hệ quả 2.1 ta được kết quả sau:

Hệ quả 2.2. *Dưới các giả thiết của Định lý 2.2, nghiệm nhớt trong lớp hàm liên tục, bị chặn của phương trình $F(x, u, Du) = 0$ là duy nhất.*

Ví dụ sau chỉ ra một phương trình mà điều kiện (B) của Định lý 2.2 không thỏa mãn và phương trình không có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 2.4. Xét $X = \mathbb{R}^2$ và với $x = (x_1, x_2); p = (p_1, p_2) \in X$ hàm Hamilton được xác định $H(x, p) = -\|p\|^2 = -p_1^2 - p_2^2$. Khi đó phương trình $u + H(x, Du) = 0$ có hai nghiệm cổ điển là $u \equiv 0$ và hàm $u = \frac{1}{4}\|x\|^2$. Giả thiết (B) không thỏa mãn vì ta có thể thấy với $x, y, p, q \in X$ sao cho $\|x - y\|$ và $\|p - q\|$ dần đến 0 thì $|H(x, p) - H(y, q)|$ dần đến 0. Tuy nhiên điều này là không đúng. Thật vậy với $\delta > 0$, lấy $p = (\delta + \frac{1}{\delta}, 0); q = (\frac{1}{\delta}, 0)$ thì $|H(x, p) - H(y, q)| > 2$.

Định lý sau là một kết quả quan trọng trong việc chứng minh tính duy nhất nghiệm của phương trình Hamilton-Jacobi trên một tập mở $\Omega \subset X$. Trong kết quả này chúng tôi cần dùng tới tính chất liên tục đều của nghiệm β-nhớt.

Định lý 2.3. *Cho X là một không gian Banach với chuẩn tương đương với một chuẩn β-trơn. $\Omega \subset X$ là một tập mở.*
Xét $F(x, u, Du) = u + H(x, Du)$ với $H : X \times X^*_\beta \to \mathbb{R}$ thỏa mãn giả thiết:
(C) với mọi $x, y \in X$ và $x^*, y^* \in X^*_\beta$,

$$|H(x, x^*) - H(y, y^*)| \leq w(x - y, x^* - y^*) + K \max(\|x^*\|, \|y^*\|)\|x - y\|,$$

trong đó K là hằng số dương và $w : X \times X^*_\beta \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục với $w(0, 0) = 0$.

Giả sử u, v là hai hàm xác định, bị chặn và liên tục đều trên $\overline{\Omega}$. Nếu u là nghiệm dưới β-nhớt và v là nghiệm trên β-nhớt của phương trình $F(x, u, Du) = 0$ và $u \leq v$ trên $\partial\Omega$ thì $u \leq v$ trên $\overline{\Omega}$.

Chứng minh. Lấy ε là hằng số dương bất kỳ. Theo giả thiết (C) tồn tại $\eta \in (0, \varepsilon)$ và một lân cận V_β của 0 trong X^*_β sao cho với $\|x_1 - x_2\| < 2\eta$ và $x_1^* - x_2^* \in V_\beta$ thì

$$|H(x_1, x_1^*) - H(x_2, x_2^*)| < \varepsilon + K \max(\|x_1^*\|, \|x_2^*\|)\|x_1 - x_2\|.$$

Trên X^*, tôpô Fréchet τ_F là tôpô mạnh nhất trong các tôpô τ_β, nên V_β là một τ_F-lân cận của 0. Do vậy, tồn tại $r > 0$ (ta có thể giả thiết $r > \eta$, nếu không thì ta giảm η) sao cho $B(0, r) \subset V_\beta$.

Áp dụng Định lý 1.4 cho hàm $f_1 = v, f_2 = -u$ tồn tại $x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$, $x_1^* \in D^-_\beta v(x_1)$ và $x_2^* \in D^+_\beta u(x_2)$ thỏa mãn

(i) $\|x_1^*\|.\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$ và $\|x_2^*\|.\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$;

(ii) $x_1^* - x_2^* \in B(0, r)$;

(iii) $v(x_1) - u(x_2) < \inf\limits_{\overline{\Omega}}(v - u) + \varepsilon$.

Nếu $x_1 \in \partial\Omega$ thì $v(x_1) - u(x_2) \geq u(x_1) - u(x_2)$, do tính liên tục đều của hàm u nên ta có thể suy ra $u(x_1) - u(x_2) \geq -\varepsilon$.
Nếu $x_2 \in \partial\Omega$ thì $v(x_1) - u(x_2) \geq v(x_1) - v(x_2)$, do tính liên tục đều của hàm v nên ta có thể suy ra $v(x_1) - v(x_2) \geq -\varepsilon$.
Trong cả hai trường hợp trên ta đều có được $\inf_{\overline{\Omega}}(v - u) > -2\varepsilon$. Vì $\varepsilon > 0$ bất kỳ nên $\inf_{\overline{\Omega}}(v - u) \geq 0$.

Nếu $x_1, x_2 \in \Omega$ thì do u là nghiệm dưới β-nhớt nên ta có

$$F(x_2, u(x_2), x_2^*) = u(x_2) + H(x_2, x_2^*) \leq 0$$

và v là nghiệm trên β-nhớt nên ta có

$$F(x_1, v(x_1), x_1^*) = v(x_1) + H(x_1, x_1^*) \geq 0.$$

Do đó, với $\|x_1 - x_2\| < 2\eta$ và $x_1^* - x_2^* \in V_\beta$,

$$\begin{aligned}\inf_{\overline{\Omega}}(v - u) &> v(x_1) - u(x_2) - \varepsilon \geq H(x_2, x_2^*) - H(x_1, x_1^*) - \varepsilon \\ &\geq -(\varepsilon + K\max(\|x_1^*\|, \|x_2^*\|)\|x_1 - x_2\|) - \varepsilon \geq -\varepsilon(2 + K).\end{aligned}$$

Vì $\varepsilon > 0$ bất kỳ nên $\inf_{\overline{\Omega}}(v - u) \geq 0$ hay $v \geq u$. □

Hệ quả 2.3. *Dưới các giả thiết của Định lý 2.3, u, v là hai hàm liên tục đều, bị chặn trên $\overline{\Omega}$ sao cho $u = v$ trên $\partial\Omega$. Nếu u, v là hai nghiệm β-nhớt của phương trình $F(x, u, Du) = 0$ thì $u = v$ trên $\overline{\Omega}$.*

Chứng minh. Nếu u, v là hai nghiệm β-nhớt của phương trình $F(x, u, Du) = 0$ khi đó:
u là nghiệm dưới β-nhớt, v là nghiệm trên β-nhớt nên theo Định lý 2.3 ta có $u \leq v$ trên $\overline{\Omega}$.
Tương tự v là nghiệm dưới β-nhớt, u là nghiệm trên β-nhớt nên theo Định lý 2.3 ta có $v \leq u$ trên $\overline{\Omega}$. Từ đó ta có $u = v$ trên $\overline{\Omega}$. □

Như vậy ta đã chứng minh được tính duy nhất nghiệm β-nhớt cho phương trình $F(x, u, Du) = 0$ trên tập mở Ω trong lớp hàm liên tục đều và bị chặn.

2.1.3. Nghiệm không bị chặn

Trên cơ sở những khái niệm cơ bản ở trên, chúng tôi đưa ra những kết quả chính về tính duy nhất của nghiệm β-nhớt của (2.1).

Định lý 2.4. *Cho X là một không gian Banach với chuẩn β-trơn và Ω là một tập con mở của X. Giả sử rằng hàm H thỏa mãn giả thiết (H0), (H1) (tương ứng (H1)*), (H2), (H3) và $\widehat{H}$ thỏa mãn (H0). Lấy $u, v \in C(\overline{\Omega})$ tương ứng là nghiệm β-nhớt của bài toán*

$$u + H(x, u, Du) \leq 0 \text{ và } v + \widehat{H}(x, v, Dv) \geq 0 \text{ trên } \Omega, \tag{2.7}$$

và giả sử rằng tồn tại một môđun m sao cho

$$|u(x) - u(y)| + |v(x) - v(y)| \leq m(\|x - y\|) \text{ nếu } L(x, y) \subset \Omega. \tag{2.8}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} &u(x) - v(x) \leq \sup_{\partial\Omega}(u - v)^+ + \sup_{\Omega\times\mathbb{R}\times X^*}(\widehat{H} - H)^+, \\ \Big(\text{t.ư.} \quad &u(x) - v(x) \leq \sup_{\partial\Omega}(u - v)^+ + \frac{1}{1 - L_H}\sup_{\Omega\times\mathbb{R}\times X^*}(\widehat{H} - H)^+\Big), \end{aligned} \tag{2.9}$$

với mọi $x \in \Omega$.

Nói riêng, khi $\Omega = X$, ta có được công thức (2.9) trong đó số hạng $\sup_{\partial\Omega}(u - v)^+$ trong vế phải được thay bởi 0.

Chứng minh. **Chứng minh trường hợp $\Omega \neq X$**

Kết luận của định lý trong trường hợp này là dễ thấy nếu $\sup_{\partial\Omega}(u - v)^+ = \infty$. Khi đó, ta giả sử rằng $\sup_{\partial\Omega}(u - v)^+ < \infty$.

Để tiếp tục chứng minh, trước hết chúng tôi đưa ra bổ đề sau.

Bổ đề 2.1. *Giả sử $\Omega \subset X$ là một tập con thực sự của X tức là $\Omega \neq X$. Ta ký hiệu $\rho(x)$ là khoảng cách từ x đến $\partial\Omega$. Giả sử $u, v \in C(\overline{\Omega})$ là các hàm thỏa mãn điều kiện (2.8). Khi đó, với mọi $x, y \in \Omega$,*

$$u(x) - v(y) \leq \sup_{\partial\Omega}(u - v)^+ + m(\min(\rho(x), \rho(y))) + m(\|x - y\|). \tag{2.10}$$

Nói riêng, khi $y = x$ thì

$$u(x) - v(x) \leq \sup_{\partial\Omega}(u - v)^+ + m(\rho(x)), \ x \in \Omega. \tag{2.11}$$

Chứng minh. Giả sử $\rho(x) < \rho(y)$. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x^* \in \partial\Omega$ sao cho đoạn thẳng nối x và x^* là chứa trong Ω và $\|x - x^*\| < \rho(x) + \varepsilon$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta chọn $x_n = x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x^* - x)$. Khi đó, $x_n \in \Omega$ và $x_n \to x^*$ khi $n \to \infty$. Ngoài ra,

$$\begin{aligned} u(x) - v(y) &= [u(x) - u(x_n)] + [v(x_n) - v(x)] + [u(x_n) - v(x_n)] \\ &\qquad + [v(x) - v(y)] \\ &\leq m(\|x - x_n\|) + u(x_n) - v(x_n) + m(\|x - y\|). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.12), ta có

$$u(x) - v(y) \leq m(\|x - x^*\|) + u(x^*) - v(x^*) + m(\|x - y\|).$$

Hơn nữa, $u(x^*) - v(x^*) \leq \sup_{\partial\Omega}(u - v)^+$ và $m(\|x - x^*\|) \leq m(\rho(x) + \varepsilon)$. Như vậy,

$$u(x) - v(y) \leq m(\rho(x) + \varepsilon) + \sup_{\partial\Omega}(u - v)^+ + m(\|x - y\|). \tag{2.13}$$

Bất đẳng thức (2.13) đúng với mọi $\varepsilon > 0$. Bằng cách cho $\varepsilon \to 0$ và sử dụng tính liên tục của hàm m tại $\rho(x)$, ta có

$$u(x) - v(y) \leq \sup_{\partial\Omega}(u - v)^+ + m(\rho(x)) + m(\|x - y\|).$$

Nếu $\rho(x) \geq \rho(y)$, thực hiện biến đổi tương tự ta cũng có

$$u(x) - v(y) \leq \sup_{\partial\Omega}(u - v)^+ + m(\rho(y)) + m(\|x - y\|).$$

Như vậy, (2.10) được chứng minh. $\square$

Theo Bổ đề 2.1, đánh giá (2.11) và hàm $\rho(x)$ tăng không quá hàm tuyến tính, khi đó tồn tại các hằng số $A, B \geq 0$ sao cho

$$u(x) - v(x) \leq A + B\|x\|, \ x \in \Omega. \tag{2.14}$$

Tiếp theo, ta lấy $\zeta \in C^1(\mathbb{R})$ thỏa mãn

$$\zeta(r) = 0 \text{ với } r \leq 1, \quad \zeta(r) = r - 2 \text{ với } r \geq 3 \quad \text{ và } 0 \leq \zeta' \leq 1.$$

Với $a, \varepsilon, \lambda, R > 0$, xét hàm

$$\Phi(x,y) = u(x) - v(y) - \left(\frac{\|x-y\|^2}{\varepsilon} + \lambda\zeta(\|x\| - R)\right) \tag{2.15}$$

trên tập

$$\Delta(a) = \big\{(x,y) \in \Omega \times \Omega : \rho(x), \rho(y) > a \ \text{ và } \ \|x-y\| < a\big\}.$$

Ta kết luận rằng, với B được xác định trong (2.14), nếu

$$\lambda > B, \quad \varepsilon \le a^2/(m(a)+1) \quad \text{ và } \quad R > 1,$$

thì

$$\begin{aligned} &\Phi(x,y) \le \sup_{\partial\Omega}(u-v)^+ + 2m(a) + C(a,\lambda,\varepsilon) \\ \Big(\text{t.ư.} \quad &\Phi(x,y) \le \sup_{\partial\Omega}(u-v)^+ + 2m(a) + \frac{1}{1-L_H}C(a,\lambda,\varepsilon)\Big) \end{aligned} \tag{2.16}$$

trên $\Delta(a)$, trong đó

$$\begin{aligned} C(a,\lambda,\varepsilon) &= m_H(2m(a) + (\varepsilon m(a))^{1/2}) + \sigma_H(\lambda, 2(m(a)/\varepsilon)^{1/2} + \lambda) \\ &+ \sup\big\{(\widehat{H} - H)^+(z,r,p) : (z,r,p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times X^* \text{ và } \|p\| \le 2(m(a)/\varepsilon)^{1/2}\big\}. \end{aligned}$$

Chứng minh (2.16) được thực hiện trong 2 bước.

Bước 1. Chứng minh (2.16) trong trường hợp Φ đạt cực đại trên $\Delta(a)$ tại điểm (x_0, y_0).

Trong trường hợp này, ta cố định $y = y_0$. Hàm

$$x \mapsto u(x) - \left(\frac{\|x-y_0\|^2}{\varepsilon} + \lambda\zeta(\|x\| - R)\right)$$

đạt cực đại địa phương tại $x = x_0$. Do đó

$$\frac{1}{\varepsilon}(\nabla_\beta\|.\|^2)(x_0 - y_0) + \lambda\zeta'(\|x_0\| - R).(\nabla_\beta\|.\|)(x_0) \in D^+_\beta u(x_0).$$

Tương tự, khi ta cố định $x = x_0$, hàm v là dưới khả vi β-nhớt tại y_0 và

$$\frac{1}{\varepsilon}(\nabla_\beta\|.\|^2)(x_0 - y_0) \in D^-_\beta v(y_0).$$

Từ u, v là nghiệm β-nhớt của (2.7), ta có

$$u(x_0) + H(x_0, u(x_0), p_\varepsilon + \lambda q) \leq 0, \tag{2.17}$$

$$v(y_0) + \widehat{H}(y_0, v(y_0), p_\varepsilon) \geq 0, \tag{2.18}$$

trong đó $p_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(\nabla_\beta \|.\|^2)(x_0 - y_0), q = \zeta'(\|x_0\| - R).(\nabla_\beta \|.\|)(x_0)$.

Vì hàm Φ đạt giá trị lớn nhất tại (x_0, y_0) nên với mọi $(x, y) \in \Delta(a)$, thì

$$\Phi(x, y) \leq \Phi(x_0, y_0) \leq u(x_0) - v(y_0). \tag{2.19}$$

Nếu $u(x_0) - v(y_0) \leq 0$, thì $\Phi(x, y) \leq 0$ trên $\Delta(a)$. Điều này dẫn đến (2.16) vì vế phải là không âm.

Nếu $u(x_0) - v(y_0) > 0$, thì $u(x_0) > v(y_0)$. Từ (2.17) và (2.18), ta có

$$u(x_0) - v(y_0) \leq \widehat{H}(y_0, v(y_0), p_\varepsilon) - H(x_0, u(x_0), p_\varepsilon + \lambda q). \tag{2.20}$$

Ngoài ra, dùng (H1) (tương ứng (H1)*) ta có

$$\begin{aligned}
&\widehat{H}(y_0, v(y_0), p_\varepsilon) - H(x_0, u(x_0), p_\varepsilon + \lambda q) \\
&\quad = \widehat{H}(y_0, v(y_0), p_\varepsilon) - H(y_0, v(y_0), p_\varepsilon) + H(y_0, v(y_0), p_\varepsilon) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - H(x_0, u(x_0), p_\varepsilon + \lambda q) \\
&\quad \leq \widehat{H}(y_0, v(y_0), p_\varepsilon) - H(y_0, v(y_0), p_\varepsilon) + H(y_0, u(x_0), p_\varepsilon) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - H(x_0, u(x_0), p_\varepsilon + \lambda q) \\
&\quad = \widehat{H}(y_0, v(y_0), p_\varepsilon) - H(y_0, v(y_0), p_\varepsilon) + H(y_0, u(x_0), p_\varepsilon) \\
&\quad - H(x_0, u(x_0), p_\varepsilon) + H(x_0, u(x_0), p_\varepsilon) - H(x_0, u(x_0), p_\varepsilon + \lambda q);
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\Big(\text{t.ư.} \quad \widehat{H}(y_0, v(y_0), p_\varepsilon) - H(x_0, u(x_0), p_\varepsilon + \lambda q)$$
$$\leq \widehat{H}(y_0, v(y_0), p_\varepsilon) - H(y_0, v(y_0), p_\varepsilon) + H(y_0, u(x_0), p_\varepsilon) - H(x_0, u(x_0), p_\varepsilon)$$
$$+ H(x_0, u(x_0), p_\varepsilon) - H(x_0, u(x_0), p_\varepsilon + \lambda q) + L_H(u(x_0) - v(y_0))\Big).$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
0 \leq \Phi(x_0, y_0) - \Phi(x_0, x_0) &= v(x_0) - v(y_0) - \frac{\|x_0 - y_0\|^2}{\varepsilon} \\
&\leq m(\|x_0 - y_0\|) - \frac{\|x_0 - y_0\|^2}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

do đó

$$\frac{\|x_0 - y_0\|^2}{\varepsilon} \le m(\|x_0 - y_0\|) \le m(a),$$

hoặc

$$\|x_0 - y_0\| \le (\varepsilon m(a))^{1/2}.$$

Với giả thiết (H3) và tính đơn điệu tăng của hàm môđun m_H, ta có

$$\begin{aligned} H(y_0, u(x_0), p_\varepsilon) - H(x_0, u(x_0), p_\varepsilon) &\le m_H(2\|x_0 - y_0\|^2/\varepsilon + \|x_0 - y_0\|) \\ &\le m_H(2m(a) + (\varepsilon m(a))^{1/2}). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Bởi vì

$$\lambda\|q\| = \lambda|\zeta'(\|x_0\| - R).(\nabla_\beta\|.\|)(x_0)| \le \lambda$$

và

$$\|p_\varepsilon\| = \frac{1}{\varepsilon}\|(\nabla_\beta\|.\|^2)(x_0 - y_0)\| \le \frac{2}{\varepsilon}\|x_0 - y_0\| \le 2(m(a)/\varepsilon)^{1/2},$$

sử dụng (H2) ta được

$$\begin{aligned} H(x_0, u(x_0), p_\varepsilon) - H(x_0, u(x_0), p_\varepsilon + \lambda q) &\le \sigma_H(\lambda\|q\|, \|p_\varepsilon\| + \lambda\|q\|) \\ &\le \sigma_H(\lambda, 2(m(a)/\varepsilon)^{1/2} + \lambda). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Thay (2.22), (2.23) vào (2.21), sau đó kết hợp với (2.19), (2.20) ta có

$$\Phi(x, y) \le C(a, \lambda, \varepsilon) \quad (\text{tương ứng} \quad \Phi(x, y) \le \frac{1}{1 - L_H} C(a, \lambda, \varepsilon)),$$

trên $\Delta(a)$ và (2.16) đúng trong trường hợp này.

Bước 2. Chứng minh (2.16) trong trường hợp hàm Φ không đạt cực đại trên $\Delta(a)$.

Để thực hiện điều này, trước hết chúng tôi chỉ ra rằng hàm Φ là bị chặn trên ở trên tập $\Delta(a)$. Thật vậy, từ $\lambda > B$, với mọi $x, y \in \Delta(a)$ ta có

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &\le u(x) - v(x) + v(x) - v(y) - \frac{\|x - y\|^2}{\varepsilon} - \lambda(\|x\| - R - 2) \\ &\le A + B\|x\| + m(a) - \lambda\|x\| + \lambda(R + 2) \to -\infty \text{ khi } \|x\| \to \infty. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Khi đó $\Phi < 0$ nếu $\|x\| > R_0$ với R_0 đủ lớn. Mặt khác, với $\|x\| \leq R_0$ ta có

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &\leq u(x) - v(y) = u(x) - v(x) + v(x) - v(y) \leq u(x) - v(x) + m(a)\\ &= u(x) - v(x) + v(x) - v(y) \leq u(x) - v(x) + m(a)\\ &\leq A + B\|x\| + m(a) \leq A + BR_0 + m(a) < \infty\end{aligned}$$

do đó $\Phi(x,y)$ bị chặn trên ở trên $\Delta(a)$.

Từ Φ bị chặn trên, khi đó tồn tại hữu hạn $\sup_{\Delta(a)} \Phi$.

Nếu $\sup_{\Delta(a)} \Phi \leq \sup_{\partial\Omega}(u-v)^+ + 2m(a)$, thì (2.16) đạt được là rõ ràng. Ngược lại, ta có

$$\sup_{\Delta(a)} \Phi > \sup_{\partial\Omega}(u-v)^+ + 2m(a). \tag{2.25}$$

Từ (2.10) và (2.15) ta có

$$\Phi(x,y) \leq \sup_{\partial\Omega}(u-v)^+ + m(\min(\rho(x),\rho(y))) + m(a). \tag{2.26}$$

Chọn dãy $(x_n, y_n) \in \Delta(a), n = 1, 2, \cdots$ sao cho $\Phi(x_n, y_n)$ là tăng ngặt

$$\Phi(x_n, y_n) \to \sup_{\Delta(a)} \Phi \text{ và } \Phi(x_n, y_n) \geq \Phi(x_n, x_n). \tag{2.27}$$

Ta chỉ ra rằng (x_n, y_n) là điểm trong của $\Delta(a)$, tức là tồn tại $\gamma > 0$ sao cho

$$S_n := \{(x,y) \in X \times X : \|x - x_n\|^2 + \|y - y_n\|^2 \leq \gamma^2\} \subset \Delta(a). \tag{2.28}$$

Thật vậy, ta có

$$\Phi(x,y) - \Phi(x,x) = v(x) - v(y) - \frac{\|x-y\|^2}{\varepsilon} \leq m(\|x-y\|) - \frac{\|x-y\|^2}{\varepsilon} \tag{2.29}$$

trên $\Delta(a)$. Thay $x = x_n, y = y_n$ vào (2.29) và kết hợp với (2.27), ta có

$$\|x_n - y_n\|^2 \leq \varepsilon m(\|x_n - y_n\|) \leq \varepsilon m(a) \leq a^2.m(a)/(m(a)+1). \tag{2.30}$$

Do đó

$$\|x_n - y_n\| \leq a(m(a)/(m(a)+1))^{1/2}.$$

Từ (2.25) và (2.27) ta thấy rằng tồn tại $\xi > 0$ sao cho cả

$$\rho(x_n) \text{ và } \rho(y_n) \text{ không vượt quá } a + \xi \text{ với } n \text{ đủ lớn.} \tag{2.31}$$

Thật vậy, ngược lại ta có $\rho(x_n) \to a$. Nếu $x = x_n, y = y_n$ trên (2.26) ta có

$$\Phi(x_n, y_n) \le \sup_{\partial\Omega}(u - v)^+ + m(\min(\rho(x_n), \rho(y_n))) + m(a).$$

Sau đó, lấy $n \to \infty$ ta được $\sup_{\Delta(a)} \Phi \le \sup_{\partial\Omega}(u - v)^+ + 2m(a)$. Điều này mâu thuẫn với (2.25). Như vậy, (2.31) được chứng minh.

Với $(x, y) \in S_n$, ta có $\|x - x_n\|^2 + \|y - y_n\|^2 \le \gamma^2$ do đó

$$\|x - x_n\| + \|y - y_n\| \le \sqrt{2}. \left(\|x - x_n\|^2 + \|y - y_n\|^2\right)^{1/2} < 2\gamma$$

và

$$\|x - y\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - y_n\| + \|y_n - y\| < 2\gamma + a(m(a)/(m(a)+1))^{1/2} < a,$$

trong đó γ là số dương được chọn sao cho

$$\gamma < \min\left(\xi, \frac{1}{2}(1 - (m(a)/(m(a)+1)))^{1/2} a\right).$$

Theo (2.31) ta có $\rho(x) \ge \rho(x_n) - \|x - x_n\| \ge a + \xi - \gamma > a$. Biến đổi tương tự ta cũng có $\rho(y) > a$, do đó (2.28) đúng. Theo (2.24) thì dãy (x_n, y_n) là bị chặn.

Tiếp theo ta chứng minh rằng

$$\sup_{\Delta(a)} \Phi \le C(a, \lambda, \varepsilon) \quad (\text{tương ứng} \quad \sup_{\Delta(a)} \Phi \le \frac{1}{1 - L_H} C(a, \lambda, \varepsilon)), \tag{2.32}$$

điều này giúp ta có được (2.16).

Thật vậy, đặt

$$\delta_n = \sup_{\Delta(a)} \Phi - \Phi(x_n, y_n).$$

Theo (2.27), $\delta_n > 0$ với mọi n. Xét hàm

$$\Psi(x, y) = \Phi(x, y) - (3\delta_n/\gamma^2)(\|x - x_n\|^2 + \|y - y_n\|^2) \text{ trên } S_n. \tag{2.33}$$

Với $(x, y) \in \partial S_n$ ta có

$$\Psi(x, y) = \Phi(x, y) - 3\delta_n \le \sup_{\Delta(a)} \Phi - 3\delta_n = \Phi(x_n, y_n) - 2\delta_n = \Psi(x_n, y_n) - 2\delta_n.$$

Do đó

$$\Psi(x, y) \leq \Psi(x_n, y_n) - 2\delta_n \text{ trên } \partial S_n.$$

Thật vậy, nếu $P : S_n \to \mathbb{R}$ biến thiên nhỏ hơn δ_n trên S_n và $\Psi - P$ đạt giá trị lớn nhất trên S_n, thì điểm này phải là điểm trong của S_n.

Theo Mệnh đề 1.4, với $\varepsilon = \delta_n$, tồn tại $P \in \mathcal{D}^*_\beta(X \times X)$ sao cho $\Psi(x, y) - P(x, y)$ đạt giá trị lớn nhất trên S_n tại một điểm $(\widehat{x}, \widehat{y})$ và $\|P\|_\infty < \delta_n$, $\|\nabla_\beta P\|_\infty < \delta_n$. Theo trên $(\widehat{x}, \widehat{y})$ là một điểm trong của S_n.

Cố định $y = \widehat{y}$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned}\Psi(x, \widehat{y}) - P(x, \widehat{y}) = u(x) - v(\widehat{y}) - \left(\frac{\|x - \widehat{y}\|^2}{\varepsilon} + \lambda\zeta(\|x\| - R)\right) \\ - (3\delta_n/\gamma^2)(\|x - x_n\|^2 + \|\widehat{y} - y_n\|^2) - P(x, \widehat{y})\end{aligned}$$

đạt cực đại trên S_n tại điểm $x = \widehat{x}$. Do đó hàm u là trên khả vi β-nhớt tại $\widehat{x}$ và

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varepsilon}(\nabla_\beta\|.\|^2)(\widehat{x} - \widehat{y}) + \lambda\zeta'(\|\widehat{x}\| - R)(\nabla_\beta\|.\|)(\widehat{x}) \\ &\qquad + (3\delta_n/\gamma^2)(\nabla_\beta\|.\|^2)(\widehat{x} - x_n) + \nabla^x_\beta P(\widehat{x}, \widehat{y}) \in D^+_\beta u(\widehat{x}).\end{aligned}$$

Tương tự, hàm v là dưới khả vi β-nhớt tại $\widehat{y}$ và

$$\frac{1}{\varepsilon}(\nabla_\beta\|.\|^2)(\widehat{x} - \widehat{y}) - (3\delta_n/\gamma^2)(\nabla_\beta\|.\|^2)(\widehat{y} - y_n) - \nabla^y_\beta P(\widehat{x}, \widehat{y}) \in D^-_\beta v(\widehat{y}),$$

trong đó ∇^x_β là β-đạo hàm theo biến x.

Từ u, v tương ứng là các nghiệm dưới β-nhớt và nghiệm trên β-nhớt của (2.7), ta được

$$u(\widehat{x}) + H(\widehat{x}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon} + \lambda q + \theta_{1n}) \leq 0, \tag{2.34}$$

$$v(\widehat{y}) + \widehat{H}(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon} + \theta_{2n}) \geq 0, \tag{2.35}$$

trong đó

$$p_{1\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}(\nabla_\beta\|.\|^2)(\widehat{x} - \widehat{y}), q = \zeta'(\|\widehat{x}\| - R).(\nabla_\beta\|.\|)(\widehat{x}), \tag{2.36}$$

$$\theta_{1n} = K_n.(\nabla_\beta\|.\|^2)(\widehat{x} - x_n) + \nabla^x_\beta P(\widehat{x}, \widehat{y}), \quad K_n = 3\delta_n/\gamma^2,$$

$$\theta_{2n} = -K_n.(\nabla_\beta\|.\|^2)(\widehat{y} - y_n) - \nabla^y_\beta P(\widehat{x}, \widehat{y}).$$

Từ $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in S_n$, dãy (x_n, y_n) là bị chặn, do đó $(\widehat{x}, \widehat{y})$ và (x_n, y_n) chứa trong một tập bị chặn.

Hơn nữa, từ $(\nabla_\beta \|.\|^2)(x)$ bị chặn bởi $2\|x\|$, ta có

$$\|p_{1\varepsilon} + \lambda q + \theta_{1n}\| \leq \frac{2}{\varepsilon}\|\widehat{x} - \widehat{y}\| + \lambda\|\widehat{x}\| + K_n\|\widehat{x} - x_n\| + \|\nabla^x_\beta P(\widehat{x}, \widehat{y})\|$$

và

$$\|p_{1\varepsilon} + \theta_{2n}\| \leq \frac{2}{\varepsilon}\|\widehat{x} - \widehat{y}\| + 2K_n\|\widehat{y} - y_n\| + \|\nabla^y_\beta P(\widehat{x}, \widehat{y})\|.$$

Do đó $p_{1\varepsilon} + \lambda q + \theta_{1n}, p_{1\varepsilon} + \theta_{2n}$ chứa trong một tập bị chặn. Lấy R_1 là một chặn trên của $\widehat{x}, \widehat{y}, p_{1\varepsilon} + \lambda q + \theta_{1n}$ và $p_{1\varepsilon} + \theta_{2n}$.

Lấy $R \geq R_1$, theo tính liên tục tại 0 của hàm $w_R : X^*_\beta \to \mathbb{R}$ trong giả thiết (H0), với mỗi $\eta > 0$, tồn tại một lân cận $V_\beta \subset X^*_\beta$ của 0 sao cho $|w_R(p)| < \eta$ với mọi $p \in V_\beta$.

Từ τ_F là tôpô mạnh nhất trong lớp tất cả các τ_β tôpô trên không gian X^*, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\delta B_1 \subset \frac{1}{2}V_\beta$, trong đó B_1 là hình cầu đơn vị trong X^*.

Cả K_n và δ_n hội tụ đến 0 khi $n \to \infty$, ta có thể chọn n đủ lớn sao cho $K_n.(\nabla_\beta\|.\|^2)(\widehat{x} - x_n) \in \delta B_1$; $K_n.(\nabla_\beta\|.\|^2)(\widehat{y} - y_n) \in \delta B_1$ và $\delta_n < \delta$. Điều này dẫn đến $\theta_{1n} \in V_\beta$ và $\theta_{2n} \in V_\beta$.

Bởi vì $\Psi - P$ đạt giá trị lớn nhất tại $(\widehat{x}, \widehat{y})$, khi đó

$$\Psi(\widehat{x}, \widehat{y}) \geq \Psi(x_n, y_n) + P(\widehat{x}, \widehat{y}) - P(x_n, y_n) = \sup_{\Delta(a)} \Phi - 3\delta_n \geq 0$$

với n đủ lớn.

Kết hợp với (2.15), (2.33), ta có

$$u(\widehat{x}) - v(\widehat{y}) \geq \Psi(\widehat{x}, \widehat{y}) \geq \Psi(x_n, y_n) = \sup_{\Delta(a)} \Phi - 3\delta_n \geq 0. \tag{2.37}$$

Do đó $u(\widehat{x}) \geq v(\widehat{y})$.

Từ $H, \widehat{H}$ thỏa mãn điều kiện $(H0)$, với n đủ lớn, ta có

$$|H(\widehat{x}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon} + \lambda q + \theta_{1n}) - H(\widehat{x}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon} + \lambda q)| < |w(\theta_{1n}, R)| < \eta$$

điều này dẫn đến

$$-H(\widehat{x}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon} + \lambda q + \theta_{1n}) < -H(\widehat{x}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon} + \lambda q) + \eta$$

và

$$|\widehat{H}(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon} + \theta_{2n}) - \widehat{H}(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon})| < w(\theta_{1n}, R) < \eta$$

do đó

$$\widehat{H}(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon} + \theta_{2n}) < \widehat{H}(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon}) + \eta.$$

Tức là

$$\begin{aligned}
&\widehat{H}(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon} + \theta_{2n}) - H(\widehat{x}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon} + \lambda q + \theta_{1n}) \\
&\qquad < \widehat{H}(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon}) - H(\widehat{x}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon} + \lambda q) + 2\eta.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Theo (2.34); (2.35) và (2.38) ta có

$$u(\widehat{x}) - v(\widehat{y}) \leq \widehat{H}(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon}) - H(\widehat{x}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon} + \lambda q) + 2\eta.$$

Mặt khác, dùng (H1) (tương ứng (H1)*) ta có

$$\begin{aligned}
&\widehat{H}(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon}) - H(\widehat{x}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon} + \lambda q) \\
&= \widehat{H}(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon}) - H(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon}) + H(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon}) - H(\widehat{x}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon} + \lambda q) \\
&\leq \widehat{H}(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon}) - H(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon}) + H(\widehat{y}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon}) - H(\widehat{x}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon} + \lambda q) \\
&= \widehat{H}(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon}) - H(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon}) + H(\widehat{y}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon}) \\
&\qquad - H(\widehat{x}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon}) + H(\widehat{x}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon}) - H(\widehat{x}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon} + \lambda q) \\
&\leq \sup\{(\widehat{H}(z, r, p) - H(z, r, p))^+ : (z, r, p) \in B_{R_0} \times \mathbb{R} \times X^*, \|p\| \leq \|p_{1\varepsilon}\|\} \\
&+ m_H(2\|\widehat{x} - \widehat{y}\|^2/\varepsilon + \|\widehat{x} - \widehat{y}\|) + \sigma_H(\lambda, 2\|\widehat{x} - \widehat{y}\|/\varepsilon + \lambda);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big(\text{t.ư.} \quad \widehat{H}(\widehat{y}, v(\widehat{y}), p_{1\varepsilon}) - H(\widehat{x}, u(\widehat{x}), p_{1\varepsilon} + \lambda q) \\
&\leq \sup\{(\widehat{H}(z, r, p) - H(z, r, p))^+ : (z, r, p) \in B_{R_0} \times \mathbb{R} \times X^*, \|p\| \leq \|p_{1\varepsilon}\|\} \\
&+ m_H(2\|\widehat{x} - \widehat{y}\|^2/\varepsilon + \|\widehat{x} - \widehat{y}\|) + \sigma_H(\lambda, 2\|\widehat{x} - \widehat{y}\|/\varepsilon + \lambda) + L_H(u(\widehat{x}) - v(\widehat{y}))\Big),
\end{aligned}$$

trong đó B_{R_0} là hình cầu tâm 0 với bán kính đủ lớn trong X. Từ (2.30) và $(x_n, y_n) \in S_n$ ta có

$$\|\widehat{x} - \widehat{y}\| \leq \|x_n - y_n\| + 2\gamma \leq (\varepsilon m(a))^{1/2} + 2\gamma.$$

Điều này dẫn đến

$$\frac{2\|\widehat{x} - \widehat{y}\|^2}{\varepsilon} + \|\widehat{x} - \widehat{y}\| \leq \frac{2}{\varepsilon}(\varepsilon m(a) + 4\gamma(\varepsilon m(a))^{1/2} + 4\gamma^2) + (\varepsilon m(a))^{1/2} + 2\gamma$$

$$= 2m(a) + (\varepsilon m(a))^{1/2} + \gamma\left(\frac{8}{\varepsilon}(\varepsilon m(a))^{1/2} + \frac{8\gamma^2}{\varepsilon} + 2\right).$$

Cho $\gamma \to 0$, ta có

$$2\|\widehat{x} - \widehat{y}\|^2/\varepsilon + \|\widehat{x} - \widehat{y}\| \le 2m(a) + (\varepsilon m(a))^{1/2}.$$

Từ (2.36) và (2.1.3.) ta có

$$\|p_{i\varepsilon}\| \le 2((\varepsilon m(a))^{1/2} + \gamma)/\varepsilon. \tag{2.39}$$

Từ (2.37)-(2.39) ta có

$$\Phi(x_n, y_n) - 3\delta_n \le C(a, \lambda, \varepsilon) + 2\eta$$
$$\Big(\text{t.ư.}\quad \Phi(x_n, y_n) - 3\delta_n \le \frac{1}{1 - L_H}(C(a, \lambda, \varepsilon) + 2\eta)\Big).$$

Lấy $n \to \infty$ và $\eta \to 0$ ta có (2.32) và bất đẳng thức (2.16) được chứng minh hoàn toàn.

Cuối cùng, chọn $R \ge \max\{R_0, R_1\}$, trong đó R_0 và R_1 được lấy trong Bước 2. Theo định nghĩa của ζ, với $\|x\| < R$, $\zeta(\|x\| - R) = 0$ và

$$u(x) - v(x) = \Phi(x, x). \tag{2.40}$$

Vì $(x, x) \in \Delta(a)$, do đó từ (2.16) ta cũng có

$$\begin{aligned} u(x) - v(x) &\le \sup_{\partial\Omega}(u - v)^+ + 2m(a) + C(a, \lambda, \varepsilon)\\ \Big(\text{t.ư.}\quad u(x) - v(x) &\le \sup_{\partial\Omega}(u - v)^+ + 2m(a) + \frac{1}{1 - L_H}C(a, \lambda, \varepsilon)\Big). \end{aligned} \tag{2.41}$$

Từ (2.40), $u - v$ là hàm bị chặn. Khi đó ta có thể chọn $B = 0$ trong (2.14). Bằng cách lấy giới hạn trong (2.41) khi $\lambda \to 0$ và $a \to 0$, ta có được (2.9).

Trường hợp $\Omega = X$

Trong trường hợp này ta có $\partial\Omega = \emptyset$, do đó $\rho(x) = \infty$ với mọi $x \in X$. Sử dụng phép biến đổi như ở trên ta có kết luận của định lý. Như vậy, định lý được chứng minh hoàn toàn. □

Hệ quả 2.4 (Nguyên lý so sánh và tính duy nhất)**.** *Cho X là một không gian Banach và có chuẩn tương đương với một chuẩn β-trơn. Cho $\Omega \subset X$ là một tập mở với biên $\partial\Omega \neq \emptyset$, φ là một hàm liên tục trên $\partial\Omega$. Giả sử rằng hàm H thỏa mãn các giả thiết (H0), (H1) (tương ứng (H1)*), (H2) và (H3). Nếu $u, v \in C(\overline{\Omega})$ tương ứng là nghiệm dưới β-nhớt và nghiệm trên β-nhớt của phương trình* (2.1) *thỏa mãn* (2.8)*, thì $u \leq v$ trong Ω, miễn là $u \leq v$ trên $\partial\Omega$. Do đó, bài toán* (2.1), (2.2) *có không quá một nghiệm trên $C(\overline{\Omega})$.*

Trong trường hợp Ω là toàn bộ không gian X, nguyên lý so sánh và tính duy nhất nghiệm của phương trình (2.1) *dễ dàng có được như một hệ quả.*

Chứng minh. Kết quả so sánh được chỉ ra từ Định lý 2.4. Lấy $u, v \in C(\overline{\Omega})$ là nghiệm của bài toán (2.1), (2.2). Khi đó, u là nghiệm dưới β-nhớt, v là một nghiệm trên β-nhớt của (2.1) và $u \leq v$ trên $\partial\Omega$, do đó theo kết quả so sánh $u \leq v$ trên Ω. Bằng cách thay u và v, ta có $u \geq v$, do đó $u = v$ trên Ω. □

Mệnh đề 2.1. *Nếu trong Hệ quả 2.4, không gian X thỏa mãn (H_β) hoặc (H^*_β) nhưng không có chuẩn β-trơn và cũng không có chuẩn tương đương với chuẩn β-trơn, thì kết luận của Hệ quả 2.4 không còn đúng.*

Chứng minh. Thật vậy, lấy $H(x, u, Du) = 1 + u$ trong (2.1). Dễ dàng thấy rằng hàm $u \equiv -\dfrac{1}{2}$ là một nghiệm β-nhớt của (2.1). Ta sẽ chỉ ra rằng $u = \|x\|$ là một nghiệm khác. Thật vậy, ta lấy không gian X thỏa mãn (H_β) và có chuẩn không β-khả vi tại bất kỳ điểm nào (một không gian X như vậy có thể được chỉ ra trong [26, Nhận xét II.9]). Khi đó u là một nghiệm trên β-nhớt của Phương trình (2.1). Mặt khác, từ $u = \|x\|$ là một hàm lồi và không β-khả vi tại bất kỳ điểm nào trên X, nên $D^+_\beta u(x) = \emptyset$ với mọi $x \in X$. Như vậy, u là một nghiệm dưới β-nhớt của phương trình (2.1). □

Nhận xét 2.3. 1) Khi $\beta = F$ là borno Fréchet, ta có kết quả của Crandall M. G. và Lions P. L. trong [20].

2) Nếu không gian X không có chuẩn β-trơn nhưng có một chuẩn tương đương với một chuẩn β-trơn, ta cũng có kết luận của Định lý 2.4 bằng cách sử dụng chuẩn tương đương thay vì chuẩn ban đầu.

3) Trong [41, Định lý 3.6], các tác giả đã chỉ ra rằng giả thiết tồn tại một hàm bướu trơn Fréchet là điều kiện đủ để tồn tại một chuẩn tương đương với chuẩn trơn Fréchet trong không gian X. Khi β là Fréchet thì ta được kết quả như trong [23]. Như vậy, Định lý 2.4 là một kết quả tổng quát của Crandall và Lions trong [23], ở đó các tác giả cần giả thiết tồn tại hàm bướu trơn Fréchet và tính chất Radon-Nikodym. Trong kết quả của này, chúng tôi không sử dụng tính chất Radon-Nikodym của không gian X.

4) Theo [26, tr. 211], giả thiết tồn tại một hàm $d : X \to \mathbb{R}$ là bị chặn và khả vi Fréchet trên $X \backslash \{0\}$ và tồn tại một số thực $r > 0$ sao cho $d(x) \geq r\|x\|$ sử dụng trong [23] là tương đương với sự tồn tại một hàm bướu Lipschitz và khả vi Fréchet trên X. Do đó, nếu có một hàm d như vậy thì Định lý 2.4 vẫn đúng mà không cần sử dụng giả thiết tồn tại một chuẩn trơn Fréchet hoặc tính chất Radon-Nikodym như trong [23].

Mệnh đề 2.2. *Cho X là một không gian không có chuẩn tương đương với một chuẩn β-trơn nhưng thỏa mãn giả thiết (H_β). Khi đó ta thêm giả thiết tính bị chặn của nghiệm thì kết quả của Định lý 2.4 vẫn được thực hiện.*

Chứng minh. Theo [19, Bổ đề 2.15], tồn tại một hàm $d : X \to \mathbb{R}^+$ và $K > 1$ sao cho

i) d là bị chặn, liên tục Lipschitz trên X và β-trơn trên $X \setminus \{0\}$;

ii) $\|x\| \leq d(x) \leq K\|x\|$ nếu $\|x\| \leq 1$ và $d(x) = 2$ nếu $\|x\| \geq 1$.

Bây giờ, ta giả sử rằng u, v là bị chặn trên Ω. Trong chứng minh của Định lý 2.4, chúng ta thay $\|.\|^2$ bởi $d^2(\cdot)$ và xét hàm

$$\Phi(x, y) = u(x) - v(y) - \left(\frac{d(x-y)^2}{\varepsilon} + \lambda\zeta(\|x\| - R)\right).$$

Kết luận được thực hiện bằng cách sử dụng phép chứng minh tương tự như trong Định lý 2.4. $\square$

Ta cần lưu ý rằng giả thiết tính bị chặn của u, v trong Mệnh đề 2.2 là cần thiết. Một ví dụ được chỉ ra trong chứng minh của Mệnh đề 2.1.

2.2. Tính ổn định và sự tồn tại của nghiệm β-nhớt

2.2.1. Tính ổn định

Chúng tôi đưa ra tính ổn định của nghiệm β-nhớt. Sử dụng tính ổn định giống như ở trong [26], ta có định lý sau.

Định lý 2.5 (Tính ổn định). *Cho X là một không gian Banach với chuẩn β-trơn và Ω là một tập con mở của X. Lấy $u_n \in C(\Omega)$ và $H_n \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times X_\beta^*)$, $n = 1, 2, \cdots$ hội tụ đến u, H tương ứng khi $n \to \infty$ theo nghĩa:*

Với mọi $x \in \Omega$ tồn tại $R > 0$ sao cho $u_n \to u$ đều trên $B_R(x)$ khi $n \to \infty$ và nếu $(x, r, p), (x_n, r_n, p_n) \in \Omega \times \mathbb{R} \times X_\beta^*$ với $n = 1, 2, \cdots$ và $(x_n, r_n, p_n) \to (x, r, p)$ khi $n \to \infty$, thì $H_n(x_n, r_n, p_n) \to H(x, r, p)$. Nếu u_n là một nghiệm trên β-nhớt (tương ứng nghiệm dưới) của $H_n = 0$ trên Ω, thì u là một nghiệm trên β-nhớt (tương ứng nghiệm dưới) của $H = 0$ trên Ω.

Chứng minh. Chúng tôi chứng minh với trường hợp u_n là nghiệm trên β-nhớt của $H_n = 0$; trường hợp nghiệm dưới β-nhớt được chứng minh tương tự. Lấy $x \in \Omega$ và $p \in D_\beta^- u(x)$, khi đó tồn tại một hàm liên tục Lipschitz địa phương và β-khả vi $\varphi : X \to \mathbb{R}$ trên $D(\varphi)$ sao cho:

(i) $(u - \varphi)(x) = 0$ và $(u - \varphi)(y) \geq 0$ nếu $y \in \Omega$.

(ii) $p = \nabla_\beta \varphi(x)$ và $\nabla_\beta \varphi$ là liên tục tại x với tôpô τ_β.

Từ u_n hội tụ đến u khi $n \to \infty$, khi đó ta có thể giả sử rằng tồn tại một dãy các số dương $\{\varepsilon_n\}_n$ sao cho $\varepsilon_n \to 0$ khi $n \to \infty$ và

$$u(y) \leq u_n(y) + \varepsilon_n \text{ với } y \in \Omega.$$

Do vậy,

$$u_n(y) + \varepsilon_n - \varphi(y) \geq (u - \varphi)(y) \geq 0 \text{ với } y \in \Omega,$$

Điều này kéo theo $\inf(u_n - \varphi) + \varepsilon_n \geq 0$. Từ u và φ là các hàm liên tục tại x, tồn tại $z_n \in \Omega$, $\|z_n - x\| < \varepsilon_n$ sao cho $u_n(z_n) - \varphi(z_n) \leq \varepsilon_n$. Như vậy, $u_n(z_n) - \varphi(z_n) \leq \inf(u_n - \varphi) + 2\varepsilon_n$. Ta xác định giá trị $(u_n - \varphi)(y) = -\varepsilon_n$ với $y \notin \Omega$. khi đó $u_n - \varphi$ là nửa liên tục dưới và bị chặn dưới. Theo Mệnh đề 1.2, tồn tại $\psi_n \in \mathcal{D}_\beta(X)$ sao cho

(1) $\lim_{n\to\infty} \|\psi_n\| = 0$ và $\lim_{n\to\infty} \|\nabla_\beta \psi_n\|_\infty = 0$,

(2) $u_n - \varphi + \psi_n$ đạt cực tiểu địa phương tại $y_n \in \Omega$,

(3) $\lim_{n\to\infty} \|y_n - z_n\| = 0$.

Sử dụng (3) và $\|z_n - x\| < \varepsilon_n$, ta có $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x\| = 0$. Mặt khác, $p_n = \nabla_\beta\varphi(y_n) - \nabla_\beta\psi_n(y_n) \in D_\beta^- u_n(y_n)$ và $p_n - p = \nabla_\beta\varphi(y_n) - \nabla_\beta\varphi(x) - \nabla_\beta\psi_n(y_n)$. Từ $\nabla_\beta\varphi$ là hàm liên tục, $y_n \to x$ và $\lim_{n\to\infty} \|\nabla_\beta\psi_n\|_\infty = 0$, $p_n - p \to 0$ khi $n \to \infty$.

Vì u_n là một nghiệm trên β-nhớt của $H_n = 0$, ta có

$$H_n(y_n, u_n(y_n), p_n) \geq 0.$$

Lấy giới hạn khi $n \to \infty$, ta có $H(x, u(x), p) \geq 0$. Như vậy, u là nghiệm trên β-nhớt của $H(x, r, p) = 0$. □

2.2.2. Sự tồn tại

Cuối cùng, chúng tôi kết thúc mục này bằng cách chỉ ra sự tồn tại của nghiệm β-nhớt trong Định lý 2.6, Định lý 2.7. Kết quả này dựa trên mô hình trong các bài báo [21, 26, 34]. Trước hết chúng tôi nhắc lại một số khái niệm liên quan được trình bày trong trong [26].

Nếu Ω là một tập con mở của không gian Banach X và nếu u là hàm xác định trên Ω, hình bao nửa liên tục trên u^* của u được định nghĩa

$$u^* = \inf\{v : v \text{ là liên tục trên } \Omega \text{ và } v \geq u \text{ trên } \Omega\}$$

và hình bao nửa liên tục dưới u_* của u được định nghĩa bởi

$$u_* = \sup\{v : v \text{ là liên tục trên } \Omega \text{ và } v \leq u \text{ trên } \Omega\}.$$

Bây giờ ta thiết lập sự tồn tại của nghiệm nhớt.

Định lý 2.6 (Sự tồn tại). *Cho X là một không gian Banach với chuẩn β-trơn và Ω là một tập con mở của X. Cho $H : \Omega \times \mathbb{R} \times X_\beta^* \to \mathbb{R}$ thỏa mãn (H0), (H1) (tương ứng (H1)*), (H2), (H3) và*

$$\liminf_{\|p\|\to\infty} (r + H(x, r, p)) > 0 \text{ đều với } (x, r) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.42}$$

Khi đó, tồn tại duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình (2.1).

Chứng minh. Phép chứng minh được tiến hành qua nhiều bước:

Bước 1. Chứng minh tồn tại nghiệm dưới β-nhớt u_0 và nghiệm trên β-nhớt v_0.

Lấy $\lambda = 0$ và $r = 0$, từ giả thiết (H3) ta có $H(x,0,0) - H(0,0,0) \leq m_H(\|x\|)$, do đó

$$H(x,0,0) \leq H(0,0,0) + m_H(\|x\|) \leq |H(0,0,0)| + m_H(\|x\|).$$

Tương tự, ta có $-H(x,0,0) \leq |H(0,0,0)| + m_H(\|x\|)$. Do đó $|H(x,0,0)| \leq |H(0,0,0)| + m_H(\|x\|)$.

Từ m_H là một môđun, theo Nhận xét 2.1, tồn tại các số thực A_H, B_H sao cho

$$|H(x,0,0)| \leq A_H + B_H\|x\|, \quad \forall x \in \Omega.$$

Đặt

$$A_1 = A_H + \sigma_H(B_H, B_H), \quad A_2 = A_H + \sigma_H(B_H, 2B_H),$$
$$A_1' = A_H + \sigma_H\Big(\frac{B_H}{1-L_H}, \frac{B_H}{1-L_H}\Big);$$
$$A_2' = A_H + \sigma_H\Big(\frac{B_H}{1-L_H}, \frac{2B_H}{1-L_H}\Big)$$

và

$$v_0(x) = A_1 + B_H\|x\|, \quad u_0(x) = -(A_2 + B_H\|x\|).$$
$$\Big(\text{t.ư.} \quad v_0(x) = \frac{A_1' + B_H\|x\|}{1-L_H}, \quad u_0(x) = -\frac{A_2' + B_H\|x\|}{1-L_H}\Big).$$

Ta sẽ chỉ ra rằng v_0 là một nghiệm trên β-nhớt và u_0 là một nghiệm dưới β-nhớt của bài toán (2.1) trên Ω. Thật vậy, từ giả thiết (H1) (tương ứng (H1)*) và (H2), với mỗi $x \in \Omega$, $p \in D^-_\beta(\|\cdot\|)(x)$, ta có

$$\begin{aligned} H(x,0,0) &\leq H(x, A_1 + B_H\|x\|, 0) \\ &\leq H(x, A_1 + B_H\|x\|, B_H p) + \sigma_H(B_H, B_H); \end{aligned}$$

$$\Big(\text{t.ư.} \quad H(x,0,0) \leq H(x, v_0(x), 0) + L_H v_0(x)$$

$$\le H\Big(x, v_0(x), \frac{B_H}{1-L_H}p\Big) + \sigma_H\Big(\frac{B_H}{1-L_H}, \frac{B_H}{1-L_H}\Big) + L_H v_0(x)\Big).$$

Do đó

$$\begin{aligned} v_0(x) + H(x, v_0(x), B_H p) &\ge A_1 + B_H\|x\| + H(x,0,0) - \sigma_H(B_H, B_H) \\ &\ge A_1 + B_H\|x\| - A_H - B_H\|x\| - \sigma_H(B_H, B_H) \ge 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Big(\text{t.ư. } & v_0(x) + H\Big(x, v_0(x), \frac{B_H}{1-L_H}p\Big) \\ &\ge (1-L_H)v_0(x) + H(x,0,0) - \sigma_H\Big(\frac{B_H}{1-L_H}, \frac{B_H}{1-L_H}\Big) \\ &\ge A_1' + B_H\|x\| - A_H - B_H\|x\| - \sigma_H\Big(\frac{B_H}{1-L_H}, \frac{B_H}{1-L_H}\Big) \ge 0\Big). \end{aligned}$$

Từ đó ta có v_0 là một nghiệm trên β-nhớt của (2.1).

Từ điều kiện (H1) (tương ứng (H1)*) và (H2), với mỗi $x \in \Omega$, $p \in D^+_\beta(\|\cdot\|)(x)$, ta có

$$H(x, u_0(x), -B_H p) \le H(x, 0, -B_H p) \le H(x,0,0) + \sigma_H(B_H, 2B_H).$$

$$\begin{aligned} \Big(\text{t.ư. } & H\Big(x, u_0(x), -\frac{B_H}{1-L_H}p\Big) \le H\Big(x, 0, -\frac{B_H}{1-L_H}p\Big) + L_H|u_0(x)| \\ &\le H(x,0,0) + \sigma_H\Big(\frac{B_H}{1-L_H}, \frac{2B_H}{1-L_H}\Big) + L_H|u_0(x)|\Big). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} u_0(x) + H(x, u_0(x), -B_H p) &\le u_0(x) + H(x,0,0) + \sigma_H(B_H, 2B_H) \\ &\le u_0(x) + A_H + B_H\|x\| + \sigma_H(B_H, 2B_H) \le 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Big(\text{t.ư. } & u_0(x) + H\Big(x, u_0(x), -\frac{B_H}{1-L_H}p\Big) \\ &\le (1-L_H)u_0(x) + H(x,0,0) + \sigma_H\Big(\frac{B_H}{1-L_H}, \frac{2B_H}{1-L_H}\Big) \\ &= -(A_2' + B_H\|x\|) + A_H + B_H\|x\| + \sigma_H\Big(\frac{B_H}{1-L_H}, \frac{2B_H}{1-L_H}\Big) \le 0\Big). \end{aligned}$$

Như vậy u_0 là một nghiệm dưới β-nhớt của (2.1).

Bước 2. Chứng minh tồn tại nghiệm β-nhớt của phương trình (2.1).

Trước hết ta chứng minh rằng từ điều kiện (2.42) và $u_0 \le u \le v_0$ thì nghiệm dưới β-nhớt u của phương trình (2.1) là một hàm liên tục Lipschitz địa phương. Ngoài ra, nếu đoạn thẳng $L(x,y) \subset \Omega$ thì tồn tại hằng số C sao cho $|u(x) - u(y)| \leq C\|x - y\|$. Từ điều kiện (2.42), tồn tại một số thực $R > 0$ sao cho

$$u(x) + H(x,u,p) > 0 \text{ nếu } (x,u,p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times X_\beta^* \text{ và } \|p\| \geq R.$$

Giả sử u là một nghiệm dưới β-nhớt của (2.1). Cố định $x_0 \in \Omega$ và chọn $\delta > 0$ sao cho $B(x_0, 2\delta) \subset \Omega$ và u bị chặn trên $B(x_0, 2\delta)$. Lấy $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi liên tục sao cho $h(r) = (R+1)r$ với $0 \leq r \leq \delta/2$, $h'(r) \geq R+1$ với $r \geq 0$ và

$$h(\delta) \geq 2\sup\{|u(x)| : x \in B(x_0, 2\delta)\} + 1.$$

Cố định $y \in B(x_0, \delta)$ và đặt

$$v(x) = u(y) + h(\|x - y\|) \text{ với } x \in B(y, \delta).$$

Khi đó $u(y) = v(y)$ và $v(x) \geq \sup\{|u(z)|z \in B(y,\delta)\} + 1$ với $x \in \partial B(y,\delta)$. Ta sẽ chỉ ra rằng $u \leq v$ trên $B(y,\delta)$ bằng phương pháp phản chứng, giả sử tồn tại $x_0 \in B(y,\delta)$ sao cho $u(x_0) > v(x_0)$. Theo Mệnh đề 1.4 tồn tại một hàm $g \in \mathcal{D}_\beta(X)$ sao cho $\|g\|_\infty < \frac{1}{2}$, $\|\nabla_\beta g\|_\infty < \frac{1}{2}$ và $u - v - g$ đạt cực đại trên $\overline{B}(y,\delta)$ tại một điểm trong $\overline{x}$ của $\overline{B}(y,\delta) \setminus \{y\}$. Khi đó theo định nghĩa nghiệm dưới β-nhớt ta có

$$u(\overline{x}) + H(\overline{x}, u(\overline{x}), Dv(\overline{x}) + \nabla_\beta g(\overline{x})) \leq 0.$$

Điều này mâu thuẫn với (2.42) bởi vì

$$\|Dv(\overline{x}) + \nabla_\beta g(\overline{x})\| \geq h'(\|\overline{x} - y\|) - \|\nabla_\beta g\|_\infty > R.$$

Khi đó ta có $u(x) - u(y) \leq v(x) - u(y) = h(\|x-y\|) = (R+1)(\|x-y\|)$ nếu $x \in B(y,\delta)$ và $\|x - y\| \leq \frac{\delta}{2}$.

Biến đổi tương tự ta có được

$$|u(x) - u(y)| \leq (R+1)\|x - y\| \text{ với } x, y \in B(x_0, \delta/4).$$

Nếu đoạn thẳng $L(x,y) \subset \Omega$, do tính compact ta có thể suy ra rằng

$$|u(x) - u(y)| \leq (R+1)\|x - y\|.$$

Gọi $\mathcal{S}$ là tập tất cả các hàm $\omega : \Omega \to \mathbb{R}$ là nghiệm dưới β-nhớt của (2.1). trên Ω thỏa mãn $u_0 \leq \omega \leq v_0$.

Đặt $u = \sup\{\omega : \omega \in \mathcal{S}\}$. Theo Mệnh đề III.7 và Kết luận III.9 trong [26] thì u^* là nghiệm dưới β-nhớt của (2.1). Theo chứng minh trên thì u^* là một hàm liên tục Lipschitz địa phương.

Bây giờ ta chứng minh u^* là nghiệm trên β-nhớt của (2.1) bằng phương pháp phản chứng. Giả sử u^* không phải là nghiệm trên β-nhớt của phương trình (2.1), khi đó tồn tại $\varphi \in \mathcal{D}_\beta(X)$ và $x_0 \in X$ sao cho $\nabla_\beta \varphi$ liên tục và
(i) $u^*(x_0) - \varphi(x_0) = 0$, $u^*(x) - \varphi(x_0) \geq 0$, với mọi $x \in X$.
(ii) $u^*(x_0) + H(x_0, u^*(x_0), \nabla_\beta \varphi(x_0)) < 0$.

Ta kết luận rằng $\varphi(x_0) < v_0(x_0)$, vì nếu ngược lại thì $\varphi(x_0) \geq v_0(x_0)$ và $\varphi(x) \leq u^*(x) \leq v_0(x)$. Từ đây ta có $v_0 - \varphi$ đạt cực tiểu tại x_0. Vì v_0 là nghiệm trên β-nhớt của phương trình (2.1) nên $u(x_0) + H(x_0, v_0(x_0), \nabla_\beta \varphi(x_0)) \geq 0$. Điều này mâu thuẫn với (ii).

Theo tính liên tục, tồn tại $\delta > 0$ và $b \in \mathcal{D}^*_\beta(X)$ có giá trong hình cầu $B(x_0, \delta)$ sao cho $b(x_0) > 0$ và

$$u(x) + H(x, \varphi(x) + b(x), \nabla_\beta \varphi(x) + \nabla_\beta b(x)) < 0 \text{ với mọi } x \in B(x_0, 2\delta)$$
$$\varphi(x) + b(x) \leq v_0(x) \text{ với mọi } x \in X.$$

Ta có thể thực hiện được nếu chọn δ, $\|b\|_\infty, \|\nabla_\beta b\|_\infty$ đủ nhỏ và từ $\varphi(x_0) < v_0(x_0)$; $\varphi(x) \leq v_0(x)$ với mọi $x \in X$. Đặt

$$w(x) = \begin{cases} \max\{\varphi(x) + b(x); u^*(x)\} & \text{nếu } x \in B(x_0, 2\delta) \\ u^*(x) & \text{nếu } x \in X \backslash B(x_0, \delta). \end{cases}$$

Đặt $\Omega_1 = X \backslash \overline{B}(x_0, \delta)$ và $\Omega_2 = B(x_0, 2\delta)$. Nếu $x \in B(x_0, 2\delta) \backslash \overline{B}(x_0, \delta)$ thì $u^*(x) \geq \varphi(x) = \varphi(x) + b(x)$ do đó $w = u^*$ là nghiệm dưới β-nhớt của phương trình (2.1) trên Ω_1. Mặt khác từ $\varphi + b$ và u^* là hai nghiệm dưới β-nhớt của phương trình (2.1) trên Ω_2 nên w là nghiệm dưới β-nhớt của phương trình (2.1) trên $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Từ $u_0 \leq w \leq v_0$, $w \in \mathcal{S}$ nên $w \leq u^*$ trên Ω. Nhưng $\varphi(x_0) + b(x_0) > \varphi(x_0) = u^*(x_0)$ từ đó $w(x_0) > u^*(x_0)$ vô lý.

Như vậy ta đã chứng minh xong sự tồn tại nghiệm β-nhớt của phương trình (2.1). Tính duy nhất nghiệm của phương trình này được suy ra từ Hệ quả 2.4. $\square$

Định lý 2.7 (Sự tồn tại nghiệm bài toán Dirichlet)**.** *Dưới các giả thiết của Định lý 2.6 và giả sử thêm rằng tồn tại* $u_0, v_0 \in C(\overline{\Omega})$ *sao cho* $u_0 = v_0 = \varphi$ *trên* $\partial\Omega$; u_0, v_0 *tương ứng là nghiệm dưới* β*-nhớt và nghiệm trên* β*-nhớt của phương trình* (2.1) *thì bài toán* (2.1)-(2.2) *có nghiệm duy nhất* $u \in C(\overline{\Omega})$.

Chứng minh. Theo Định lý 2.6 tồn tại một hàm $u \in C(\Omega)$ là nghiệm β-nhớt của phương trình (2.1) thỏa mãn $u_0 \leq u \leq v_0$. Đặt $u = \varphi$ trên $\partial\Omega$. Khi đó u liên tục tại các điểm thuộc $\partial\Omega$ do đó $u \in C(\overline{\Omega})$ và là nghiệm của bài toán (2.1)-(2.2). $\square$

Ví dụ 2.5. Trong Ví dụ 2.3, chúng tôi đã chỉ ra một hàm Hamilton H và chứng minh rằng các giả thiết (H0)-(H3) thỏa mãn. Bây giờ, chúng tôi chỉ ra thêm một ví dụ mà hàm Hamilton H là phi tuyến. Hơn nữa, không gian X ở dưới đây không có chuẩn tương đương với chuẩn trơn Fréchet.
Lấy $X = L^1[0,1]$ hoặc l^1. Theo [19], X có một chuẩn tương đương với chuẩn trơn Hadamard yếu và không khả vi Fréchet tại bất kỳ điểm nào. Như vậy, kết quả của Crandall trong [20] không đúng trong trường hợp này. Ta cũng để ý rằng $L^1[0,1]$ không thỏa mãn tính chất Radon-Nikodym (xem [15]). Lấy $U = [0,1]$ và $\mathcal{U} = \{\alpha : [0,\infty) \to U \text{ liên tục}\}$. Cho hàm $H : X \times X^*_\beta \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$H(x,p) = \sup_{\alpha \in \mathcal{U}} \{-\langle p, x_0\alpha\rangle - \|x\|\alpha\},$$

trong đó x_0 là một điểm cố định trong X. Khi đó ta có thể chỉ ra rằng H thỏa mãn các điều kiện (H0)-(H3). Xét phương trình

$$u + H(x, Du) = 0 \quad \text{trên } X. \tag{2.43}$$

Từ Mệnh đề 2.2, Định lý 2.5, phương trình (2.43) có duy nhất nghiệm β-nhớt.

Kết luận chương 2

Trong chương 2 này chúng tôi tập trung một số vấn đề chính:
1. Chứng minh được tính duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi.

2. Chứng minh được tính ổn định nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi.

3. Chứng minh được sự tồn tại nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi.

Chương 3

ỨNG DỤNG CỦA NGHIỆM β-NHỚT ĐỐI VỚI BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

Chương này chúng tôi chỉ ra hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn là nghiệm β-nhớt duy nhất của một phương trình Hamilton-Jacobi tương ứng. Tính bị chặn của nghiệm là không cần thiết trong chứng minh của chúng tôi. Ngoài ra trong chương này chúng tôi đã đưa ra điều kiện cần và điều kiện đủ cho bài toán điều khiển tối ưu trong không gian vô hạn chiều bằng cách sử dụng nghiệm β-nhớt. Để ý rằng trên không gian hữu hạn chiều, hàm chuẩn là trơn Fréchet. Tuy nhiên trên một số không gian vô hạn chiều như L^1 thì hàm chuẩn không trơn Fréchet và các kỹ thuật đã biết về nghiệm nhớt trong không gian hữu hạn chiều không còn sử dụng được. Trong trường hợp đó khái niệm β-trơn đóng vai trò quan trọng, khi đó chúng tôi áp dụng cách tiếp cận như trong bài báo [1] của chúng tôi. Các kết quả trong chương được viết dựa trên bài báo [2] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

3.1. Bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn

3.1.1. Bài toán điều khiển tối ưu-nguyên lý quy hoạch động Bellman với hàm giá trị trơn

Chúng tôi giới thiệu bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn, bài toán này được nghiên cứu nhiều trong lý thuyết điều khiển tối ưu (xem [4, 6, 9, 13, 24, 19, 36]). Trong đó [13, 24, 36] nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu với hàm giá trị không bị chặn. Ta xét bài toán điều khiển tối ưu (P):
Cho X là một không gian Banach với chuẩn β-trơn và U là một không gian mêtric. Xét phương trình trạng thái

$$\begin{cases} y'(s) = g(y(s), \alpha(s)), \quad s > 0, \\ y(0) = x,\ \alpha(s) \in U, \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $x \in X$ và $g : X \times U \to X$ là một ánh xạ cho trước với điều khiển

$$\alpha(\cdot) \in \mathcal{U} := \{\alpha : [0, \infty) \to U \text{ đo được và } \alpha(t) \in U \text{ với } t \in [0, \infty) \text{ h.k.n.}\}.$$

Một nghiệm của (3.1) là hàm $y_x(\cdot)$ sao cho nó liên tục tuyệt đối trên các tập con compact của $[0, +\infty)$ và thỏa mãn (3.1) hầu khắp nơi. Theo [19], nếu g là liên tục và Lipschitz theo $x \in X$ đều trên U và tồn tại $K \in \beta$ sao cho $g(x, U) \subset K$ với mọi $\in X$, thì (3.1) có duy nhất nghiệm xác định trên $[0, +\infty)$.

Để thuận tiện, từ nay ta ký hiệu bởi $y_x(\cdot, \alpha) = y_x(\cdot)$ là nghiệm của (3.1). Ta giới thiệu hàm chi phí

$$J(x, \alpha) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(y_x(s), \alpha(s)) ds, \tag{3.2}$$

trong đó $\lambda > 0$ và $f : X \times U \to \mathbb{R}$.

Bài toán điều khiển tối ưu $P(x)$ trên X là tìm $\overline{\alpha}(\cdot) \in \mathcal{U}$ sao cho

$$J(x, \overline{\alpha}(\cdot)) = \inf_{\alpha \in \mathcal{U}} J(x, \alpha).$$

Ta ký hiệu hàm giá trị của $P(x)$ là $V(x)$. Khi đó

$$V(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{U}} J(x, \alpha) = \inf_{\alpha \in \mathcal{U}} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda s} f(y_x(s), \alpha(s)) ds \right).$$

Ví dụ 3.1. Lấy $X = \mathbb{R}$, với borno Gâteaux. Xét hệ sau:

$$\begin{cases} y'(s) & = \alpha(s) y(s), \\ y(0) & = x, \end{cases}$$

với tập điều khiển $U = [0, 1]$ và hàm chi phí

$$J(x, \alpha) = \int_0^\infty e^{-2s} y(s) ds.$$

Khi đó $y(s) = x e^{\int_0^s \alpha(t) dt}$ và $J(x, \alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-2s} x e^{\int_0^s \alpha(t) dt} ds$. Tính toán trực tiếp ta có

$$V(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty x e^{-2s} ds = \frac{1}{2} x & \text{nếu } x \geq 0, \\ \displaystyle\int_0^\infty x e^{-2s} e^s ds = x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Như vậy, trong trường hợp này hàm giá trị không khả vi tại 0.

Ví dụ 3.2. Chúng tôi trình bày một bài toán điều khiển tối ưu (P) trong kinh tế được phát triển bởi Aseev, S. M., Kryazhimskii, A. V. trong [6, Ví dụ 1.2]. Giả sử rằng $w(t)$ là giá trị thực của tiền tệ tại thời điểm $t \geq 0$. Ta cũng giả sử rằng tại $t_0 = 0$, giá trị thực của tiền tệ bằng 1, tức là $w(0) = 1$. Giả sử với một khoảng thời gian nhỏ $[t, t + \Delta t]$, tiền tệ bị mất giá theo cách mà giá trị thực của tiền tệ tại thời điểm $t + \Delta t$ là $w(t + \Delta t) = w(t) - \lambda w(t)\Delta t + o(\Delta t)$, trong đó λ là hệ số lạm phát (không đổi). Từ đó ta có

$$w(t) - w(t + \Delta t) = \lambda w(t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Như vậy, $w(t)$ là nghiệm của phương trình vi phân $w'(t) = -\lambda w(t)$ với giá trị đầu $w(0) = 1$. Nghiệm được cho bởi $w(t) = e^{-\lambda t}$.
Lấy $f(y_x(t), \alpha(t))$ là chi phí tức thời của doanh nghiệp tại thời điểm t. Do ảnh hưởng của lạm phát, chi phí này giảm xuống giá trị $e^{-\lambda t} f(y_x(t), \alpha(t))$. Khi đó hàm mục tiêu được cho bởi

$$J(x, \alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(y_x(t), \alpha(t))dt,$$

mang lại tổng chi phí của doanh nghiệp trong thời gian vô hạn $[0, \infty)$. Trường hợp cụ thể, lấy $X = L^1([0, \infty)), \lambda = 2$ và với $x \in X$, ta xét phương trình

$$\begin{cases} y'(s) & = \alpha(s)y(s), \\ y(0) & = x. \end{cases}$$

Nó có nghiệm là $y_x(s) = xe^{\int_0^s \alpha(t)dt}$, trong đó tập điều khiển là $U = [0, 1]$ và chi phí tức thời cho bởi $f(y_x(t), \alpha(t)) = \|y_x(t)\|$. Tính toán trực tiếp ta có $V(x) = \frac{1}{2}\|x\|$.

Ta thấy rằng hàm giá trị trong Ví dụ 3.1; 3.2 là không bị chặn. Bây giờ chúng ta đưa ra một một số giả thiết để nghiên cứu tính chất của hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu:
Hàm $g : X \times U \to X$ và $f : X \times U \to \mathbb{R}$ là liên tục và thỏa mãn một trong các điều kiện sau.

(B1) Tồn tại các hằng số $L_0, L, C, m > 0$, $K \in \beta$, với $0 \leq m < \frac{\lambda}{L}, K \subset B(0, L)$ và môđun liên tục địa phương $\omega(\cdot, \cdot)$, sao cho với mọi $x, \overline{x} \in X$

và $u \in U$,

$$\begin{cases} |g(x,u) - g(\overline{x},u)| \leq L_0\|x - \overline{x}\|, \quad g(x,u) \in K, \\ |f(x,u)| \leq Ce^{m\|x\|}, \quad |f(x,u) - f(\overline{x},u)| \leq \omega(\|x - \overline{x}\|, \|x\| \vee \|\overline{x}\|), \end{cases}$$

trong đó $\|x\| \vee \|\overline{x}\| = \max\{\|x\|, \|\overline{x}\|\}$.

(B2) Tồn tại các hằng số $L_0, L, C, m > 0$, $K \in \beta$, với $0 \leq m < \frac{\lambda}{L_0}$, $K \subset B(0, L)$ và một môđun liên tục địa phương $\omega(\cdot,\cdot)$, sao cho với mọi $x, \overline{x} \in X$ và $u \in U$,

$$\begin{cases} |g(x,u) - g(\overline{x},u)| \leq L_0\|x - \overline{x}\|, \quad g(0,u) \in K, \\ |f(x,u)| \leq C(1 + \|x\|)^m, \quad |f(x,u) - f(\overline{x},u)| \leq \omega(\|x - \overline{x}\|, \|x\| \vee \|\overline{x}\|). \end{cases}$$

Định lý sau trình bày nguyên lý quy hoạch động, đây là một kết quả quan trọng về hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu. Kết quả này được dùng để tìm điều khiển phản hồi tối ưu.

Định lý 3.1 (Nguyên lý quy hoạch động, [36, Mệnh đề 6.2]). *Giả sử một trong các điều kiện (B1) hoặc (B2) đúng. Khi đó với mọi $x \in X$ và $t > 0$,*

$$V(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{U}} \left\{ \int_0^t e^{-\lambda s} f(y_x(s,\alpha), \alpha(s))ds + e^{-\lambda t} V(y_x(t,\alpha)) \right\}.$$

3.1.2. Tính chất của hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu

Mệnh đề 3.1 ([36, Mệnh đề 6.1]). *Giả sử một trong hai điều kiện (B1) hoặc (B2) đúng. Khi đó, với mọi $x \in X$ và $u(\cdot) \in \mathcal{U}[0,\infty)$, phương trình trạng thái* (3.1) *có duy nhất một quỹ đạo $y_x(\cdot)$ và hàm chi phí* (3.2) *là được xác định. Hơn nữa, ta có các kết quả sau:*

(a) *Nếu (B1) đúng thì V là hàm liên tục đều địa phương và có một hằng số $M > 0$ sao cho*

$$|V(x)| \leq Me^{m\|x\|}, \quad x \in X.$$

(b) *Nếu (B2) đúng thì V là hàm liên tục đều địa phương và tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho*

$$|V(x)| \leq M(1 + \|x\|)^m, \quad x \in X.$$

Mệnh đề sau là một tính chất quan trọng được sử dụng trong chứng minh của Định lý 3.2 dưới đây.

Mệnh đề 3.2. *Nếu (B1) hoặc (B2) thỏa mãn thì tồn tại một môđun địa phương $\overline{\omega}$ sao cho*

$$|V(x) - V(y)| \leq \overline{\omega}(\|x - y\|, R) \quad \text{với mọi} \quad x, y \in X, \|x\| \leq R, \|y\| \leq R. \tag{3.3}$$

Chứng minh. Với mọi $x, y \in X$, lấy $\overline{\omega} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ được cho bởi

$$\overline{\omega}(t, R) = \sup\{|V(x) - V(y)|, \|x - y\| \leq t; \|x\|, \|y\| \leq R\}. \tag{3.4}$$

Khi đó $\overline{\omega}$ là một môđun. Thật vậy, $\overline{\omega}$ là hàm không giảm theo tính chất của supremum. Hơn nữa $\overline{\omega}(0, R) = 0$. Tiếp theo, ta chỉ ra rằng $\lim\limits_{t \to 0} \overline{\omega}(t, R) = 0$. Với mọi $\varepsilon > 0$, theo tính liên tục đều của V, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in X$, $\|x\|, \|y\| \leq R$ thỏa mãn $\|x - y\| < \delta$, ta có

$$|V(x) - V(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Điều này dẫn đến $\sup\{|V(x) - V(y)|, \|x - y\| \leq \delta\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Như vậy, $0 < t < \delta$ kéo theo

$$\overline{\omega}(t, R) \leq \sup\{|V(x) - V(y)|, \|x - y\| \leq \delta\} < \varepsilon;$$

từ đó ta có $\lim\limits_{t \to 0} \overline{\omega}(t) = 0$.
Tiếp theo ta kiểm tra tính dưới cộng tính. Lấy $t_1, t_2 > 0$ và $x, y \in X$ sao cho $\|x - y\| \leq t_1 + t_2$. Đặt $z = x - \frac{(x-y)t_1}{t_1+t_2}$. Khi đó

$$\|x - z\| = \left\| \frac{(x - y)t_1}{t_1 + t_2} \right\| \leq t_1 \quad \text{và} \quad \|z - y\| = \left\| \frac{(x - y)t_2}{t_1 + t_2} \right\| \leq t_2.$$

Có thể thấy rằng, với $x, y, z \in X$ sao cho $\|x\|, \|y\|, \|z\| \leq R$

$$\begin{aligned} |V(x) - V(y)| &\leq |V(x) - V(z)| + |V(z) - V(y)| \\ &\leq \sup\{|V(x) - V(z)|, \|x - z\| \leq t_1, \|x\|, \|z\| \leq R\} \\ &\quad + \sup\{|V(z) - V(y)|, \|z - y\| \leq t_2, \|z\|, \|y\| \leq R\}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\sup\{|V(x)-V(y)|,&\|x-y\|\le t_1+t_2,\|x\|,\|y\|\le R\}\\ &\le \sup\{|V(x)-V(z)|,\|x-z\|\le t_1,\|x\|,\|z\|\le R\}\\ &+\sup\{|V(z)-V(y)|,\|z-y\|\le t_2,\|y\|,\|z\|\le R\};\end{aligned}$$

tức là

$$\overline{\omega}(t_1+t_2,R)\le\overline{\omega}(t_1,R)+\overline{\omega}(t_2,R).$$

Từ công thức (3.4) ta có (3.3). □

3.2. Ứng dụng của nghiệm β-nhớt đối với bài toán điều khiển tối ưu

Ta xét bài toán điều khiển tối ưu (3.1)-(3.2). Ta xác định hàm $H : X \times X_\beta^* \to \mathbb{R}$ cho bởi

$$H(x,p)=\sup_{\alpha\in\mathcal{U}}\{-\langle p,g(x,\alpha)\rangle - f(x,\alpha)\}.$$

Mệnh đề 3.3.

(a) *Nếu (B1) đúng thì*

$$\begin{cases}|H(x,p)-H(x,q)|\le L\|p-q\|,\\ |H(x,p)-H(y,p)|\le L_0\|p\|\|x-y\|+\omega(\|x-y\|,\|x\|\vee\|y\|).\end{cases}\tag{3.5}$$

(b) *Nếu (B2) đúng thì*

$$\begin{cases}|H(x,p)-H(x,q)|\le (L+L_0\|x\|)\|p-q\|,\\ |H(x,p)-H(y,p)|\le L_0\|p\|\|x-y\|+\omega(\|x-y\|,\|x\|\vee\|y\|).\end{cases}\tag{3.6}$$

Chứng minh.

(a) Với mọi $\alpha\in\mathcal{U}$ và $x,y\in X$, ta có

$$\begin{aligned}-\langle p,g(x,\alpha)\rangle - f(x,\alpha) &= \langle q-p,g(x,\alpha)\rangle - \langle q,g(x,\alpha)\rangle - f(x,\alpha)\\ &\le L\|p-q\|+\sup_{\alpha\in\mathcal{U}}\{-\langle q,g(x,\alpha)\rangle - f(x,\alpha)\}.\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{U}}\{-\langle p, g(x,\alpha)\rangle - f(x,\alpha)\} \le L\|p-q\| + \sup_{\alpha\in\mathcal{U}}\{-\langle q, g(x,\alpha)\rangle - f(x,\alpha)\};$$

tức là

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{U}}\{-\langle p, g(x,\alpha)\rangle - f(x,\alpha)\} - \sup_{\alpha\in\mathcal{U}}\{-\langle q, g(x,\alpha)\rangle - f(x,\alpha)\} \le L\|p-q\|.$$

Tương tự ta có

$$\sup_{\alpha\in\mathcal{U}}\{-\langle q, g(x,\alpha)\rangle - f(x,\alpha)\} - \sup_{\alpha\in\mathcal{U}}\{-\langle p, g(x,\alpha)\rangle - f(x,\alpha)\} \le L\|p-q\|.$$

Do đó $|H(x,p) - H(x,q)| \le L\|p-q\|$. Chúng tôi chúng minh bất đẳng thức thứ hai trong (3.5). Với mọi $\alpha \in \mathcal{U}$ và $x, y \in X$, ta có

$$\begin{aligned} -\langle p, g(x,\alpha)\rangle - f(x,\alpha) &= \langle p, g(y,\alpha) - g(x,\alpha)\rangle + f(y,\alpha) - f(x,\alpha) \\ &\quad - \langle p, g(y,\alpha)\rangle - f(y,\alpha) \\ &\le \|p\|L_0\|x-y\| + \omega(\|x-y\|, \|x\| \vee \|y\|) + H(y,p). \end{aligned}$$

Khi đó

$$H(x,p) \le \|p\|L_0\|x-y\| + \omega(\|x-y\|, \|x\| \vee \|y\|) + H(y,p).$$

Bằng biến đổi tương tự ta có được

$$|H(x,p) - H(y,p)| \le L_0\|p\|\|x-y\| + \omega(\|x-y\|, \|x\| \vee \|y\|).$$

(b) Chứng minh tương tự (a) ta được kết quả. □

Định lý 3.2. *Cho X là không gian Banach với chuẩn β-trơn. Giả sử (B1) hoặc (B2) đúng. Khi đó, hàm giá trị V là nghiệm β-nhớt duy nhất của*

$$\lambda V(x) + H(x, DV(x)) = 0. \tag{3.7}$$

Chứng minh. Chứng minh được thực hiện tương tự theo [19, Định lý 3.10], hàm giá trị V là một nghiệm β-nhớt của phương trình (3.7). Bây giờ ta chỉ cần chứng minh tính duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình (3.7).

Giả sử rằng u, v là hai nghiệm β-nhớt của phương trình (3.7). Lấy $\alpha, \varepsilon > 0$ và xác định

$$\Psi(x,y) = v(x) - u(y) - \frac{1}{2\varepsilon}\|x-y\|^2 - \alpha(\mu(x)+\mu(y)),$$

trong đó hàm μ thỏa mãn

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{|v(x)| + |u(x)|}{\mu(x)} = 0. \tag{3.8}$$

Theo định nghĩa của Ψ, $\lim\limits_{\|x\|,\|y\|\to\infty} \Psi(x,y) = -\infty$, do đó tồn tại số thực $R = R_\alpha > 0$ sao cho

$$\Psi(0,0) > \sup_{\|x\|,\|y\|\geq R} \Psi(x,y) + 2.$$

Đặt $S = \big\{(x,y) \in X \times X : \|x\|, \|y\| \leq R\big\}$. Theo Mệnh đề 1.3, tồn tại hàm $\phi(x,y) \in \mathcal{D}_\beta(X \times X)$ trên $X \times X$ sao cho $\Psi(x,y) - \phi(x,y)$ đạt cực đại toàn cục trên S tại $(\overline{x},\overline{y})$ và $\|\phi\|_\infty \leq \varepsilon$, $\|\nabla_\beta \phi\|_\infty \leq \varepsilon$. Nếu ta lấy $\varepsilon < 1$, thì $(\overline{x},\overline{y})$ là điểm trong của S. Thật vậy, nếu $(\overline{x},\overline{y}) \in \partial S$, thì $\Psi(\overline{x},\overline{y}) - \phi(\overline{x},\overline{y}) \geq \Psi(0,0) - \phi(0,0)$, điều này dẫn đến

$$2 < \Psi(0,0) - \Psi(\overline{x},\overline{y}) \leq \phi(0,0) - \phi(\overline{x},\overline{y}).$$

Điều này là không thể từ $\|\phi\|_\infty \leq \varepsilon$. Chú ý rằng $(\overline{x},\overline{y})$ phụ thuộc vào ε, α và ϕ. Mặt khác,

$$2\Psi(\overline{x},\overline{y}) - 2\phi(\overline{x},\overline{y}) \geq \Psi(\overline{x},\overline{x}) - \phi(\overline{x},\overline{x}) + \Psi(\overline{y},\overline{y}) - \phi(\overline{y},\overline{y})$$

$$\Leftrightarrow v(\overline{x}) - u(\overline{y}) - \frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2 - 2\phi(\overline{x},\overline{y}) \geq v(\overline{y}) - u(\overline{x}) - \phi(\overline{x},\overline{x}) - \phi(\overline{y},\overline{y})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2 \leq v(\overline{x}) - v(\overline{y}) + u(\overline{x}) - u(\overline{y}) + \phi(\overline{x},\overline{x}) - 2\phi(\overline{x},\overline{y}) + \phi(\overline{y},\overline{y})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2 \leq \overline{w}(\|\overline{x}-\overline{y}\|, R) + 4\varepsilon. \tag{3.9}$$

Từ $\overline{w}$ là môđun, $\overline{w}(\|\overline{x}-\overline{y}\|, R) \leq \overline{w}(2R,R)$, khi đó từ (3.9) ta có

$$\|\overline{x}-\overline{y}\|^2 \leq \varepsilon(\overline{w}(2R,R) + 4\varepsilon).$$

Cho $\varepsilon \to 0$, thì $\|\overline{x}-\overline{y}\| \to 0$, kết hợp với (3.9) ta có

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2 = 0.$$

Mặt khác, $\Psi(x,y) - \phi(x,y)$ đạt cực đại đại phương tại $(\overline{x},\overline{y})$, khi đó ta lấy $y = \overline{y}$, hàm

$$v(x) - \frac{1}{2\varepsilon}\|x-\overline{y}\|^2 - \alpha\mu(x) - \phi(x,\overline{y})$$

đạt cực đại toàn cục tại $x = \overline{x}$. Theo định nghĩa của nghiệm β-nhớt,

$$\lambda v(\overline{x}) + H(\overline{x}, \frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|(\nabla_\beta\|\cdot\|)(\overline{x}-\overline{y}) + \alpha\nabla_\beta\mu(\overline{x}) + \nabla_\beta\phi_x(\overline{x},\overline{y})) \leq 0.$$

Tương tự, nếu ta lấy $x = \overline{x}$ thì

$$u(y) + \frac{1}{2\varepsilon}\|\overline{x}-y\|^2 + \alpha\mu(y) + \phi(\overline{x},y)$$

đạt cực tiểu địa phương tại $y = \overline{y}$. Cũng theo định nghĩa của nghiệm β-nhớt,

$$\lambda u(\overline{y}) + H(\overline{y}, \frac{1}{\varepsilon}(\overline{x}-\overline{y})(\nabla_\beta\|\cdot\|)(\overline{x}-\overline{y}) - \alpha\mu(\overline{y}) - \nabla_\beta\phi_y(\overline{x},\overline{y})) \geq 0.$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}\lambda(v(\overline{x}) - u(\overline{y})) \leq{}& H(\overline{y}, \frac{1}{\varepsilon}(\overline{x}-\overline{y})(\nabla_\beta\|\cdot\|)(\overline{x}-\overline{y}) - \alpha\nabla_\beta\,\mu(\overline{y}) - \nabla_\beta\phi_y(\overline{x},\overline{y}))\\ &- H(\overline{x}, \frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|(\nabla_\beta\|\cdot\|)(\overline{x}-\overline{y}) + \alpha\nabla_\beta\mu(\overline{x}) + \nabla_\beta\phi_x(\overline{x},\overline{y})).\end{aligned}$$

Nếu (B1) đúng thì lấy $\mu(x) = \exp(\widetilde{m}(1+\|x\|^2)^{1/2})$ với $m < \widetilde{m} < \lambda/L$. Khi đó (3.8) thỏa mãn. Ta cũng có

$$\|\nabla_\beta\mu(x)\| = \widetilde{m}\mu(x)\left\|\frac{\nabla_\beta\|\cdot\|^2(x)}{2(1+\|x\|^2)^{1/2}}\right\| \leq \widetilde{m}\mu(x)\frac{2\|x\|}{2(1+\|x\|^2)^{1/2}} \leq \widetilde{m}\mu(x).$$

Kết hợp với (3.5), ta có

$$\begin{aligned}&H(\overline{y}, \frac{1}{\varepsilon}(\overline{x}-\overline{y})(\nabla_\beta\|\cdot\|)(\overline{x}-\overline{y}) - \alpha\nabla_\beta\,\mu(\overline{y}) - \nabla_\beta\phi_y(\overline{x},\overline{y}))\\ &\quad - H(\overline{x}, \frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|(\nabla_\beta\|\cdot\|)(\overline{x}-\overline{y}) + \alpha\nabla_\beta\mu(\overline{x}) + \nabla_\beta\phi_x(\overline{x},\overline{y}))\\ &\quad \leq |H(\overline{y}, \frac{1}{\varepsilon}(\overline{x}-\overline{y})(\nabla_\beta\|\cdot\|)(\overline{x}-\overline{y})) - H(\overline{x}, \frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|(\nabla_\beta\|\cdot\|)(\overline{x}-\overline{y}))| \qquad (3.10)\\ &\quad + L\|\alpha\nabla_\beta\,\mu(\overline{y}) + \nabla_\beta\phi_y(\overline{x},\overline{y})\| + L\|\alpha\nabla_\beta\,\mu(\overline{x}) + \nabla_\beta\phi_x(\overline{x},\overline{y})\|\\ &\quad \leq L_0\frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2 + \omega(\|\overline{x}-\overline{y}\|, R) + 2L\varepsilon + \alpha\widetilde{m}L(\mu(\overline{x}) + \mu(\overline{y}))\end{aligned}$$

$$\le L_0\frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2+\delta+C_{\delta,R}\|\overline{x}-\overline{y}\|+2L\varepsilon+\alpha\widetilde{m}L(\mu(\overline{x})+\mu(\overline{y}))$$
$$\le L_0\frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2+\delta+\frac{\varepsilon C_{\delta,R}^2}{2}+\frac{\|\overline{x}-\overline{y}\|^2}{2\varepsilon}+2L\varepsilon+\alpha\widetilde{m}L(\mu(\overline{x})+\mu(\overline{y})),$$

trong đó δ là hằng số dương bất kỳ $C_{\delta,R}$ là hằng số dương phụ thuộc vào δ và R. Ta cố định $x\in X$, lấy $\alpha>0$, $R\ge R_\alpha\ge\|x\|$. Theo (3.10) và định nghĩa của $\overline{x},\overline{y}$ ta có

$$v(x)-u(x)-2\alpha\mu(x)-\phi(x,x)=\Psi(x,x)-\phi(x,x)\le\Psi(\overline{x},\overline{y})-\phi(\overline{x},\overline{y})$$
$$\le v(\overline{x})-u(\overline{y})-\frac{1}{2\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2-\alpha(\mu(\overline{x})+\mu(\overline{y}))+\varepsilon$$
$$\le C_1\frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{\varepsilon C_{\delta,R}^2}{2\lambda}+\frac{2L\varepsilon}{\lambda}-\alpha\left(1-\frac{\widetilde{m}L}{\lambda}\right)\mu(\overline{x})+\mu(\overline{y}))$$
$$\le C_1\frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{\varepsilon C_{\delta,R}^2}{2\lambda}+\frac{2L\varepsilon}{\lambda}.$$

Với $C_1=\frac{L_0}{\lambda}+\frac{1}{2\lambda}-\frac{1}{2}$, lấy $\varepsilon\to0$, thì $\delta\to0$ và cuối cùng $\alpha\to0$ thì $v(x)\le u(x)$.

Nếu (B2) đúng, thì ta lấy $\mu(x)=(\sqrt{1+\|x\|^2})^{\widetilde{m}}$ với $m<\widetilde{m}<\frac{\lambda}{L_0}$. Khi đó (3.8) thỏa mãn. Ta cũng có

$$\|\nabla_\beta\mu(x)\|=\widetilde{m}(\sqrt{1+\|x\|^2})^{\widetilde{m}-1}\left\|\frac{\nabla_\beta\|\cdot\|^2(x)}{2(1+\|x\|^2)^{1/2}}\right\|$$
$$\le\widetilde{m}(\sqrt{1+\|x\|^2})^{\widetilde{m}-1}\frac{2\|x\|}{2(1+\|x\|^2)^{1/2}}\le\widetilde{m}(\sqrt{1+\|x\|^2})^{\widetilde{m}-1}.$$

Kết hợp những kết quả trên với (3.6), ta có được

$$H(\overline{y},\frac{1}{\varepsilon}(\overline{x}-\overline{y})(\nabla_\beta\|\cdot\|)(\overline{x}-\overline{y})-\alpha\nabla_\beta\,\mu(\overline{y})-\nabla_\beta\phi_y(\overline{x},\overline{y}))$$
$$-H(\overline{x},\frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|(\nabla_\beta\|\cdot\|)(\overline{x}-\overline{y})+\alpha\nabla_\beta\mu(\overline{x})+\nabla_\beta\phi_x(\overline{x},\overline{y}))$$
$$\le|H(\overline{y},\frac{1}{\varepsilon}(\overline{x}-\overline{y})(\nabla_\beta\|\cdot\|)(\overline{x}-\overline{y}))-H(\overline{x},\frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|(\nabla_\beta\|\cdot\|)(\overline{x}-\overline{y}))|$$
$$+(L+L_0\|\overline{y}\|)\|\alpha\nabla_\beta\,\mu(\overline{y})+\nabla_\beta\phi_y(\overline{x},\overline{y})\|+(L+L_0\|\overline{x}\|)\|\alpha\nabla_\beta\,\mu(\overline{x})$$
$$+\nabla_\beta\phi_x(\overline{x},\overline{y})\|$$
$$\le L_0\frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2+\omega(\|\overline{x}-\overline{y}\|,R)+\alpha\widetilde{m}L_0((\sqrt{1+\|\overline{x}\|^2})^{\widetilde{m}}+(\sqrt{1+\|\overline{y}\|^2})^{\widetilde{m}})$$
$$+\alpha\widetilde{m}L((\sqrt{1+\|\overline{x}\|^2})^{\widetilde{m}-1}+(\sqrt{1+\|\overline{y}\|^2})^{\widetilde{m}-1})+2(L+L_0R)\alpha\varepsilon$$

$$
\begin{aligned}
&\le L_0\frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2+\delta+C_{\delta,R}\|\overline{x}-\overline{y}\|+\alpha\widetilde{m}L_0((\sqrt{1+\|\overline{x}\|^2})^{\widetilde{m}}+(\sqrt{1+\|\overline{y}\|^2})^{\widetilde{m}})\\
&+\alpha\widetilde{m}L((\sqrt{1+\|\overline{x}\|^2})^{\widetilde{m}-1}+(\sqrt{1+\|\overline{y}\|^2})^{\widetilde{m}-1})+2(L+L_0R)\alpha\varepsilon\\
&\le L_0\frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2+\delta+\frac{\varepsilon C_{\delta,R}^2}{2}+\frac{\|\overline{x}-\overline{y}\|^2}{2\varepsilon}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+\alpha\widetilde{m}L_0((\sqrt{1+\|\overline{x}\|^2})^{\widetilde{m}}+(\sqrt{1+\|\overline{y}\|^2})^{\widetilde{m}})\\
&+\alpha\widetilde{m}L((\sqrt{1+\|\overline{x}\|^2})^{\widetilde{m}-1}+(\sqrt{1+\|\overline{y}\|^2})^{\widetilde{m}-1})+2(L+L_0R)\alpha\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Bây giờ ta lấy $x\in X$, cho $\alpha>0$ là số cố định và $R\ge R_\alpha\ge\|x\|$. Theo (3.10) và cách xác định của $\overline{x},\overline{y}$ ta có

$$
\begin{aligned}
v(x)&-u(x)-2\alpha\mu(x)-\phi(x,x)=\Psi(x,x)-\phi(x,x)\\
&\le\Psi(\overline{x},\overline{y})-\phi(\overline{x},\overline{y})\\
&\le v(\overline{x})-u(\overline{y})-\frac{1}{2\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2-\alpha(\mu(\overline{x})+\mu(\overline{y}))+\varepsilon\\
&\le C_1\frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{\varepsilon C_{\delta,R}^2}{2\lambda}+\frac{2(L+L_0R)\alpha\varepsilon}{\lambda}+\varepsilon\\
&-\alpha\left(1-\frac{\widetilde{m}L_0}{\lambda}\right)(\mu(\overline{x})+\mu(\overline{y}))\\
&\qquad\qquad\qquad+\frac{\alpha\widetilde{m}L}{\lambda}\left((\sqrt{1+\|\overline{x}\|^2})^{\widetilde{m}-1}+(\sqrt{1+\|\overline{y}\|^2})^{\widetilde{m}-1}\right)\\
&\le C_1\frac{1}{\varepsilon}\|\overline{x}-\overline{y}\|^2+\frac{\delta}{\lambda}+\frac{\varepsilon C_{\delta,R}^2}{2\lambda}+\frac{2(L+L_0R)\alpha\varepsilon}{\lambda}+\varepsilon+\alpha C.
\end{aligned}
$$

Với $C_1=\frac{L_0}{\lambda}+\frac{1}{2\lambda}-\frac{1}{2}$ và C là hằng số độc lập với α và R. Lấy $\varepsilon\to0$, thì $\delta\to0$ và cho $\alpha\to0$ ta có được $v(x)\le u(x)$. □

Một ứng dụng quan trọng của Định lý 3.1 là kết quả sau, kết quả này cho chúng ta điều kiện cần và điều kiện đủ của điều khiển tối ưu. Chú ý rằng kết quả này của chúng tôi được phát biểu trong không gian vô hạn chiều.

Định lý 3.3. *Với mọi $\alpha(\cdot)\in\mathcal{U}$, hàm sau là không giảm:*

$$
s\mapsto\int_0^s e^{-\lambda t}f(y_x(t,\alpha),\alpha(t))dt+e^{-\lambda s}V(y_x(s,\alpha)),\quad s\in[0,\infty).
$$

Hơn nữa, hàm này là hằng số khi và chỉ khi điều khiển $\alpha(\cdot)$ là tối ưu cho vị trí ban đầu x.

Chứng minh. Lấy $h(s) := \displaystyle\int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t,\alpha),\alpha(t))dt + e^{-\lambda s} V(y_x(s,\alpha)), s \in [0,\infty)$.

Với mọi $\alpha(\cdot) \in \mathcal{U}$, theo Định lý 3.1 với vị trí ban đầu $y_x(s,\alpha)$ và $\varepsilon > 0$ ta có

$$
\begin{aligned}
V(y_x(s,\alpha)) &\le \int_0^\varepsilon e^{-\lambda t} f(y_{y_x(s,\alpha)}(t,\alpha),\alpha(t+s))dt + e^{-\lambda\varepsilon} V(y_{y_x(s,\alpha)}(\varepsilon,\alpha)) \\
&= \int_0^\varepsilon e^{-\lambda t} f(y_x(t+s),\alpha(t+s))dt + e^{-\lambda\varepsilon} V(y_{y_x(s,\alpha)}(\varepsilon,\alpha)).
\end{aligned}
$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức với $e^{-\lambda s} > 0$ ta có

$$
\begin{aligned}
e^{-\lambda s} V(y_x(s,\alpha)) &\le \int_0^\varepsilon e^{-\lambda(t+s)} f(y_x(t+s),\alpha(t+s))dt \\
&\qquad + e^{-\lambda(\varepsilon+s)} V(y_{y_x(s,\alpha)}(\varepsilon,\alpha)) \\
&= \int_s^{\varepsilon+s} e^{-\lambda t} f(y_x(t),\alpha(t))dt + e^{-\lambda(\varepsilon+s)} V(y_{y_x(s,\alpha)}(\varepsilon,\alpha)).
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Cộng $\displaystyle\int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t),\alpha(t))dt$ vào hai vế của bất đẳng thức (3.11), ta được

$$
\begin{aligned}
&e^{-\lambda s} V(y_x(s,\alpha)) + \int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t),\alpha(t))dt \\
&\qquad \le \int_0^{\varepsilon+s} e^{-\lambda t} f(y_x(t),\alpha(t))dt + e^{-\lambda(\varepsilon+s)} V(y_x(\varepsilon+s,\alpha)),
\end{aligned}
$$

trong đó chúng tôi sử dụng tính chất $y_x(\varepsilon+s,\alpha) = y_{y_x(s,\alpha)}(\varepsilon,\alpha)$ do đó

$$h(s) \le h(s+\varepsilon).$$

Kết luận đầu tiên của Định lý 3.3 được chứng minh.
Nếu

$$h(s) = \int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t,\alpha),\alpha(t))dt + e^{-\lambda s} V(y_x(s,\alpha)), s \in [0,\infty)$$

là một hàm hằng thì $h(s) = h(0) = V(x)$. Do đó

$$V(x) = \int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t,\alpha),\alpha(t))dt + e^{-\lambda s} V(y_x(s,\alpha)), s \in [0,\infty).$$

Như vậy, $\alpha(\cdot)$ là tối ưu với thời điểm ban đầu x.

Ngược lại, nếu $\alpha(\cdot)$ là điều khiển tối ưu với x thì

$$h(0) = V(x) = \int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t,\alpha),\alpha(t))dt + e^{-\lambda s} V(y_x(s,\alpha)) = h(s),$$

điều này dẫn đến h là một hàm hằng. □

Một kết quả khác của chúng tôi đó là chúng tôi đã đưa ra điều kiện đủ cho điều khiển tối ưu bằng khái niệm nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi.

Mệnh đề 3.4. *Nếu V là hàm Lipschitz địa phương và hầu khắp s tồn tại $p \in D_\beta^{\pm} V(y_x(s))$ thỏa mãn bất đẳng thức*

$$\lambda V(y_x(s)) - \langle p, y_x'(s)\rangle - f(y_x(s),\alpha(s)) \leq 0,$$

thì $\alpha(\cdot)$ là điều khiển tối ưu với x, trong đó $D_\beta^{\pm} V(z) = D_\beta^{+} V(z) \cup D_\beta^{-} V(z)$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh rằng hàm

$$h(s) = \int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t,\alpha),\alpha(t))dt + e^{-\lambda s} V(y_x(s,\alpha)), \quad s \in [0,\infty) \tag{3.12}$$

là không tăng, tức là $h'(s) \leq 0$.

Từ V là hàm Lipschitz địa phương, h là khả vi hầu khắp nơi và

$$h'(s) = e^{-\lambda s}\Bigg(f(y_x(s,\alpha),\alpha(s)) - \lambda V(y_x(s,\alpha)) + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{V(y_x(s+\varepsilon)) - V(y_x(s))}{\varepsilon}\Bigg).$$

Nếu $p \in D_\beta^{+} V(y_x(s))$ tồn tại hàm $g : X \to \mathbb{R}$ Lipschitz địa phương tại $y_x(s)$ sao cho g là β-khả vi tại $y_x(s)$, $\nabla_\beta g(x) = p$ và $V - g$ đạt cực đại địa phương tại $y_x(s)$. Giả sử rằng $V(y_x(s)) = g(y_x(s))$. Khi đó

$$V(y_x(s+\varepsilon)) - V(y_x(s)) \leq g(y_x(s+\varepsilon)) - g(y_x(s)) \tag{3.13}$$

với ε đủ nhỏ. Ta có biểu diễn sau

$$g(y_x(s+\varepsilon)) - g(y_x(s)) = g(y_x(s) + \varepsilon y_x'(s)) - g(y_x(s)) - \varepsilon\langle p, y_x'(s)\rangle$$

$$+ g(y_x(s+\varepsilon)) - g(y_x(s) + \varepsilon y'_x(s)) + \varepsilon\langle p, y'_x(s)\rangle. \qquad (3.14)$$

Mặt khác, ta có

$$\frac{\|g(y_x(s+\varepsilon)) - g(y_x(s) + \varepsilon y'_x(s))\|}{\varepsilon} \leq K \left\| \frac{y_x(s+\varepsilon) - y_x(s)}{\varepsilon} - y'_x(s) \right\|,$$

trong đó K là hằng số Lipschitz địa phương của g. Cho $\varepsilon \to 0$ ta có

$$K \left\| \frac{y_x(s+\varepsilon) - y_x(s)}{\varepsilon} - y'_x(s) \right\| \to 0,$$

từ đó ta có

$$\frac{\|g(y_x(s+\varepsilon)) - g(y_x(s) + \varepsilon y'_x(s))\|}{\varepsilon} \to 0.$$

Theo (3.14) và g là khả vi β-nhớt tại $y_x(s)$, ta có

$$\frac{g(y_x(s+\varepsilon)) - g(y_x(s))}{\varepsilon} \to \langle p, y'_x(s)\rangle \text{ khi } \varepsilon \to 0.$$

Theo (3.13) ta có

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{V(y_x(s+\varepsilon)) - V(y_x(s))}{\varepsilon} \leq \langle p, y'_x(s)\rangle.$$

Do đó

$$h'(s) \leq e^{-\lambda s}\left(f(y_x(s,\alpha), \alpha(s)) - \lambda V(y_x(s,\alpha)) + \langle p, y'_x(s)\rangle\right) \leq 0.$$

Nếu $p \in D^-_\beta V(y_x(s))$, thì tồn tại hàm Lipschitz địa phương g sao cho g là β-trơn tại $y_x(s)$, $\nabla_\beta g(y_x(s)) = p$ và $V - g$ đạt cực tiểu địa phương tại $y_x(s)$. Giả sử rằng $V(y_x(s)) = g(y_x(s))$. Khi đó

$$V(y_x(s+\varepsilon)) - V(y_x(s)) \geq g(y_x(s+\varepsilon)) - g(y_x(s)) \text{ với } \varepsilon \text{ đủ nhỏ.} \qquad (3.15)$$

Từ g là β-trơn tại $y_x(s)$, ta có

$$\frac{g(y_x(s+\varepsilon)) - g(y_x(s))}{\varepsilon} \to \langle p, y'_x(s)\rangle \text{ khi } \varepsilon \to 0.$$

Từ (3.15) và để ý rằng $\varepsilon < 0$, ta có

$$\lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{V(y_x(s+\varepsilon)) - V(y_x(s))}{\varepsilon} \leq \lim_{\varepsilon\to 0^-} \frac{g(y_x(s+\varepsilon)) - g(y_x(s))}{\varepsilon} = \langle p, y'_x(s)\rangle.$$

Như vậy

$$h'(s) \leq e^{-\lambda s} \left(f(y_x(s,\alpha), \alpha(s)) - \lambda V(y_x(s,\alpha)) + \langle p, y'_x(s) \rangle \right) \leq 0.$$

Do đó, hàm h là không tăng. Theo Định lý 3.3, h không giảm. Như vậy h là một hàm hằng, khi đó $\alpha(\cdot)$ là điều khiển tối ưu với x. $\square$

Mệnh đề sau đưa ra một kết quả quan trọng về điều kiện cần cho điều khiển tối ưu. Cách tiếp cận của chúng tôi là sử dụng dưới và trên vi phân β-nhớt.

Mệnh đề 3.5. *Nếu V là hàm Lipschitz địa phương; $\alpha(\cdot)$ là tối ưu với x, thì*

$$\lambda V(y_x(s)) - \langle p, y'_x(s) \rangle - f(y_x(s), \alpha(s)) = 0$$

đúng với mọi $p \in D^{\pm}_{\beta} V(y_x(s))$ với hầu khắp s.

Chứng minh. Nếu $p \in D^{+}_{\beta} V(y_x(s))$ và s là một thời điểm, thì

$$I := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V(y_x(s+\varepsilon)) - V(y_x(s))}{\varepsilon}$$

tồn tại. Chúng ta chia hai vế của (3.13) cho $\varepsilon < 0$ là lấy $\varepsilon \to 0$ ta được

$$I \geq \langle p, y'_x(s) \rangle.$$

Từ h được xác định bởi (3.12) là hàm hằng theo Định lý 3.3, khi đó

$$0 = e^{\lambda s} h'(s) \geq f(y_x(s,\alpha), \alpha(s)) - \lambda V(y_x(s,\alpha)) + \langle p, y'_x(s) \rangle \text{ với hầu khắp } s.$$

Điều này dẫn đến

$$\lambda V(y_x(s,\alpha)) \geq f(y_x(s,\alpha), \alpha(s)) + \langle p, y'_x(s) \rangle \text{ với hầu khắp } s.$$

Mặt khác, từ V là nghiệm dưới β-nhớt của $\lambda V(x) + H(x, DV(x)) = 0$ khi đó

$$\lambda V(y_x(s,\alpha)) \leq f(y_x(s,\alpha), \alpha(s)) + \langle p, y'_x(s) \rangle.$$

Như vậy

$$\lambda V(y_x(s,\alpha)) = f(y_x(s,\alpha), \alpha(s)) + \langle p, y'_x(s) \rangle.$$

Với $p \in D^{-}_{\beta} V(y_x(s))$, ta biến đổi tương tự như trên. Như vậy mệnh đề được chứng minh. $\square$

Từ những kết quả ở trên ta có định lý sau

Định lý 3.4. *Giả sử rằng V là hàm Lipschitz địa phương và $D^{\pm}_{\beta}V(y_x(s)) \neq \emptyset$ với hầu khắp nơi $s > 0$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(a) $\alpha(\cdot)$ *là tối ưu với* x;

(b) *với hầu khắp nơi $s > 0$ và với mọi $p \in D^{\pm}_{\beta}V(y_x(s))$,*

$$\lambda V(y_x(s)) - \langle p, y_x'(s)\rangle - f(y, \alpha) = 0; \tag{3.16}$$

(c) *với hầu khắp nơi $s > 0$ tồn tại $p \in D^{\pm}_{\beta}V(y_x(s))$ sao cho (3.16) đúng.*

Chứng minh. Trước hết, (b) được suy ra từ (a) theo Mệnh đề 3.5. Và (c) dễ dàng suy ra từ (b). Hơn nữa, (a) là hệ quả trực tiếp của (c) theo Mệnh đề 3.4. Vậy định lý được chứng minh. □

Kết luận chương 3

Trong chương này, chúng tôi đã chứng minh được hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu là nghiệm β-nhớt duy nhất của phương trình Hamilton-Jacobi. So sánh với kết quả trong [19] thì nghiệm β-nhớt của chúng tôi là không bị chặn trong khi nghiệm β-nhớt được trình bày trong [19] là bị chặn. Chúng tôi cũng đã đưa ra một điều kiện cần và điều kiện đủ cho một lớp bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn bằng cách sử dụng nghiệm β-nhớt. Tương tự ta có thể đưa ra những kết quả về bài toán điều khiển tối ưu với thời gian hữu hạn, thời gian tối thiểu và chiết khấu thời gian tối thiểu.

Ngoài ra, nghiệm nhớt còn là công cụ quan trọng trong việc nghiên cứu các bài toán điều khiển ngẫu nhiên với nhiều ứng dụng trong kỹ thuật, kinh tế, tài chính và sinh thái (xem [28, 33]). Trong kết quả của mình về bài toán thu hoạch của hệ sinh thái ngẫu nhiên (xem [5]), chúng tôi đã chứng minh được hàm giá trị của bài toán điều khiển ngẫu nhiên là nghiệm nhớt của một phương trình Hamilton-Jacobi-Bellman tương ứng.

Chương 4

PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON-JACOBI VỚI BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU TRÊN KHỚP NỐI VỚI HÀM CHI PHÍ KHÔNG BỊ CHẶN

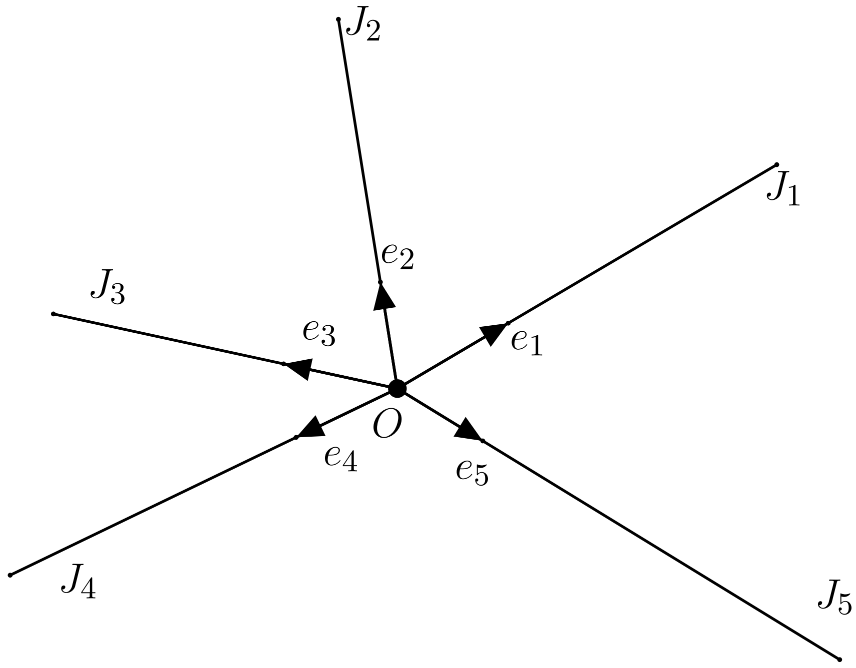
Nội dung của chương này là nghiên cứu nghiệm nhớt cho hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu trên các khớp nối. Hiện nay có rất nhiều hình thức mạng trên thế giới ví dụ như các mạng thông tin (internet, mạng xã hội,...), mạng lưới kinh tế (quan hệ kinh doanh giữa các công ty, chuyển phát bưu chính và tuyến đường giao thông,...), mạng lưới sinh học (mạng lưới thần kinh, mạch máu,...). Chẳng hạn mạng lưới giao thông, mỗi cạnh như một tuyến đường các, cạnh gặp nhau tại một điểm O. Các mạng như vậy ta có thể xem như là một khớp nối. Chúng tôi đã chỉ ra rằng hàm giá trị là nghiệm nhớt duy nhất của một phương trình Hamilton-Jacobi tương ứng và đưa ra những tính chất về hàm giá trị đó trên khớp nối. Ngoài ra nghiệm nhớt được sử dụng để thiết lập điều kiện cần và điều kiện đủ cho một điều khiển tối ưu trong một lớp bài toán điều khiển tối ưu. Các kết quả trong chương được viết dựa trên bài báo [3] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

4.1. Bài toán điều khiển tối ưu trên các khớp nối

4.1.1. Khớp nối

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu dựa trên mô hình ở trong [35]. Cụ thể là các khớp nối trên $\mathbb{R}^d$ với N nửa đường thẳng gọi là cạnh $(1 < N < d)$. Với mỗi $i = 1, \cdots, N$, e_i được ký hiệu là véctơ đơn vị thứ i. Cạnh được ký hiệu bởi $(J_i)_{i=1,\cdots,N}$ trong đó J_i là nửa đường thẳng đóng $\mathbb{R}^+ e_i$. Nửa đường thẳng J_i được gắn với nhau tại đỉnh O để tạo thành khớp nối $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{N} J_i.$$



Hình 4.1: Khớp nối ($N = 5$)

Khoảng cách hình học $d(x, y)$ giữa hai điểm x, y của $\mathcal{G}$ được xác định bởi

$$d(x,y) = \begin{cases} |x - y| & \text{nếu } x, y \text{ nằm trong cùng một cạnh } J_i, \\ |x| + |y| & \text{nếu } x, y \text{ nằm ở hai cạnh khác nhau } J_i \text{ và } J_j. \end{cases}$$

4.1.2. Bài toán điều khiển tối ưu

Chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn có chi phí và quy hoạch động khác nhau cho mỗi cạnh. Với $i = 1, \cdots, N$,

- tập các điều khiển trên J_i được ký hiệu bởi A_i,
- hệ được điều khiển bởi một hệ động lực f_i,
- chi phí hoạt động ℓ_i.

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu các giả thiết được sử dụng trong chương này.

(H0) **(Tập điều khiển)** Cho A là một không gian mêtric (ta có thể lấy $A = \mathbb{R}^d$). Với $i = 1, \cdots, N$, A_i là một tập con compact khác rỗng của A và các tập A_i là rời nhau.

(H1) **(Động lực)** Với $i = 1, \cdots, N$, hàm $f_i : J_i \times A_i \to \mathbb{R}$ là liên tục và bị chặn bởi hằng số M. Hơn nữa, có một hằng số $L > 0$ sao cho

$$|f_i(x, a) - f_i(y, a)| \leq L|x - y| \text{ với mọi } x, y \in J_i, a \in A_i.$$

Tiếp theo, chúng tôi ký hiệu $F_i(x)$ là tập $\{f_i(x,a)e_i : a \in A_i\}$.

(H2) **(Chi phí)** Với $i = 1, \cdots, N$, hàm $\ell_i : J_i \times A_i \to \mathbb{R}$ là liên tục và tồn tại hằng số $C, m \geq 0$, với $0 \leq m < \frac{\lambda}{M}$ và một môđun địa phương liên tục $\omega(\cdot,\cdot)$ sao cho

$$|\ell_i(x,a) - \ell_i(y,a)| \leq \omega(|x-y|, |x| \vee |y|) \text{ với mọi } x, y \in J_i, a \in A_i,$$

$$|\ell_i(x,a)| \leq Ce^{m|x|} \text{ với mọi } x \in J_i, a \in A_i,$$

(H2)* **(Chi phí)** Với $i = 1, \cdots, N$, hàm $\ell_i : J_i \times A_i \to \mathbb{R}$ là liên tục và có một hằng số $C, m \geq 0$ và một môđun địa phương liên tục $\omega(\cdot,\cdot)$ sao cho

$$|\ell_i(x,a) - \ell_i(y,a)| \leq \omega(|x-y|, |x| \vee |y|) \text{ với mọi } x, y \in J_i, a \in A_i,$$

$$|\ell_i(x,a)| \leq C(1+|x|)^m \text{ với mọi } x \in J_i, a \in A_i.$$

Chú ý rằng số M ở trong (H2) và (H2)* được dùng trong (H1)

(H3) **(Tính lồi của động lực và chi phí)** Với $i = 1, \cdots, N$, tập hợp

$$FL_i(x) = \{(f_i(x,a)e_i, \ell_i(x,a)) : a \in A_i\}$$

là tập đóng và lồi trong $\mathbb{R}^3$.

(H4) **(Tính điều khiển mạnh)** Tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho

$$[-\delta e_i, \delta e_i] \subset F_i(O) = \{f_i(O,a)e_i : a \in A_i\}.$$

Nhận xét 4.1. Trong giả thiết (H0) các tập A_i rời nhau không phải là một hạn chế. Thật vậy, nếu A_i không rời nhau, khi đó ta định nghĩa $\widetilde{A}_i = \{i\} \times A_i$ và $\widetilde{f}_i(x,\widetilde{a}) = f_i(x,a)$, $\widetilde{\ell}_i(x,\widetilde{a}) = \ell_i(x,a)$ nếu $x \in J_i$ và $\widetilde{a} = (i,a)$ với $a \in A_i$.

Đặt

$$\mathcal{M} = \{(x,a) : x \in \mathcal{G}, a \in A_i \text{ nếu } x \in J_i \backslash \{O\} \text{ và } a \in \cup_{i=1}^N A_i \text{ nếu } x = O\}.$$

Khi đó $\mathcal{M}$ là tập đóng. Ta cũng định nghĩa hàm trên $\mathcal{M}$ bởi:

$$\text{với mọi } (x,a) \in \mathcal{M}, \quad f(x,a) = \begin{cases} f_i(x,a)e_i & \text{nếu } x \in J_i \backslash \{O\}, \\ f_i(O,a)e_i & \text{nếu } x = O \text{ và } a \in A_i. \end{cases}$$

Hàm f là liên tục trên $\mathcal{M}$ từ các tập A_i rời nhau. Lấy $\widetilde{F}(x)$ được xác định bởi

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} F_i(x) & \text{nếu } x \in J_i \backslash \{O\}, \\ \cup_{i=1}^N F_i(O) & \text{nếu } x = O. \end{cases}$$

Với $x \in \mathcal{G}$, tập quỹ đạo chấp nhận được bắt đầu từ x là

$$Y_x = \left\{ y_x \in Lip(\mathbb{R}^+; \mathcal{G}) : \left| \begin{array}{l} \dot{y}_x(t) \in \widetilde{F}(y_x(t)) \text{ hầu khắp } t > 0 \\ y_x(0) = x \end{array} \right. \right\}.$$

Theo [4, Định lý 1.2], có một nghiệm y_x có thể được liên kết với một điều khiển cho trước. Tập quỹ đạo điều khiển chấp nhận được bắt đầu từ x

$$\mathcal{T}_x = \Big\{ (y_x, \alpha) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{M}) : y_x \in Lip(\mathbb{R}^+; \mathcal{G}) \text{ và}$$
$$y_x(t) = x + \int_0^t f(y_x(s), \alpha(t)) ds \Big\}.$$

Chú ý rằng, nếu $(y_x, \alpha) \in \mathcal{T}_x$, thì $y_x \in Y_x$. Từ đây, chúng tôi ký hiệu y_x bởi $y_{x,\alpha}$ nếu $(y_x, \alpha) \in \mathcal{T}_x$.

Hàm chi phí. Chi phí với quỹ đạo $(y_x, \alpha) \in \mathcal{T}_x$ là

$$J(x; (y_x, \alpha)) = \int_0^\infty \ell(y_x(t), \alpha(t)) e^{-\lambda t} dt,$$

trong đó $\lambda > 0$ là một số thực và hàm chi phí ℓ được định nghĩa trên $\mathcal{M}$ bởi

$$\forall (x, a) \in \mathcal{M}, \quad \ell(x, a) = \begin{cases} \ell_i(x, a) & \text{nếu } x \in J_i \backslash \{O\}, \\ \ell_i(O, a) & \text{nếu } x = O \text{ và } a \in A_i. \end{cases}$$

Hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn là

$$v(x) = \inf_{(y_x, \alpha) \in \mathcal{T}_x} J(x; (y_x, \alpha)). \tag{4.1}$$

Ví dụ 4.1. Xét khớp nối $\mathcal{G} = J_1 \cup J_2$ trong đó $J_1 = \mathbb{R}^+ e_1 = (-\infty, 0]$ và $J_2 = \mathbb{R}^+ e_2 = [0, \infty)$. Tập điều khiển là $A_i = [-1, 1] \times \{i\}$ với $i \in \{1, 2\}$. Tập $(f(x, a), \ell(x, a))$

$$= \begin{cases} (f_i(x, (a_i, i)) e_i, \ell_i(x, (a_i, i))) & \text{nếu } x \in J_i \backslash \{O\} \text{ và } a = (a_i, i) \in A_i, \\ (f_i(O, (a_i, i)) e_i, \ell_i(O, (a_i, i))) & \text{nếu } x = O \text{ và } a = (a_i, i) \in A_i, \end{cases}$$

trong đó $f_i(x,(a_i,i)) = xa_i$ và $\ell_1(x,(a_1,1)) = x, \ell_2(x,(a_2,2)) = 2x$. Hàm giá trị cho bởi

$$J(x;(y_x,\alpha)) = \int_0^\infty \ell(y_x(t),\alpha(t))e^{-2t}dt.$$

Khi đó ta có $y_x(t) = x\exp\left(\int_0^t a_i(s)ds\right)$ nếu $x \in J_i$ và

$$J(x;(y_x,\alpha)) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-2t}x\exp\left(\int_0^t a_i(s)ds\right)dt & \text{nếu } x \in J_1 \\ \int_0^\infty e^{-2t}2x\exp\left(\int_0^t a_i(s)ds\right)dt & \text{nếu } x \in J_2. \end{cases}$$

Tính toán trực tiếp ta có

$$\begin{aligned} v(x) &= \begin{cases} \int_0^\infty e^{-2t}x\exp\left(\int_0^t ds\right)dt & \text{nếu } x \in J_1 \\ \int_0^\infty e^{-2t}2x\exp\left(-\int_0^t ds\right)dt & \text{nếu } x \in J_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^\infty e^{-t}xdt & \text{nếu } x \in J_1 \\ \int_0^\infty e^{-3t}2xdt & \text{nếu } x \in J_2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x & \text{nếu } x \in J_1 \\ \frac{2x}{3} & \text{nếu } x \in J_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Rõ ràng hàm giá trị không bị chặn trên $\mathcal{G}$ và không khả vi tại O.

Chúng ta thiết lập một số tính chất của hàm giá trị. Cụ thể, nguyên lý sau có thể đạt được theo cách tương tự như trong [36, Mệnh đề 6.2]; [2, tr. 2578].

Mệnh đề 4.1. *Giả sử (H0), (H1), (H2) hoặc (H2)* thỏa mãn. Ta có nguyên lý quy hoạch động:*

$$v(x) = \inf_{(y_x,\alpha)\in\mathcal{T}_x}\left\{\int_0^t \ell(y_x(s),\alpha(s))e^{-\lambda s}ds + e^{-\lambda t}v(y_x(t))\right\} \quad \text{với mọi} \quad t \geq 0.$$

Mệnh đề 4.2. *Tồn tại một hằng số $K > 0$ sao cho các khẳng định sau đúng.*

(a) *Giả sử (H0), (H1), (H2), (H3). Khi đó hàm giá trị v thỏa mãn*

$$|v(x)| \leq Ke^{m|x|}, \quad \forall x \in \mathcal{G}.$$

(b) *Giả sử (H0), (H1), (H2)*, (H3). Khi đó hàm giá trị v thỏa mãn*

$$|v(x)| \leq K(1+|x|)^m, \quad \forall x \in \mathcal{G}.$$

Chứng minh.

(a) Theo giả thiết (H1), ta có đánh giá

$$|y_x(t)| \leq |x| + Mt, \quad (y_x, \alpha) \in \mathcal{T}_x,\ t \in [0, \infty).$$

Từ đó

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq \int_0^\infty |\ell(y_x(t), \alpha(t))|\, e^{-\lambda t} dt \leq \int_0^\infty C e^{m|y_x(t)|} e^{-\lambda t} dt \\ &\leq \int_0^\infty C e^{m(|x|+Mt)} e^{-\lambda t} dt \leq C e^{m|x|} \int_0^\infty e^{-(\lambda - mM)t} dt = \frac{C}{\lambda - mM} e^{m|x|}. \end{aligned}$$

(b) Ta dùng chứng minh tương tự như trong (a). □

Bổ đề 4.1 ([35, Bổ đề 2.7]). *Với các giả thiết (H1) và (H4), tồn tại hai số dương r_0 và C sao cho với mọi $x_1, x_2 \in B(O, r_0) \cap \mathcal{G}$, tồn tại $(y_{x_1, \alpha_{x_1,x_2}}, \alpha_{x_1,x_2}) \in \mathcal{T}_{x_1}$ và $\tau_{x_1,x_2} \leq C d(x_1, x_2)$ sao cho $y_{x_1}(\tau_{x_1,x_2}) = x_2$.*

4.1.3. Một số tính chất của hàm giá trị tại đỉnh

Mệnh đề 4.3. *Giả sử (H0), (H1), (H2) hoặc (H2)*, (H3). Khi đó hàm giá trị v là liên tục trên $\mathcal{G}$.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh trong trường hợp (H0), (H1), (H2), (H3) được thỏa mãn. Lời chứng minh tương tự khi (H0), (H1), (H2)*, (H3) đúng.

Theo Bổ đề 4.1 tồn tại một số dương r_0 và một hằng số C_0 sao cho với mọi $x, z \in B_O(r_0) \cap \mathcal{G}$, tồn tại $\alpha_{x,z}$ với $(y_x, \alpha_{x,z}) \in \mathcal{T}_x$ và $\tau_{x,z} \leq C d(x, z)$ với $y_{x,\alpha_{x,z}}(\tau_{x,z}) = z$.
Với mọi $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, lấy $T_\varepsilon > 0$ đủ lớn sao cho

$$\frac{2Ke^{mr_0}}{\lambda - mM} e^{-(\lambda - mM)T_\varepsilon} < \varepsilon$$

và do tính liên tục của ω, ta có thể lấy $\rho_\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho $e^{LT_\epsilon}\rho_\varepsilon \leq r_0/4$ và

$$\frac{1}{\lambda} w(e^{LT_\epsilon}\rho_\varepsilon, r_0 + MT_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Lấy $x \in \mathcal{G}$. Ta chứng minh rằng $\limsup_{z \to x} v(z) \leq v(x)$. Bất đẳng thức $\liminf_{z \to x} v(z) \geq v(x)$ được chứng minh một cách tương tự.

Với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại một quỹ đạo $\overline{\alpha}$ với $(y_x, \overline{\alpha}) \in \mathcal{T}_x$ sao cho $J(x, \overline{\alpha}) < v(x) + \varepsilon$. Ta chia làm hai trường hợp: (a) $x \in \overline{B_O(r_0/2)}$ và (b) $x \notin \overline{B_O(r_0/2)}$.

(a) Nếu $x \in \overline{B_O(r_0/2)}$, khi đó nếu $z \in B_O(r_0)$ ta lấy $\widetilde{\alpha}$ sao cho $(y_z, \widetilde{\alpha}) \in \mathcal{T}_z$ với:

$$\widetilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \alpha_{z,x}(t) & \text{nếu } t < \tau_{z,x}, \\ \overline{\alpha}(t - \tau_{z,x}) & \text{nếu } t > \tau_{z,x}. \end{cases}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} J(z, \widetilde{\alpha}) &= \int_0^{\infty} \ell(y_z(t), \widetilde{\alpha}(t)) e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^{\tau_{z,x}} \ell(y_z(t), \widetilde{\alpha}(t)) e^{-\lambda t} dt + \int_{\tau_{z,x}}^{\infty} \ell(y_z(t), \widetilde{\alpha}(t)) e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^{\tau_{z,x}} \ell(y_z(t), \widetilde{\alpha}(t)) e^{-\lambda t} dt + e^{-\lambda \tau_{z,x}} \int_0^{\infty} \ell(y_z(t + \tau_{z,x}), \widetilde{\alpha}(t + \tau_{z,x})) e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_0^{\tau_{z,x}} \ell(y_z(t), \widetilde{\alpha}(t)) e^{-\lambda t} dt + e^{-\lambda \tau_{z,x}} \int_0^{\infty} \ell(y_x(t), \overline{\alpha}(t)) e^{-\lambda t} dt. \end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned} |J(z, \widetilde{\alpha}) - J(x, \overline{\alpha})| &\le \int_0^{\tau_{z,x}} |\ell(y_z(t), \widetilde{\alpha}(t))| e^{-\lambda t} dt \\ &\quad + (1 - e^{-\lambda \tau_{z,x}}) \left| \int_0^{\infty} \ell(y_x(t), \overline{\alpha}(t)) e^{-\lambda t} dt \right| \\ &\le \int_0^{\tau_{z,x}} C e^{m(r_0 + Mt)} e^{-\lambda t} dt + (1 - e^{-\lambda \tau_{z,x}}) |J(x, \overline{\alpha})| \\ &\le \frac{C e^{m r_0}}{\lambda - mM} (1 - e^{(\lambda - mM)\tau_{z,x}}) + \lambda \tau_{z,x} |J(x, \overline{\alpha})| \\ &\le C e^{m r_0} \tau_{z,x} + \lambda \tau_{z,x} |J(x, \overline{\alpha})| \le \overline{C} d(z, x), \end{aligned}$$

trong đó $\overline{C} = (C e^{m r_0} + \lambda |J(x, \overline{\alpha})|) C_0$. Do vậy ta có

$$v(z) \le J(z, \widetilde{\alpha}) \le v(x) + \varepsilon + \overline{C} d(z, x).$$

Cho ε dần đến 0, ta có được $\limsup_{z \to x} v(z) \le v(x)$ với $x \in \overline{B_O(r_0/2)}$.

(b) Nếu $x \notin \overline{B_O(r_0/2)}$. Ta giả sử rằng $x \in J_1$ và $|x| > r_0/2$. Khi đó với z đủ gần x, z nằm trong J_1. Do đó, điều khiển $\overline{\alpha}$ cũng là chấp nhận được với z tại ít nhất một thời điểm hữu hạn, (lần đầu T khi $y_{x,\overline{\alpha}}(t)$ hoặc $y_{z,\overline{\alpha}}(t)$ chạm

O, nếu nó tồn tại). Ta sẽ xét trường hợp $y_{x,\overline{\alpha}}(T) = O$ hoặc $y_{z,\overline{\alpha}}(T) = O$, nếu T tồn tại.

(b1) Nếu $T > T_\varepsilon$ hoặc T không tồn tại, khi đó cả $y_{z,\overline{\alpha}}(t)$ và $y_{x,\overline{\alpha}}(t)$ nằm trong J_1 với $t < T_\varepsilon$. Với $\widetilde{\alpha}$ bất kỳ thỏa mãn $(y_z, \widetilde{\alpha}) \in \mathcal{T}_z$ sao cho $\widetilde{\alpha}(t) = \overline{\alpha}(t)$ với $t < T_\varepsilon$, ta có

$$\begin{aligned}
|J(z,\widetilde{\alpha}) - J(x,\widetilde{\alpha})| \le &\int_0^{T_\varepsilon} |\ell(y_z(t),\widetilde{\alpha}(t)) - \ell(y_x(t),\widetilde{\alpha}(t))| e^{-\lambda t} dt \\
&+ \int_{T_\varepsilon}^{\infty} K e^{m|y_z(t)|} e^{-\lambda t} dt + \int_{T_\varepsilon}^{\infty} K e^{m|y_x(t)|} e^{-\lambda t} dt \\
\le &\int_0^{T_\varepsilon} \omega(e^{Lt}|z-x|, r_0 + Mt) e^{-\lambda t} dt + 2\int_{T_\varepsilon}^{\infty} K e^{m(r_0+Mt)} e^{-\lambda t} dt \\
\le &\frac{1}{\lambda}\omega(e^{LT_\epsilon}|z-x|, r_0 + MT_\epsilon) + 2\int_{T_\varepsilon}^{\infty} K e^{m(r_0+Lt)} e^{-\lambda t} dt \\
= &\frac{1}{\lambda}\omega(e^{LT_\epsilon}|z-x|, r_0 + MT_\epsilon) + \frac{2Ke^{mr_0}}{\lambda - mM} e^{-(\lambda - mM)T_\varepsilon} < 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Trong các đánh giá trên chúng tôi sử dụng các kết quả:

$$|y_z(t) - y_x(t)| \le e^{Lt}|z-x| \quad \text{với mọi} \quad x, z \in \mathcal{G},$$

điều này có thể đạt được nhờ bổ đề Gronwall. Như vậy

$$v(z) \le J(z,\widetilde{\alpha}) \le v(x) + 3\varepsilon.$$

(b2) Nếu $y_{x,\overline{\alpha}}(T) = O$, khi đó ta xác định một điều khiển $\widetilde{\alpha}$ sao cho $(y_z, \widetilde{\alpha}) \in \mathcal{T}_z$ như sau

$$\widetilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \overline{\alpha}(t) & \text{nếu } t < T, \\ \alpha_{y_{z,\overline{\alpha}(T)},O}(t - T) & \text{nếu } T < t < T + \tau_{y_{z,\overline{\alpha}(T)},O}, \\ \overline{\alpha}(t - \tau_{y_{z,\overline{\alpha}(T)},O}) & \text{nếu } t > T + \tau_{y_{z,\overline{\alpha}(T)},O}. \end{cases}$$

Chú ý rằng điều này có thể thực hiện được từ $|x - z| \le \rho_\epsilon$ nó kéo theo

$$|y_{z,\overline{\alpha}}(T)| \le e^{LT_\epsilon}|x - z| \le r_0/4.$$

Từ đó ta được

$$v(z) \le J(z,\widetilde{\alpha}) \le v(x) + 3\varepsilon.$$

(b3) Nếu $y_{z,\overline{\alpha}}(T) = O$, khi đó ta xây dựng một điều khiển $\widetilde{\alpha}$ với $(y_z, \widetilde{\alpha}) \in \mathcal{T}_z$ như sau:

$$\widetilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \overline{\alpha}(t) & \text{nếu } t < T, \\ \alpha_{O,y_{z,\overline{\alpha}}(T)}(t-T) & \text{nếu } T < t < T + \tau_{O,y_{z,\overline{\alpha}}(T)}, \\ \overline{\alpha}(t - \tau_{O,y_{z,\overline{\alpha}}(T)}) & \text{nếu } t > T + \tau_{O,y_{z,\overline{\alpha}}(T)}. \end{cases}$$

Điều này có thể thực hiện được từ $|x - z| \leq \rho_\varepsilon$ do vậy

$$|y_{z,\overline{\alpha}}(T)| \leq e^{LT_\epsilon}|x - z| \leq r_0/4.$$

Khi đó

$$v(z) \leq J(z, \widetilde{\alpha}) \leq v(x) + 3\varepsilon.$$

□

Bổ đề 4.2. *Với các giả thiết (H0), (H1), (H2) hoặc* $(H2)^*$*, (H3), (H4), tồn tại* $\varepsilon > 0$ *sao cho* $v|_{J_i}$ *là liên tục Lipschitz trên* $J_i \cap B(O, \varepsilon)$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 4.1 và định nghĩa hàm giá trị ta có

$$\begin{aligned} v(x) - v(z) &\leq \int_0^{\tau_{x,z}} \ell(y_{x,\alpha_{x,z}})e^{-\lambda t}dt + \left|v(z)(e^{-\lambda\tau_{x,z}} - 1)\right| \\ &\leq \int_0^{\tau_{x,z}} Ce^{m|y_{x,\alpha_{x,z}}(t)|}e^{-\lambda t}dt + |v(z)|(1 - e^{-\lambda\tau_{x,z}}) \\ &\leq \int_0^{\tau_{x,z}} Ce^{m(|x|+Mt)}e^{-\lambda t}dt + |v(z)|(1 - e^{-\lambda\tau_{x,z}}) \\ &\leq \int_0^{\tau_{x,z}} Ce^{m|x|}dt + |v(z)|(1 - e^{-\lambda\tau_{x,z}}) \\ &\leq Ce^{m|x|}\tau_{x,z} + |v(z)|(1 - e^{-\lambda\tau_{x,z}}). \end{aligned}$$

Từ $x \in J_i \cap B(O, \varepsilon)$, v là bị chặn trên $J_i \cap B(O, \varepsilon)$ và $1 - e^{-\lambda\tau_{x,z}}$ là bị chặn bởi $\lambda\tau_{x,z}$, nên tồn tại một hằng số $\overline{C}$ sao cho

$$v(x) - v(z) \leq \overline{C}\tau_{x,z} \leq \overline{C}C|x - z|.$$

Bất đẳng thức cuối cùng đạt được nhờ Bổ đề 4.1. Bất đẳng thức

$$v(z) - v(x) \leq \overline{C}C|x - z|$$

đạt được một cách tương tự. □

Ta định nghĩa Hamiltonian tiếp tuyến tại đỉnh O bởi

$$H_O^T = -\min_{i=1,\cdots,N} \min_{a \in A_i;\ f_i(O,a)=0} \{\ell_i(O,a)\}. \tag{4.2}$$

Bổ đề 4.3. *Với các giả thiết (H0), (H1), (H2) hoặc* $(H2)^*$, *(H3), (H4), hàm giá trị v thỏa mãn*

$$v(O) \leq -\frac{H_O^T}{\lambda}.$$

Chứng minh. Từ (4.2), tồn tại $j \in \{1, \cdots, N\}$ và $a_j \in A_j$, $f_j(O,a) = 0$ sao cho

$$H_O^T = -\min_{i=1,\cdots,N} \min_{a \in A_i;\ f_i(O,a)=0} \{\ell_i(O,a)\} = -\ell_j(O,a_j).$$

Lấy điều khiển α xác định bởi $\alpha(s) \equiv a_j$ với mọi s. Khi đó

$$v(O) \leq J(O,\alpha) = \int_0^\infty \ell_j(O,a_j)e^{-\lambda s}ds = \frac{\ell_j(O,a_j)}{\lambda} = -\frac{H_O^T}{\lambda}.$$

Kết luận được thực hiện. □

4.2. Phương trình Hamilton-Jacobi và nghiệm nhớt

4.2.1. Hàm thử

Để định nghĩa nghiệm nhớt trên tập $\mathcal{G}$, trước hết chúng ta cần định nghĩa một lớp hàm thử chấp nhận được.

Định nghĩa 4.1 ([4])**.** Hàm $\varphi : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ là một hàm thử chấp nhận được nếu

- φ là liên tục trên $\mathcal{G}$ và C^1 trên $\mathcal{G}\backslash\{O\}$,
- với mọi j, $j = 1, \cdots, N$, $\varphi|_{J_j} \in C^1(J_j)$.

Tập tất cả các hàm thử chấp nhận được được ký hiệu bởi $\mathcal{R}(\mathcal{G})$. Nếu $\varphi \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ và $\zeta \in \mathbb{R}$, thì $D\varphi(x,\zeta e_i)$ được xác định $D\varphi(x,\zeta e_i) = \zeta \frac{d\varphi}{dx_i}(x)$ nếu $x \in J_i\backslash\{O\}$ và $D\varphi(O,\zeta e_i) = \zeta \lim_{h\to 0^+} \frac{d\varphi}{dx_i}(he_i)$.

4.2.2. Trường véctơ

Với $i = 1, \cdots, N$, ta ký hiệu $F_i^+(O)$ và $FL_i^+(O)$ là các tập hợp

$$F_i^+(O) = F_i(O) \cap \mathbb{R}^+ e_i, \quad FL_i^+(O) = FL_i(O) \cap (\mathbb{R}^+ e_i \times \mathbb{R}),$$

Các tập này khác rỗng nhờ giả thiết (H4). Chú ý rằng $0 \in \cap_{i=1}^N F_i(O)$. Từ giả thiết (H3), các tập này là compact và lồi. Với $x \in \mathcal{G}$, các tập $F(x)$ và $FL(x)$ được xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} F_i(x) & \text{nếu } x \text{ nằm trong cạnh } J_i \backslash \{O\}, \\ \cup_{i=1}^N F_i^+(O) & \text{nếu } x = O \end{cases}$$

và

$$FL(x) = \begin{cases} FL_i(x) & \text{nếu } x \text{ nằm trong cạnh } J_i \backslash \{O\}, \\ \cup_{i=1}^N FL_i^+(O) & \text{nếu } x = O. \end{cases}$$

4.2.3. Định nghĩa nghiệm nhớt

Bây giờ ta định nghĩa nghiệm nhớt của phương trình

$$\lambda u(x) + \sup_{(\zeta,\xi) \in FL(x)} \{-Du(x,\zeta) - \xi\} = 0 \quad \text{trên } \mathcal{G}. \tag{4.3}$$

Định nghĩa 4.2 ([4]).

- Một hàm nửa liên tục trên $u : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ là một nghiệm nhớt dưới của (4.3) trên $\mathcal{G}$ nếu với mọi $x \in \mathcal{G}$, mọi $\varphi \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ sao cho $u - \varphi$ đạt cực đại địa phương tại điểm x, thì

$$\lambda u(x) + \sup_{(\zeta,\xi) \in FL(x)} \{-D\varphi(x,\zeta) - \xi\} \leq 0.$$

- Một hàm nửa liên tục dưới $u : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ là một nghiệm nhớt trên của (4.3) trên $\mathcal{G}$ nếu với mọi $x \in \mathcal{G}$, mọi $\varphi \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ sao cho $u - \varphi$ đạt cực tiểu địa phương tại x, thì

$$\lambda u(x) + \sup_{(\zeta,\xi) \in FL(x)} \{-D\varphi(x,\zeta) - \xi\} \geq 0.$$

- Một hàm liên tục $u : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ là nghiệm nhớt của (4.3) trên $\mathcal{G}$ nếu nó vừa là nghiệm nhớt dưới vừa là nghiệm nhớt trên của (4.3) trên $\mathcal{G}$.

Nhận xét 4.2. Tại điểm $x \in J_i \backslash \{O\}$, khái niệm nghiệm nhớt dưới (tương ứng nghiệm nhớt trên) trong Định nghĩa 4.2 là tương đương với định nghĩa nghiệm nhớt dưới (tương ứng nghiệm nhớt trên) của

$$\lambda u(x) + \sup_{a \in A_i} \{-f_i(x,a) Du(x) - \ell_i(x,a)\} = 0.$$

4.2.4. Hàm Hamilton

Ta định nghĩa hàm Hamilton $H_i : J_i \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bởi

$$H_i(x,p) = \max_{a \in A_i} \{-p f_i(x,a) - \ell_i(x,a)\}$$

và hàm Hamilton $H_O : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ bởi

$$H_O(p_1, \cdots, p_N) = \max_{i=1,\cdots,N} \max_{a \in A_i;\ f_i(O,a) \geq 0} \{-p_i f_i(O,a) - \ell_i(O,a)\}.$$

Với định nghĩa của $FL_i(x)$ (nói riêng của $FL_i^+(O)$), tính liên tục của dữ kiện và tính compact của A_i, ta thấy rằng định nghĩa sau là tương đương với Định nghĩa 4.2.

Định nghĩa 4.3 ([4]).

- Một hàm nửa liên tục trên $u : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ là một nghiệm nhớt dưới của (4.3) trên $\mathcal{G}$ nếu với mọi $x \in \mathcal{G}$, mọi $\varphi \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ sao cho $u - \varphi$ đạt cực đại địa phương tại x, thì

$$\lambda u(x) + H_i\left(x, \frac{d\varphi}{dx_i}(x)\right) \leq 0 \quad \text{nếu } x \in J_i \backslash \{O\},$$
$$\lambda u(O) + H_O\left(\frac{d\varphi}{dx_1}(O), \cdots, \frac{d\varphi}{dx_N}(O)\right) \leq 0.$$

- Một hàm nửa liên tục dưới $u : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ là một nghiệm nhớt trên của (4.3) trên $\mathcal{G}$ nếu với mọi $x \in \mathcal{G}$, mọi $\varphi \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ sao cho $u - \varphi$ đạt cực tiểu địa phương tại x, thì

$$\lambda u(x) + H_i\left(x, \frac{d\varphi}{dx_i}(x)\right) \geq 0 \quad \text{nếu } x \in J_i \backslash \{O\},$$
$$\lambda u(O) + H_O\left(\frac{d\varphi}{dx_1}(O), \cdots, \frac{d\varphi}{dx_N}(O)\right) \geq 0.$$

Thực hiện các đánh giá cổ điển ta đạt được các kết quả sau.

Mệnh đề 4.4. *Các khẳng định sau đúng với mọi* $i \in i, \cdots, N$; $x, y \in J_i$ *và* $p, q \in \mathbb{R}$.

(a) *Nếu (H1) và (H2) đúng, thì*

$$* \begin{cases} |H_i(x,p) - H_i(x,q)| \leq M|p-q|, \\ |H_i(x,p) - H_i(y,p)| \leq L|p||x-y| + \omega(|x-y|, |x| \vee |y|). \end{cases}$$

(b) *Nếu (H1) và (H2)** *đúng, thì*

$$\begin{cases} |H_i(x,p) - H_i(x,q)| \leq (M + L|x|)|p-q|, \\ |H_i(x,p) - H_i(y,p)| \leq L|p||x-y| + \omega(|x-y|, |x| \vee |y|). \end{cases}$$

Để chứng minh hàm giá trị là nghiệm nhớt của các phương trình Hamilton-Jacobi tương ứng, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm và tính chất sau: Với mọi $x \in \mathcal{G}$,

$$\widetilde{f}(x) = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^d : \begin{array}{c} \exists (y_{x,n}, \alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ (y_{x,n}, \alpha_n) \in \mathcal{T}_x, \\ \exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \left| \begin{array}{l} t_n \to 0^+ \text{ và} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} f(y_{x,n}(t), \alpha_n(t))dt = \eta \end{array} \right. \right\}$$

và

$$\widetilde{f\ell}(x) =$$

$$\left\{ (\eta, \mu) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \begin{array}{c} \exists (y_{x,n}, \alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ (y_{x,n}, \alpha_n) \in \mathcal{T}_x, \\ \exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \left| \begin{array}{l} t_n \to 0^+ \text{ và} \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} f(y_{x,n}(t), \alpha_n(t))dt = \eta \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \ell(y_{x,n}(t), \alpha_n(t))dt = \mu \end{array} \right. \right\}.$$

Mệnh đề 4.5. *Giả sử (H0), (H1), (H2) (hoặc (H2)***) và (H3) đúng. Hàm giá trị* v *được xác định trên* (4.1) *là nghiệm nhớt của*

$$\lambda u(x) + \sup_{(\zeta,\xi)\in\widetilde{f\ell}(x)} \{-Du(x,\zeta) - \xi\} = 0 \text{ trên } \mathcal{G}$$

trong đó định nghĩa về nghiệm nhớt như ở Định nghĩa 4.2, bằng cách thay $FL(x)$ *bởi* $\widetilde{f\ell}(x)$.

Chứng minh. Chứng minh được đưa ra giống như ở [2, Định lý 3.1]. So sánh với [2], một sự khác biệt trong công thức của chúng tôi là hàm giá trị có thể không bị chặn. Để khắc phục điều này chúng tôi thiết lập các đánh giá bị chặn địa phương của hàm chi phí ℓ.

Hàm giá trị v là một nghiệm nhớt dưới: Ta chỉ cần chứng minh rằng v là một nghiệm nhớt dưới tại $x = O$. Lấy $\varphi \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ sao cho $v - \varphi$ đạt cực đại tại điểm O, tức là

$$v(O) - z(z) \geq \varphi(O) - \varphi(z), \quad \forall z \in B_O(r) \cap \mathcal{R}(\mathcal{G}).$$

Với $(\zeta, \xi) \in \widetilde{f\ell}(O)$, tồn tại α_n và $t_n \to 0^+$ sao cho

$$\begin{aligned}
\zeta &= \lim_{n\to\infty} \frac{y_{O,\alpha_n}(t_n)}{t_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} f(y_{O,\alpha_n}(t), \alpha_n(t))dt, \\
\xi &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \ell(y_{O,\alpha_n}(t), \alpha_n(t))dt.
\end{aligned}$$

Lấy $T > 0$ sao cho $y(t) = y_{O,\alpha}(t) \in B_O(r) \cap \mathcal{R}(\mathcal{G})$ với mọi $t \leq T$ và mọi điều khiển α sao cho $(y_O, \alpha) \in \mathcal{T}_O$. Từ Mệnh đề 4.1

$$\begin{aligned}
\varphi(O) - \varphi(y_{O,\alpha_n}(t)) &\leq v(O) - v(y_{O,\alpha_n}(t)) \\
&\leq \int_0^t \ell(y_{O,\alpha_n}(s), \alpha_n(s))e^{-\lambda s}ds + v(y_{O,\alpha_n}(t))(e^{-\lambda t} - 1).
\end{aligned}$$

Theo Định nghĩa 4.1

$$-D\varphi(O, \zeta) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(O) - \varphi(t_n\zeta)}{t_n}.$$

Từ $t_n\zeta = y_{O,\alpha_n}(t_n) + o(t_n)$ và φ là liên tục Lipschitz, ta kết luận rằng

$$-D\varphi(O, \zeta) = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(O) - \varphi(y_{O,\alpha_n}(t_n))}{t_n}.$$

Mặt khác,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \ell(y_{O,\alpha_n}(s), \alpha_n(s))e^{-\lambda s}ds = \zeta.$$

Do đó

$$-D\varphi(O, \zeta) - \zeta \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}(v(y_{O,\alpha_n}(t_n))(e^{-\lambda t_n} - 1)) = -\lambda v(O).$$

Từ bất đẳng thức trên đúng với bất kỳ $(\zeta, \xi) \in \widetilde{f\ell}(O)$, ta kết luận rằng v là một nghiệm nhớt dưới tại $x = O$.

Hàm giá trị v là một nghiệm nhớt trên. Lấy $\varphi \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ sao cho $v - \varphi$ đạt cực tiểu địa phương tại O, tức là

$$v(O) - v(z) \leq \varphi(O) - \varphi(z), \quad \forall z \in B_O(r) \cap \mathcal{R}(\mathcal{G}).$$

Ta có thể giả sử rằng $\varphi(O) = v(O)$ và $v(z) \geq \varphi(z), \forall z \in B_O(r) \cap \mathcal{R}(\mathcal{G})$. Từ Mệnh đề 4.1, với $\varepsilon > 0$ và $t > 0$, tồn tại α (phụ thuộc vào ε và t) sao cho

$$v(O) + t\varepsilon \geq \int_0^t \ell(y_{O,\alpha}(s), \alpha(s))e^{-\lambda s}ds + e^{-\lambda t}v(y_{O,\alpha}(t)). \tag{4.4}$$

Lấy $s \in [0, 1]$. Khi đó $y_{O,\alpha}(s)$ là hàm bị chặn. Theo giả thiết (H2) (hoặc (H2)*) thì $|\ell(y_{O,\alpha}(s), \alpha(s))|$ bị chặn. Do đó, tồn tại hằng số K thỏa mãn $|\ell(y_{O,\alpha}(s), \alpha(s))| \leq K$ với mọi $s \in [0, 1]$. Ta có

$$\left| \int_0^t \ell(y_{O,\alpha}(s), \alpha(s))e^{-\lambda s}ds - \int_0^t \ell(y_{O,\alpha}(s), \alpha(s))ds \right| \leq K \int_0^t (1 - e^{-\lambda s})ds.$$

Từ

$$\frac{1}{t}\int_0^t (1 - e^{-\lambda s})ds = \frac{-1 + e^{-\lambda t} + \lambda t}{\lambda t} \to 0 \text{ khi } t \to 0,$$

ta có

$$\int_0^t \ell(y_{O,\alpha}(s), \alpha(s))e^{-\lambda s}ds \geq \int_0^t \ell(y_{O,\alpha}(s), \alpha(s))ds + o(t).$$

Theo (4.4) ta có

$$\varphi(O) + t\varepsilon \geq \int_0^t \ell(y_{O,\alpha}(s), \alpha(s))ds + e^{-\lambda t}v(y_{O,\alpha}(t)) + o(t).$$

Với t đủ nhỏ ta có

$$\begin{aligned}\varphi(O) - \varphi(y_{O,\alpha}(t)) - \int_0^t \ell(y_{O,\alpha}(s), \alpha(s))ds + (1 - e^{-\lambda t})v(y_{O,\alpha}(t))\\ \geq -t\varepsilon + o(t).\end{aligned}$$

Tồn tại một dãy $t_n \to 0$ và α_n, ζ và ξ sao cho $\zeta = \lim_{n\to\infty} \frac{y_{O,\alpha_n}(t_n)}{t_n}$ và $\xi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \ell(y_{O,\alpha_n}(s), \alpha_n(s))ds$. Do đó $(\zeta, \xi) \in \widetilde{f\ell}(O) \subset T_O(\mathcal{G}) \times \mathbb{R}$.

Rõ ràng ta có

$$-\varepsilon + o(1) \leq \frac{\varphi(O) - \varphi(y_{O,\alpha_n}(t_n))}{t_n} - \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} \ell(y_{O,\alpha_n}(s), \alpha_n(s))ds$$

$$+\frac{(1-e^{-\lambda t_n})}{t_n}v(y_{O,\alpha_n}(t_n)).$$

Theo trên $\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(O)-\varphi(y_{O,\alpha_n}(t_n))}{t_n}=-D\varphi(O,\zeta)$. Do đó

$$\lambda v(O)+\sup_{(\eta,\mu)\in\widetilde{f\ell}(O)}\{-D\varphi(O,\eta)-\eta\}\geq\lambda v(O)-D\varphi(O,\zeta)-\xi\geq-\varepsilon.$$

từ ε bất kỳ ta có

$$\lambda v(O)+\sup_{(\eta,\mu)\in\widetilde{f\ell}(O)}\{-D\varphi(O,\eta)-\eta\}\geq 0.$$

Ta kết luận rằng v là một nghiệm nhớt trên tại $x=O$. □

Theo [4, Bổ đề 2.3], ta có bổ đề sau.

Bổ đề 4.4. *Giả sử (H0), (H1), (H2) (hoặc (H2)*) và (H3) đúng. Với mọi hàm $\varphi\in\mathcal{R}(\mathcal{G})$ và $x\in\mathcal{G}$*

$$\sup_{(\zeta,\xi)\in\widetilde{f\ell}(x)}\{-Du(x,\zeta)-\xi\}=\sup_{(\zeta,\xi)\in FL(x)}\{-Du(x,\zeta)-\xi\}.$$

Từ Mệnh đề 4.5 và Bổ đề 4.4, ta có định lý sau.

Định lý 4.1. *Giả sử (H0), (H1), (H2) (hoặc (H2)*) và (H3) đúng, hàm giá trị v được xác định trong* (4.1) *là một nghiệm nhớt của* (4.3) *trong $\mathcal{G}$.*

4.3. Nguyên lý so sánh và tính duy nhất

Định lý 4.2.

(a) *Giả sử (H0), (H1), (H2) và (H3) đúng. Lấy $u,v:\mathcal{G}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn*

$$|u(x)|\leq Ke^{m|x|},\ |v(x)|\leq Ke^{m|x|}$$

với hằng số $K>0$, $x\in\mathcal{G}$, với $0\leq m<\frac{\lambda}{M}$ và u,v liên tục trên $\mathcal{G}$. Hơn nữa tồn tại $r_i>0$ sao cho $u|_{J_i},v|_{J_i}$ là liên tục Lipschitz trên $J_i\cap B(O,r_i)$. Giả sử rằng u là một nghiệm nhớt dưới và v là một nghiệm nhớt trên của (4.3) *trên $\mathcal{G}$. Khi đó $u\leq v$.*

(b) *Giả sử (H0), (H1), (H2)* và (H3) đúng. Lấy* $u, v : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn*

$$|u(x)| \leq K(1 + |x|)^m, \ |v(x)| \leq K(1 + |x|)^m$$

với hằng số $K > 0$, $x \in \mathcal{G}$, *với* $0 \leq m$ *và* u, v *liên tục trên* $\mathcal{G}$. *Hơn nữa tồn tại* $r_i > 0$ *sao cho* $u|_{J_i}, v|_{J_i}$ *là liên tục trên* $J_i \cap B(O, r_i)$. *Giả sử rằng* u *là một nghiệm nhớt dưới và* v *là một nghiệm nhớt trên của* (4.3) *trên* $\mathcal{G}$. *Khi đó* $u \leq v$.

Chứng minh.

(a) Ta dùng phương pháp phản chứng. Giả sử $\sup_{\mathcal{G}}\{u - v\} > 0$. Khi đó tồn tại $i_0 = 1, \cdots, N$ và $x_0 \in J_{i_0}$ sao cho $u(x_0) - v(x_0) = \sup_{\mathcal{G}}\{u - v\} > 0$. Theo [23, Định lý 1], ta có

$$\sup_{x \in \partial J_{i_0}} \{u - v\}^+ \geq \sup_{x \in J_{i_0}} \{u - v\}^+.$$

Do đó

$$u(O) - v(O) = \max_{x \in J_{i_0}} \{u(x) - v(x)\} > 0. \tag{4.5}$$

Lấy

$$\mu(x) = \exp(\widetilde{m}(1 + |x|^2)^{1/2}) \quad \text{với } m < \widetilde{m} < \lambda/M.$$

Theo giả thiết, u, v là các hàm liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz L_0 trên $J_i \cap B(O, r)$ với $r > 0$. Với mỗi $i = 1, \cdots, N$, $\varepsilon > 0$, ta xét hàm Φ_i cho bởi:

$$\begin{aligned} &\Phi_i : J_i \times J_i \to \mathbb{R} \\ &\qquad (x, y) \mapsto u(x) - v(y) - \frac{1}{2\varepsilon}(-|x| + |y| + \delta(\varepsilon))^2 - \gamma(\mu(x) + \mu(y)), \end{aligned}$$

trong đó $\delta(\varepsilon) = (L_0 + 1)\varepsilon$ và $\gamma \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Theo định nghĩa của Φ_i, $\lim\limits_{|x|,|y| \to \infty} \Phi_i(x, y) = -\infty$, do đó tồn tại $R = R_\gamma > 0$ sao cho

$$\Phi_i(0, 0) > \sup_{|x|,|y| \geq R} \Phi_i(x, y) + 2.$$

Lấy $S = \{(x, y) \in J_i \times J_i : |x|, |y| \leq R\}$ ta có Φ_i đạt cực đại $M_{i,\varepsilon,\gamma}$ tại $(x_{i,\varepsilon,\gamma}, y_{i,\varepsilon,\gamma}) \in S$. Mặt khác,

$$u(x_{i,\varepsilon,\gamma}) - v(y_{i,\varepsilon,\gamma}) - \frac{(-|x_{i,\varepsilon,\gamma}| + |y_{i,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon))^2}{2\varepsilon} - \gamma(\mu(x_{i,\varepsilon,\gamma}) + \mu(y_{i,\varepsilon,\gamma}))$$

$$\geq \max_{J_i}\{u(x) - v(x) - 2\gamma(\mu(x))\} - \frac{\delta^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}$$
$$\geq u(O) - v(O) - 2\gamma\mu(O) - \frac{\delta^2(\varepsilon)}{2\varepsilon}. \tag{4.6}$$

Từ $u(O) - v(O) > 0$, vế phải của (4.6) là dương khi ε, γ đủ nhỏ. Ta cũng kết luận từ bất đẳng thức trên tính bị chặn của u và v trên S, tồn tại hằng số $K > 0$ sao cho

$$K \geq u(x_{i,\varepsilon,\gamma}) - v(y_{i,\varepsilon,\gamma}) \geq \frac{(-|x_{i,\varepsilon,\gamma}| + |y_{i,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon))^2}{2\varepsilon}$$

do đó $2\varepsilon K \geq (-|x_{i,\varepsilon,\gamma}| + |y_{i,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon))^2$. Khi đó ta có thể lấy một dãy con của $(x_{i,\varepsilon,\gamma})_\varepsilon$, $(y_{i,\varepsilon,\gamma})_\varepsilon$ chúng cũng được ký hiệu bởi $(x_{i,\varepsilon,\gamma})_\varepsilon, (y_{i,\varepsilon,\gamma})_\varepsilon$, sao cho

$$x_{i,\varepsilon,\gamma}, y_{i,\varepsilon,\gamma} \to x_\gamma$$

khi $\varepsilon \to 0$, với $x_\gamma \in J_i$. Theo bất đẳng thức (4.6) ta có

$$u(x_{i,\varepsilon,\gamma}) - v(y_{i,\varepsilon,\gamma}) - \frac{(-|x_{i,\varepsilon,\gamma}| + |y_{i,\varepsilon,\gamma}|)\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} - \gamma(\mu(x_{i,\varepsilon,\gamma}) + \mu(y_{i,\varepsilon,\gamma}))$$
$$\geq u(O) - v(O) - 2\gamma\mu(O).$$

Cho $\varepsilon \to 0$ ta có

$$u(x_\gamma) - v(x_\gamma) - 2\gamma\mu(x_\gamma) \geq u(O) - v(O) - 2\gamma\mu(O).$$

Kết hợp với bất đẳng thức (4.5) ta có

$$2\gamma\mu(O) - 2\gamma\mu(x_\gamma) \geq (u(O) - v(O)) - (u(x_\gamma) - v(x_\gamma)) \geq 0,$$

điều này dẫn đến $\mu(O) \geq \mu(x_\gamma)$. Theo định nghĩa của μ, bất đẳng thức trên dẫn đến $x_\gamma = O$. Từ (4.6) ta có

$$u(x_{i,\varepsilon,\gamma}) - v(y_{i,\varepsilon,\gamma}) - \frac{(-|x_{i,\varepsilon,\gamma}| + |y_{i,\varepsilon,\gamma}|)\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} - \gamma(\mu(x_{i,\varepsilon,\gamma}) + \mu(y_{i,\varepsilon,\gamma}))$$
$$\geq u(O) - v(O) - 2\gamma\mu(O) + \frac{(-|x_{i,\varepsilon,\gamma}| + |y_{i,\varepsilon,\gamma}|)^2}{2\varepsilon}. \tag{4.7}$$

Cho $\varepsilon \to 0$ trong (4.7) ta có

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(-|x_{i,\varepsilon,\gamma}| + |y_{i,\varepsilon,\gamma}|)^2}{2\varepsilon} = 0.$$

Ta kết luận rằng nếu $\varepsilon > 0$, thì $x_{i,\varepsilon,\gamma} \neq O$. Thật vậy, giả sử phản chứng rằng $x_{i,\varepsilon,\gamma} = O$.

(i) Nếu $y_{i,\varepsilon,\gamma} > 0$, thì

$$
\begin{aligned}
u(O) - v(y_{i,\varepsilon,\gamma}) - \frac{1}{2\varepsilon}(|y_{i,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon))^2 - \gamma(\mu(O) + \mu(y_{i,\varepsilon,\gamma})) \\
\geq u(y_{i,\varepsilon,\gamma}) - v(y_{i,\varepsilon,\gamma}) - \frac{\delta(\varepsilon)^2}{2\varepsilon} - \gamma 2\mu(y_{i,\varepsilon,\gamma}).
\end{aligned}
$$

Từ u là liên tục Lipschitz trên $B(O,r) \cap J_i$, ta thấy rằng với ε đủ nhỏ

$$
\begin{aligned}
L_0|y_{i,\varepsilon,\gamma}| \geq u(O) - u(y_{i,\varepsilon,\gamma}) &\geq \frac{|y_{i,\varepsilon,\gamma}|^2}{2\varepsilon} + \frac{|y_{i,\varepsilon,\gamma}|\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} + \gamma(\mu(O) - \mu(y_{i,\varepsilon,\gamma})) \\
&\geq \frac{|y_{i,\varepsilon,\gamma}|\delta(\varepsilon)}{\varepsilon} + \gamma(\mu(O) - \mu(y_{i,\varepsilon,\gamma})). \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Chia hai vế của (4.8) cho $|y_{i,\varepsilon,\gamma}|$ và cho $\varepsilon \to 0$ ta có $L_0 \geq L_0 + 1 - \gamma$. Điều này mâu thuẫn với $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

(ii) Ngược lại, nếu $y_{i,\varepsilon,\gamma} = O$, thì

$$
\begin{aligned}
u(O) - v(O) - \frac{\delta(\varepsilon)^2}{2\varepsilon} - 2\gamma\mu(O) \\
\geq u(\varepsilon e_i) - v(O) - \frac{1}{2\varepsilon}(-\varepsilon + \delta(\varepsilon))^2 - \gamma(\mu(\varepsilon e_i) + \mu(O)).
\end{aligned}
$$

Từ u là liên tục Lipschitz trên $B(O,r) \cap J_i$, ta thấy rằng với ε đủ nhỏ

$$
L_0\varepsilon \geq u(O) - u(\varepsilon e_i) \geq \frac{1}{2\varepsilon}(-\varepsilon^2 + 2\varepsilon\delta(\varepsilon)) - \gamma\varepsilon - \gamma(\mu(\varepsilon e_i) - \mu(O)). \quad (4.9)
$$

Chia hai vế của (4.9) cho ε và cho $\varepsilon \to 0$ ta có $L_0 \geq -\frac{1}{2} + L_0 + 1 - \gamma$ điều này mâu thuẫn với $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Tiếp theo, ta xét hai trường hợp.

- Tồn tại một chỉ số $j \in J_j$ sao cho $y_{j,\varepsilon,\gamma} > 0$. Do đó kết luận được chứng minh. Tiếp theo ta có thể áp dụng bất đẳng thức nghiệm nhớt cho u tại $x_{j,\varepsilon,\gamma}$ và với v tại $y_{j,\varepsilon,\gamma}$.

$$
\lambda u(x_{j,\varepsilon,\gamma}) + H_j\left(x_{j,\varepsilon,\gamma}, -\frac{-|x_{j,\varepsilon,\gamma}| + |y_{j,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon)}{\varepsilon} + \gamma|\nabla\mu(x_{j,\varepsilon,\gamma})|\right) \leq 0
$$

$$\lambda v(y_{j,\varepsilon,\gamma}) + H_j\left(y_{j,\varepsilon,\gamma}, -\frac{-|x_{j,\varepsilon,\gamma}| + |y_{j,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon)}{\varepsilon} - \gamma|\nabla\mu(y_{j,\varepsilon,\gamma})|\right) \geq 0.$$

Trừ hai bất đẳng thức ta có

$$\begin{aligned}
&\lambda u(x_{i,\varepsilon,\gamma}) - \lambda v(y_{i,\varepsilon,\gamma}) \\
&\qquad \leq H_j\left(y_{j,\varepsilon,\gamma}, -\frac{-|x_{j,\varepsilon,\gamma}| + |y_{j,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon)}{\varepsilon} - \gamma|\nabla\mu(y_{j,\varepsilon,\gamma})|\right) \\
&\qquad - H_j\left(x_{j,\varepsilon,\gamma}, -\frac{-|x_{j,\varepsilon,\gamma}| + |y_{j,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon)}{\varepsilon} + \gamma|\nabla\mu(x_{j,\varepsilon,\gamma})|\right) \\
&\qquad \leq H_j\left(y_{j,\varepsilon,\gamma}, -\frac{-|x_{j,\varepsilon,\gamma}| + |y_{j,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) + M\gamma|\nabla\mu(y_{j,\varepsilon,\gamma})| \\
&\qquad - H_j\left(x_{j,\varepsilon,\gamma}, -\frac{-|x_{j,\varepsilon,\gamma}| + |y_{j,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) + M\gamma|\nabla\mu(x_{j,\varepsilon,\gamma})| \\
&\qquad \leq L\left|\frac{-|x_{j,\varepsilon,\gamma}| + |y_{j,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon)}{\varepsilon}\right| |x_{j,\varepsilon,\gamma} - y_{j,\varepsilon,\gamma}| \\
&\qquad + w(|x_{j,\varepsilon,\gamma} - y_{j,\varepsilon,\gamma}|, R) + M\gamma(|\nabla\mu(x_{j,\varepsilon,\gamma})| + |\nabla\mu(y_{j,\varepsilon,\gamma})|).
\end{aligned}$$

Cho $\varepsilon \to 0$ ta được $\lambda(u(O) - v(O)) \leq 0$ hoặc $u(O) - v(O) \leq 0$, điều này mâu thuẫn với (4.5).

- Từ đó $y_{j,\varepsilon,\gamma} = 0$ với mọi $j = 1, \cdots, N$. Hàm

$$y \mapsto v(y) + \frac{1}{2\varepsilon}(-|x_{j,\varepsilon,\gamma}| + |y| + \delta(\varepsilon))^2 + \gamma\mu(y), \quad y \in \mathcal{G}$$

đạt cực tiểu tại $\mathcal{G}$. Từ v là một nghiệm nhớt trên, ta có

$$\lambda v(O) + \max_{j=1,\cdots,N} H_j\left(O, -\frac{-|x_{j,\varepsilon,\gamma}| + |y_{j,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon)}{\varepsilon} + \gamma\nabla|\mu(x_{j,\varepsilon,\gamma})|\right) \geq 0.$$

Như vậy, tồn tại một chỉ số j sao cho

$$\lambda v(O) + H_j\left(O, -\frac{-|x_{j,\varepsilon,\gamma}| + |y_{j,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon)}{\varepsilon} + \gamma|\nabla\mu(x_{j,\varepsilon,\gamma})|\right) \geq 0.$$

Mặt khác, từ $x_j > 0$ và u là một nghiệm nhớt dưới ta có

$$\lambda u(x_{j,\varepsilon,\gamma}) + H_j\left(x_{j,\varepsilon,\gamma}, -\frac{-|x_{j,\varepsilon,\gamma}| + |y_{j,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon)}{\varepsilon} + \gamma|\nabla\mu(x_{j,\varepsilon,\gamma})|\right) \leq 0.$$

Điều này dẫn đến

$$\lambda u(x_{j,\varepsilon,\gamma}) - \lambda v(O) \leq H_j\left(O, -\frac{-|x_{j,\varepsilon,\gamma}| + |y_{j,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon)}{\varepsilon} + \gamma|\nabla\mu(x_{j,\varepsilon,\gamma})|\right)$$

$$- H_j\left(x_{j,\varepsilon,\gamma}, -\frac{-|x_{j,\varepsilon,\gamma}| + |y_{j,\varepsilon,\gamma}| + \delta(\varepsilon)}{\varepsilon} + \gamma|\nabla\mu(x_{j,\varepsilon,\gamma})|\right).$$

Bằng cách đánh giá bất đẳng thức giá trị hàm H_j theo các bước giống như trong trường hợp $y_{j,\varepsilon,\gamma} > 0$ ta cũng có $u(O) \leq v(O)$. Chứng minh 2) giống như là chứng minh 1) bằng cách lấy hàm

$$\mu(x) = (1 + |x|^2)^{\widetilde{m}/2}$$

với $m < \widetilde{m}$. Như vậy Định lý 4.2 được chứng minh. □

4.4. Ứng dụng của nghiệm nhớt trong bài toán điều khiển tối ưu

Định lý 4.3. *Với mọi $x \in \mathcal{G}$ và $(y_x, \alpha) \in \mathcal{T}_x$, hàm sau là không giảm:*

$$s \mapsto \int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t), \alpha(t))dt + e^{-\lambda s} v(y_x(s)), \quad s \in [0, \infty).$$

Hơn nữa nó là hàm hằng nếu và chỉ nếu điều khiển $\alpha(\cdot)$ là tối ưu với vị trí ban đầu x.

Chứng minh. Đặt $h(s) := \displaystyle\int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t), \alpha(t))dt + e^{-\lambda s} v(y_x(s)), s \in [0, \infty)$.

Với mọi $\alpha(\cdot) \in \mathcal{U}$, theo Định lý 4.1 với thời điểm ban đầu $y_x(s)$ và $\varepsilon > 0$, ta có

$$\begin{aligned} v(y_x(s)) &\leq \int_0^\varepsilon e^{-\lambda t} f(y_{y_x(s)}(t), \alpha(t+s))dt + e^{-\lambda\varepsilon} v(y_{y_x(s)}(\varepsilon)) \\ &= \int_0^\varepsilon e^{-\lambda t} f(y_x(t+s), \alpha(t+s))dt + e^{-\lambda\varepsilon} v(y_{y_x(s)}(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức trên với $e^{-\lambda s} > 0$ ta có

$$\begin{aligned} e^{-\lambda s} v(y_x(s,\alpha)) &\leq \int_0^\varepsilon e^{-\lambda(t+s)} f(y_x(t+s), \alpha(t+s))dt + e^{-\lambda(\varepsilon+s)} v(y_{y_x(s)}(\varepsilon)) \\ &= \int_s^{\varepsilon+s} e^{-\lambda t} f(y_x(t), \alpha(t))dt + e^{-\lambda(\varepsilon+s)} v(y_{y_x(s)}(\varepsilon)). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Cộng $\displaystyle\int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t), \alpha(t))dt$ vào hai vế của bất đẳng thức (4.10), ta có

$$e^{-\lambda s} v(y_x(s)) + \int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t), \alpha(t))dt$$

$$\leq \int_0^{\varepsilon+s} e^{-\lambda t} f(y_x(t), \alpha(t))dt + e^{-\lambda(\varepsilon+s)} v(y_x(\varepsilon+s)),$$

trong đó chúng tôi sử dụng tính chất $y_x(\varepsilon+s) = y_{y_x(s)}(\varepsilon)$ do đó

$$h(s) \leq h(s+\varepsilon).$$

Kết luận đầu của Định lý 4.3 được thực hiện.

Nếu

$$h(s) = \int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t), \alpha(t))dt + e^{-\lambda s} v(y_x(s)), \quad s \in [0, \infty)$$

là một hàm hằng, thì $h(s) = h(0) = v(x)$. Do đó

$$v(x) = \int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t), \alpha(t))dt + e^{-\lambda s} v(y_x(s)), \quad s \in [0, \infty).$$

Như vậy, $\alpha(\cdot)$ là tối ưu với vị trí ban đầu x.
Ngược lại, nếu $\alpha(\cdot)$ là điều khiển tối ưu với x, thì

$$h(0) = v(x) = \int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t), \alpha(t))dt + e^{-\lambda s} v(y_x(s)) = h(s),$$

tức là h là một hàm hằng. $\square$

Định lý 4.4. *Với mỗi $x \in \mathcal{G}$, nếu $\alpha(\cdot)$ là một điều khiển sao cho với $(y_x, \alpha) \in \mathcal{T}_x$ và hàm giá trị v là liên tục Lipschitz và thỏa mãn*

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{v(y_x(s) + tf(y_x(s), \alpha(s))) - v(y_x(s))}{t} + \ell(y_x(s), \alpha(s)) \leq \lambda v(y_x(s)) \tag{4.11}$$

với hầu khắp nơi s, khi đó $\alpha(\cdot)$ là tối ưu với thời điểm đầu x.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh rằng hàm

$$h(s) = \int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t), \alpha(t))dt + e^{-\lambda s} v(y_x(s)), \quad s \in [0, \infty) \tag{4.12}$$

là không tăng, tức là $h'(s) \leq 0$ hầu khắp nơi.

Từ v là Lipschitz địa phương, h là khả vi hầu khắp nơi và

$$h'(s) = e^{-\lambda s}\left(f(y_x(s), \alpha(s)) - \lambda v(y_x(s)) + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{v(y_x(s+\varepsilon)) - v(y_x(s))}{\varepsilon} \right),$$

và tồn tại một hằng số K thỏa mãn

$$v(y_x(t+\varepsilon)) - v(y_x(t) + \varepsilon f(y_x(t))) \leq K|y_x(t+\varepsilon) - y_x(t) - \varepsilon f(y_x(t))|.$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{v(y_x(s+\varepsilon)) - v(y_x(s))}{\varepsilon} \leq & \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{v(y_x(t) + \varepsilon f(y_x(t))) - v(y_x(s))}{\varepsilon} \\ & + K \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left| \frac{y_x(t+\varepsilon) - y_x(t)}{\varepsilon} - f(y_x(t)) \right|\end{aligned}$$

hay

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{v(y_x(s+\varepsilon)) - v(y_x(s))}{\varepsilon} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{v(y_x(t) + \varepsilon f(y_x(t))) - v(y_x(s))}{\varepsilon}.$$

Sử dụng (4.11), ta được

$$f(y_x(s), \alpha(s)) - \lambda v(y_x(s)) + \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{v(y_x(t) + \varepsilon f(y_x(t))) - v(y_x(s))}{\varepsilon} \leq 0.$$

Như vậy $h'(s) \leq 0$. □

Định lý 4.5. *Giả sử rằng hàm giá trị v là Lipschitz địa phương. Khi đó $\alpha(\cdot)$ là tối ưu với thời điểm đầu x nếu và chỉ nếu*

$$\lim_{t\to 0} \frac{v(y_x(s) + tf(y_x(s), \alpha(s))) - v(y_x(s))}{t} + \ell(y_x(s), \alpha(s)) = \lambda v(y_x(s)) \tag{4.13}$$

với hầu khắp nơi s.

Chứng minh. Giả sử rằng (4.13) thỏa mãn. Theo Định lý 4.4, $\alpha(\cdot)$ là một điều khiển tối ưu. Ngược lại, giả sử $\alpha(\cdot)$ là một điều khiển tối ưu, ta sẽ chứng minh (4.13) đúng.

Từ h xác định bởi (4.12) là hằng số. Theo Định lý 4.3, ta có

$$0 = e^{\lambda s} h'(s) \geq f(y_x(s), \alpha(s)) - \lambda v(y_x(s)) + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{v(y_x(s+\varepsilon)) - v(y_x(s))}{\varepsilon} \text{ h.k.n. } s.$$

Từ đó ta có

$$\lambda v(y_x(s)) \geq f(y_x(s), \alpha(s)) + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{v(y_x(s+\varepsilon)) - v(y_x(s))}{\varepsilon} \text{ hầu khắp } s.$$

Do đó

$$\lambda v(y_x(s)) \geq \lim_{t\to 0} \frac{v(y_x(s) + tf(y_x(s), \alpha(s))) - v(y_x(s))}{t} + \ell(y_x(s), \alpha(s)).$$

Mặt khác, từ v là liên tục Lipschitz, $v(y_x(t))$ là khả vi hầu khắp nơi. Ta lấy điểm mà tại đó hàm $v(y_x(t))$ khả vi. Theo giả thiết v là một nghiệm nhớt dưới, khi đó với mọi hàm $\varphi \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ và $v - \varphi$ đạt cực đại tại $y_x(s)$, ta có

$$\lim_{t\to 0} \frac{v(y_x(s) + tf(y_x(s), \alpha(s))) - v(y_x(s))}{t} = D\varphi(y_x(s), f(y_x(s), \alpha(s))). \tag{4.14}$$

Từ $(f(y_x(s), \alpha(s)), \ell(y_x(s), \alpha(s))) \in FL(y_x(s))$,

$$\lambda\varphi(y_x(s)) - D\varphi(y_x(s), f(y_x(s), \alpha(s))) - \ell(y_x(s), \alpha(s)) \leq 0. \tag{4.15}$$

Sử dụng (4.14) và (4.15), ta có bất đẳng thức

$$\lim_{t\to 0} \frac{v(y_x(s) + tf(y_x(s), \alpha(s))) - v(y_x(s))}{t} \geq \lambda\varphi(y_x(s)) - \ell(y_x(s), \alpha(s)). \tag{4.16}$$

Như vậy, (4.13) thỏa mãn hầu khắp nơi s. □

Kết luận chương 4

Nội dung của chương này nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu trên các khớp nối. So sánh với những kết quả gần đây, hàm chi phí mà chúng tôi sử dụng trong một lớp rộng hơn. Do đó, hàm giá trị đạt được có thể không bị chặn. Chúng tôi cũng chứng minh được hàm giá trị là nghiệm nhớt duy nhất của một phương trình Hamilton-Jacobi liên quan. Hơn nữa tính chất của hàm giá trị cũng được chỉ ra, tính liên tục, độ tăng, tính bị chặn trên tại điểm O. Chúng tôi cũng đã thiết lập được một điều kiện cần và đủ cho một điều khiển tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn. Việc tìm các phản hồi tối ưu cho bài toán điều khiển tối ưu trên các khớp nối có chi phí vào, ra là một hướng có thể nghiên cứu trong thời gian tới.

KẾT LUẬN VÀ ĐỀ XUẤT

1. Các kết quả đạt được

Luận án nghiên cứu ứng dụng của dưới vi phân cho nghiệm nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi trong không gian Banach. Cụ thể luận án nghiên cứu các vấn đề sau: (1) dưới vi phân β-nhớt, các tính chất của dưới vi phân β-nhớt, nguyên lý biến phân trơn; (2) tính duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi trong không gian Banach có dạng $u + H(x, Du) = 0$ và $u + H(x, u, Du) = 0$; tính ổn định và sự tồn tại của nghiệm β-nhớt cho phương trình; (3) nghiệm β-nhớt của bài toán điều khiển tối ưu trong không gian Banach, điều khiển phản hồi tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn; (4) nghiệm nhớt của bài toán điều khiển tối ưu trên khớp nối, điều kiện cần và đủ cho một điều khiển tối ưu. Các kết quả đạt được là:

1) Chứng minh được một số kết quả về nguyên lý biến phân trơn cho hàm nửa liên tục dưới và bị chặn ở trên không gian Banach X thỏa mãn giả thiết (H_β^*) và trên không gian có chuẩn β-trơn.

2) Chứng minh tính duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi trong lớp hàm liên tục và bị chặn cho phương trình Hamilton-Jacobi có dạng $u + H(x, Du) = 0$, tính duy nhất nghiệm trong lớp hàm liên tục đều và không bị chặn đối với phương trình đạo hàm riêng cấp 1 dạng tổng quát $u + H(x, u, Du) = 0$. Chứng minh được tính ổn định và sự tồn tại nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi dạng tổng quát $u + H(x, u, Du) = 0$.

3) Chứng minh hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn là nghiệm β-nhớt duy nhất của phương trình Hamilton-Jacobi tương ứng, chứng minh được điều kiện cần và đủ đối với một điều khiển tối ưu.

4) Khi nghiên cứu nghiệm nhớt trên các khớp nối: chứng minh được hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu là nghiệm nhớt duy nhất của một phương trình Hamilton-Jacobi liên quan. Chứng minh được một số tính chất của hàm giá trị như tính liên tục, độ tăng, tính bị chặn trên tại điểm O. Thiết lập được một điều kiện cần và đủ cho một điều khiển tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn.

2. Đề xuất một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đạt được trong luận án, một số vấn đề mở liên quan cần được tiếp tục nghiên cứu như:

- Ứng dụng của dưới vi phân cho nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi cấp 2 và cấp cao hơn bao gồm tính duy nhất nghiệm, tính ổn định và sự tồn tại của nghiệm
- Đưa được các điều khiển phản hồi tối ưu rõ ràng hơn, xác lập được sơ đồ để tìm điều khiển tối ưu cho bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn.
- Tìm các điều khiển phản hồi tối ưu cho bài toán điều khiển tối ưu trên các khớp nối có chi phí vào, ra. Nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu trên mạng lưới.
- Ứng dụng nghiệm β-nhớt để nghiên cứu các bài toán thực tiễn trong sinh thái, kỹ thuật, kinh tế, tài chính,... như trong [5].

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] T.V. Bang, P.T. Tien, (2018), On the existence, uniqueness, and stability of β-viscosity solutions to a class of Hamilton-Jacobi equations in Banach spaces, *Acta Math. Vietnam* DOI: 10.1007/s40306-018-0287-7

[2] P.T. Tien, T.V. Bang, (2019), Uniqueness of β-viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations and applications to a class of optimal control problems, *Differ. Equ. Dyn. Syst.* DOI: 10.1007/s12591-019-00479-7

[3] P.T. Tien, T.V. Bang, (2019), Hamilton-Jacobi equations for optimal control on junctions with unbounded running cost functions, *Appl. Anal.* DOI: 10.1080/00036811.2019.1643012.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[A] **Tài liệu tiếng Việt**

[1] Hoàng Tụy (2005), *Hàm thực và giải tích hàm,* NXB ĐHQG Hà Nội.

[B] **Tài liệu tiếng Anh**

[2] Y. Achdou, F. Camilli, A. Cutrì, N. Tchou (2011), Hamilton-Jacobi equations on networks, *IFAC proceedings volumes* 44 (1), 2577–2582.

[3] Y. Achdou, F. Camilli, A. Cutrì, N. Tchou (2013), Hamilton-Jacobi equations constrained on networks, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 20 (3), 413–445.

[4] Y. Achdou, S. Oudet, N. Tchou (2015), Hamilton-Jacobi equations for optimal control on junctions and networks, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 21 (3), 876–899.

[5] H. Alexandru, T.Q. Ky, P.T. Tien, G. Yin (2019), Harvesting of interacting stochastic populations, *J. Math. Biol.* 79 (2), 533–570.

[6] S.M. Aseev, A.V. Kryazhimskii (2007), The Pontryagin maximum principle and problems of optimal economic growth, *Proc. Steklov Inst. Math.* 257 (1), 1–255.

[7] T.V. Bang, T.D. Van (2006), Viscosity solutions of the Cauchy problem for second-order nonlinear partial differential equations in Hilbert spaces, *Electron. J. Differential Equations* 47, 1-15.

[8] T.V. Bang (2006), The uniqueness of viscosity solutions of second order nonlinear partial differential equations in a Hilbert space of two-dimensional functions, *Acta Math. Vietnam* 31 (2), 149–165.

[9] M. Bardi, D.I. Capuzzo (1997), *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations,* Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA.

[10] M. Bardi, M.G. Crandall, L.C. Evans, H.M. Soner, P.E. Souganidis (1997), *Viscosity solutions and applications, Lecture Notes in Mathematics, 1960.* Springer-Verlag, Berlin.

[11] G. Barles, A. Briani, E. Chasseigne (2013), A Bellman approach for two-domains optimal control problems in $\mathbb{R}^N$, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 19 (3) 710–739.

[12] G. Barles (2013), *An introduction to the theory of viscosity solutions for first-order Hamilton-Jacobi equations and applications,* In Hamilton-Jacobi equations: approximations, numerical analysis and applications, Lecture Notes in Math., Springer, Heidelberg (2074), 49–109.

[13] J. Baumeister, A. Leitão, G.N. Silva (2007), On the value function for nonautonomous optimal control problems with infinite horizon. *Systems Control Lett.* 56 (3), 188–196.

[14] R. Bellman (1957), *Dynamic programming,* Princeton University Press, Princeton, N. J.

[15] J.M. Borwein, Q.J. Zhu (1999), A survey of subdifferential calculus with applications, *Nonlinear Anal.* 38 (6), 687–773.

[16] J.M. Borwein, M. Fabián (1993), On convex functions having points of Gâteaux differentiability which are not points of Fréchet differentiability, *Canad. J. Math.* 45 (6), 1121–1134.

[17] J.M. Borwein, S. Fitzpatrick (1993), A weak Hadamard smooth renorming of $L_1(\Omega, \mu)$, *Canad. Math. Bull.* 36 (4), 407–413.

[18] J.M. Borwein, D. Preiss (1987), A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 303 (2), 517–527.

[19] J.M. Borwein, Q.J. Zhu (1996), Viscosity solutions and viscosity subderivatives in smooth Banach spaces with applications to metric regularity, *SIAM J. Control Optim.* 34 (5), 1568–1591.

[20] M.G. Crandall, P.L. Lions (1985), Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. I. Uniqueness of viscosity solutions, *J. Funct. Anal.* 62 (3), 379–396.

[21] M.G. Crandall, P.L. Lions (1986), Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions. II. Existence of viscosity solutions, *J. Funct. Anal.* 65 (3), 368–405.

[22] M.G. Crandall, L.C. Evans, P.L. Lions (1984), Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 282 (2), 487–502.

[23] M.G. Crandall, P.L. Lions (1983), Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 277 (1), 1–42.

[24] C. Hermosilla, H. Zidani (2015), Infinite horizon problems on stratifiable state-constraints sets, *J. Differential Equations* 258 (4), 1430–1460.

[25] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler (1993), *Smoothness and renormings in Banach spaces,* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 64.

[26] R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler (1993), A smooth variational principle with applications to Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions, *J. Funct. Anal.* 111 (1), 197–212.

[27] M. Durea (2003), Applications of the Fréchet subdifferential, *Serdica Math. J.* 29 (4), 301–314.

[28] W.H. Fleming, H.M. Soner (2006), *Controlled Markov processes and viscosity solutions, Second edition.* Springer, New York.

[29] Y. Fleming, T. Namba (2017), Well-posedness of Hamilton-Jacobi equations with Caputo's time fractional derivative, *Comm. Partial Differential Equations* 42 (7), 1088–1120.

[30] L.C. Evans (2010), *Partial differential equations,* American Mathematical Society.

[31] G. Evéquoz, A.S. Charles (2006), On differentiability and bifurcation. *Advances in mathematical economics, Adv. Math. Econ., Springer, Tokyo,* 8, 155–184.

[32] N. Hoang (2019), Regularity properties of viscosity solution of nonconvex Hamilton–Jacobi equations, *J. Applicable Analysis* 98 (6), 1104-1119.

[33] P. Huyên (2009), *Continuous-time stochastic control and optimization with financial applications*, Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer-Verlag, Berlin, 61.

[34] H. Ishii (1987), Perron's method for Hamilton-Jacobi equations, *Duke Math. J.* 55 (2), 369–384.

[35] D.M. Khang (2019), Hamilton-Jacobi equations for optimal control on networks with entry or exit costs, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 25 (15), 1-31.

[36] X.J. Li, J.M. Yong (1995), *Optimal control theory for infinite-dimensional systems,* Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA.

[37] P.L. Lions, P. Souganidis (2016), Viscosity solutions for junctions: well posedness and stability, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.* 27 (4), 535–545.

[38] B.S. Mordukhovich, N.M. Nam, N.D. Yen (2009), Subgradients of marginal functions in parametric mathematical programming, *Math. Program* 116 (1-2), 369–396.

[39] B.S. Mordukhovich, Y. Shao, Q.J. Zhu (2000), Viscosity coderivatives and their limiting behavior in smooth Banach spaces, *Positivity* 4 (1), 1–39.

[40] R.R. Phelps (1989), *Convex functions, monotone operators and differentiability. Lecture Notes in Mathematics,* Springer-Verlag, Berlin, 1364.

[41] R.R. Phelps (1974), Support cones in Banach spaces and their applications, *Advances in Math.* 13, 1–19.

[42] J. Zabczyk (2008), *Mathematical control theory,* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA.