BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

PHAN TRỌNG TIẾN

NGHIỆM β-NHỚT CỦA PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON-JACOBI VÀ ỨNG DỤNG TRONG BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 9 46 01 02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội-2020

Công trình được hoàn thành tại:
Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2

Người hướng dẫn khoa học: **TS. Trần Văn Bằng**
PGS. TS. Hà Tiến Ngoạn

Phản biện: ....
....

Phản biện: ....
....

Phản biện: ....
....

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng cấp Trường chấm luận án tiến sĩ họp tại ....
vào hồi ....giờ ....ngày ....tháng ....năm 20... .

Có thể tìm hiểu luận án tại:
- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2

MỞ ĐẦU

Phương trình Hamilton-Jacobi cấp một là một lớp phương trình đạo hàm riêng phi tuyến có nhiều ứng dụng, nó xuất hiện trong nhiều lĩnh vực như cơ học, điều khiển tối ưu,... đặc biệt nó bao gồm lớp phương trình quy hoạch động của bài toán điều khiển tối ưu tất định, thường được gọi là phương trình Hamilton-Jacobi-Bellman. Nói chung, lớp phương trình Hamilton-Jacobi phi tuyến thường không có nghiệm cổ điển. Do đó các loại nghiệm yếu được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu và nghiệm nhớt là một trong số đó.

Lý thuyết nghiệm nhớt của phương trình đạo hàm riêng đã xuất hiện từ đầu những năm 80 của thế kỷ trước, trong bài báo của Crandall M. G và Lions P. L. (1983) đã cung cấp một khái niệm nghiệm suy rộng quan trọng cho các phương trình đạo hàm riêng phi tuyến đó là khái niệm nghiệm nhớt. Thay vì buộc nghiệm u thỏa mãn phương trình hầu khắp nơi, các tác giả này chỉ đòi hỏi nghiệm là một hàm liên tục, thỏa mãn cặp bất đẳng thức vi phân thông qua các hàm thử đủ trơn hoặc qua khái niệm dưới vi phân, trên vi phân.

Khái niệm nghiệm nhớt được giới thiệu ở trên là một công cụ hiệu quả để nghiên cứu phương trình Hamilton-Jacobi phi tuyến. Cần chú ý rằng nghiệm nhớt của phương trình đạo hàm riêng là một nghiệm yếu vì chúng chỉ là các hàm liên tục ở đó đạo hàm được xác định thông qua các hàm thử bằng nguyên lý cực trị. Tuy nhiên, người ta cũng đã chứng minh rằng nghiệm nhớt có thể được xây dựng thông qua các trên, dưới đạo hàm, chúng gọi là các nửa đạo hàm. Điều này tạo ra một kết nối chặt chẽ giữa lý thuyết nghiệm nhớt và giải tích không trơn bao gồm lý thuyết dưới vi phân.

Từ năm 1993, nguyên lý biến phân trơn được chứng minh bởi Deville đã được sử dụng như một công cụ quan trọng để chứng minh tính duy nhất của nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi có dạng $u + F(Du) = f$, trong đó F là liên tục đều trên X^*_β và f là liên tục đều và bị chặn trên X. Với lớp nghiệm là hàm liên tục và bị chặn.

Bài toán điều khiển tối ưu được giới thiệu vào những năm 1950, nó có rất nhiều ứng dụng trong Toán học, Vật lý và trong các lĩnh vực khác. Theo nguyên lý quy hoạch động, hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu là nghiệm của một phương trình đạo hàm riêng tương ứng. Tuy nhiên, hàm giá trị thường không khả vi, do đó một số phương pháp khác đã được giới thiệu để nghiên cứu về hàm giá trị này. Nghiệm nhớt một lần nữa là một công cụ hiệu quả để nghiên cứu lý thuyết điều khiển tối ưu. Tiếp cận bài toán điều khiển tối ưu thông qua nghiệm nhớt bằng các dưới vi phân khác thì chưa nhiều đặc biệt là khi hàm giá trị không bị chặn.

Gần đây phương trình Hamilton-Jacobi trên các khớp nối và trên các mạng lưới được nghiên cứu nhiều. Các tác giả tập trung giải quyết về tính chất của hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu, nguyên lý so sánh nghiệm nhớt của bài toán điều khiển tối ưu trong trường hợp hàm chi phí ℓ bị chặn. Mặc dù đã đạt được một số kết quả quan trọng song dường như những giả thiết đưa ra trong các công trình đó là tương đối chặt.

Chúng tôi đặt vấn đề nghiên cứu về β-dưới vi phân, tính duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi cho các phương trình có dạng $u + H(x, Du) = 0$ và $u + H(x, u, Du) = 0$, tính ổn định và sự tồn tại nghiệm β-nhớt cũng được chúng tôi quan tâm. Ngoài ra ứng dụng của nghiệm β-nhớt đối với bài toán điều khiển tối ưu là rất lớn. Trên cơ sở đó chúng tôi cũng quan tâm đến tìm điều kiện cần và điều kiện đủ cho bài toán điều khiển tối ưu trong không gian vô hạn chiều. Hướng tiếp cận mới về nghiệm nhớt trên các khớp nối cũng được chúng tôi nghiên cứu. Dựa trên mô hình đã có về nghiệm nhớt theo phương pháp cổ điển, vấn đề tính duy nhất nghiệm nhớt, ứng dụng của nghiệm nhớt cho bài toán điều khiển tối ưu trên các khớp nối hứa hẹn cho ta những kết quả có ý nghĩa.

Luận án này, ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục tài liệu tham khảo, gồm bốn chương.

Chương 1 trình bày khái niệm dưới vi phân β-nhớt và các tính chất của nó, một số kết quả về nguyên lý biến phân trơn.

Chương 2 chứng minh kết quả về tính duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi dạng tổng quát $u+H(x, u, Du) = 0$ trong không gian Banach. Tính ổn định và sự tồn tại nghiệm của phương trình này cũng được chúng tôi chỉ ra.

Chương 3 chúng tôi chứng minh hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu là nghiệm β-nhớt duy nhất của phương trình Hamilton-Jacobi tương ứng. Các phản hồi và điều kiện đủ cho điều khiển tối ưu cũng được trình bày trong chương này.

Chương 4 nêu các khái niệm về khớp nối, một số giả thiết và thiết lập bài toán điều khiển tối ưu. Một số tính chất của hàm giá trị như hàm giá trị là một hàm liên tục trên $\mathcal{G}$, tính Lipschitz địa phương tại O trên mỗi J_i, đánh giá hàm giá trị tại O thông qua Hamilton; Nghiệm nhớt trên các khớp nối và chứng minh hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu là một nghiệm nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi tương ứng; Một số kết quả của nguyên lý so sánh nghiệm và chứng minh hàm giá trị là nghiệm nhớt duy nhất của phương trình Hamilton-Jacobi; Những áp dụng cho kết quả của chúng tôi trong bài toán điều khiển tối ưu.

Chương 1

β-DƯỚI VI PHÂN

Trong chương này chúng tôi trình bày dưới vi phân β-nhớt trên không gian Banach X và chứng minh được nguyên lý biến phân trơn, nhằm áp dụng để chứng minh tính duy nhất của nghiệm β-nhớt.

1.1. Tính β-khả vi

Định nghĩa 1.1.1. *Cho X là một không gian Banach, một* borno *β trên X là một họ các tập con đóng, bị chặn và đối xứng tâm của X thỏa mãn ba điều kiện sau:*

1) $X = \bigcup\limits_{B\in\beta} B$,

2) họ β đóng kín đối với phép nhân với một vô hướng,

3) hợp của hai phần tử bất kỳ trong β đều chứa trong một phần tử của β.

Theo [Hoàng Tụy, 2005], Định lý 27, trang 415, họ β trong Định nghĩa 1.1.1 xác định trên X^* một tôpô lồi địa phương Hausdorff τ_β. Không gian X^* với tôpô τ_β này được ký hiệu là X^*_β. Một cơ sở lân cận của điểm gốc 0 trong X^*_β là họ tất cả các tập có dạng

$$\{f : |f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in M\},$$

với $\epsilon > 0$ tùy ý và $M \in \beta$.

Khi đó, dãy phiếm hàm $(f_m) \subset X^*$, hội tụ về phần tử $f \in X^*$ đối với tôpô τ_β khi và chỉ khi với mọi tập $M \in \beta$ và mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m \geq n_0$, mọi $x \in M$ ta đều có $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$. Hay f_m hội tụ đều tới f trên tập M. Do đó tôpô τ_β còn được gọi là *tôpô hội tụ đều trên các tập thuộc họ β.*

Ví dụ 1.1.2. *Ta dễ dàng kiểm tra được các kết quả sau:*

1) Họ F tất cả các tập con đóng, bị chặn, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là borno Fréchet; được ký hiệu τ_F.

2) Họ H tất cả các tập con compact, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là borno Hadamard; được ký hiệu τ_H.

3) Họ WH tất cả các tập con compact yếu, đóng, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là borno Hadamard yếu; được ký hiệu τ_{WH}.

4) Họ G tất cả các tập con hữu hạn, đối xứng tâm của X là một borno và gọi là borno Gâteaux; được ký hiệu τ_G.

Nhận xét 1.1.3. *Nếu β borno là F (Fréchet), H (Hadamard), WH (Hadamard yếu) hoặc G (Gâteaux), khi đó ta có tôpô Fréchet, tôpô Hadamard, Hadamard tôpô yếu và tôpô Gâteaux trên không gian đối ngẫu X^*, tương ứng. Rõ ràng, F-tôpô là tôpô mạnh nhất và G-tôpô là tôpô yếu nhất trong các β-tôpô trên X^*.*

Định nghĩa 1.1.4. *Cho hàm f xác định trên X, ta nói rằng f là β-khả vi tại $x \in X$ và có β-đạo hàm $\nabla_\beta f(x) \in X^*$ nếu $f(x)$ là hữu hạn và*

$$\frac{f(x+tu) - f(x) - t\langle \nabla_\beta f(x), u\rangle}{t} \to 0$$

khi $t \to 0$ đều trên $u \in V$ với bất kỳ $V \in \beta$. Ta nói rằng hàm f là β-trơn tại x nếu $\nabla_\beta f : X \to X^*_\beta$ liên tục trong lân cận của x. Khi borno β được thay bởi các họ: F, H, WH, G thì ta có các khái niệm đạo hàm tương ứng: Fréchet, Hadamard, Hadamard yếu, Gâteaux.

1.2. Dưới vi phân β-nhớt

Định nghĩa 1.2.1. *Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm nửa liên tục dưới và $f(x) < +\infty$. Ta nói rằng f là khả dưới vi phân β-nhớt và x^* là một dưới đạo hàm β-nhớt của f tại x nếu tồn tại một hàm Lipschitz địa phương $g : X \to \mathbb{R}$ sao cho g là β-trơn tại x, $\nabla_\beta g(x) = x^*$ và $f - g$ đạt cực tiểu địa phương tại x. Ta ký hiệu tập tất cả các dưới đạo hàm β-nhớt của f tại x là $D^-_\beta f(x)$ và gọi là dưới vi phân β-nhớt của f tại x.*

Cho $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm nửa liên tục trên và $f(x) > -\infty$. Ta nói rằng f là khả trên vi phân β-nhớt và x^* là một trên đạo hàm β-nhớt của f tại x nếu tồn tại một hàm Lipschitz địa phương $g : X \to \mathbb{R}$ sao cho g là β-trơn tại x, $\nabla_\beta g(x) = x^*$ và $f - g$ đạt cực đại địa phương tại x.

Ta ký hiệu tập tất cả các trên đạo hàm β-nhớt của f tại x là $D^+_\beta f(x)$ và gọi là trên vi phân β-nhớt của f tại x.

Định lý 1.2.2. *1) Nếu $\beta_1 \subset \beta_2$ thì $D^-_{\beta_2} f(x) \subset D^-_{\beta_1} f(x)$ nói riêng $D^-_F f(x) \subset D^-_\beta f(x) \subset D^-_G f(x)$ với mọi borno β.*

2) Nếu f là hàm liên tục, $f(x)$ hữu hạn và $D_\beta^- f(x)$, $D_\beta^+ f(x)$ là hai tập khác rỗng thì f là β-khả vi tại x.
3) Nếu $\beta_1 \subset \beta_2$ và f là β_1-khả vi tại x và f khả dưới vi phân β_2-nhớt tại x thì $D_{\beta_2}^- f(x) = \{\nabla_{\beta_1} f(x)\}$.
4) $D_\beta^- f(x) + D_\beta^- g(x) \subset D_\beta^- (f+g)(x)$.
5) $D_\beta^- f(x)$ là một tập lồi.

Ta có các kết quả sau:

Nhận xét 1.2.3.
1) $D_F^- f(x) \subset D_{WH}^- f(x) \subset D_H^- f(x) \subset D_G^- f(x)$.
2) Nếu X là không gian phản xạ thì $D_F^- f(x) = D_{WH}^- f(x)$.
3) Nếu $X = \mathbb{R}^n$ thì $D_F^- f(x) = D_{WH}^- f(x) = D_H^- f(x)$.
4) Nếu $X = \mathbb{R}$ thì $D_F^- f(x) = D_G^- f(x)$.

Định lý 1.2.4. *Nếu f là một hàm lồi xác định trên tập lồi C và $x \in C$, với mọi borno β thì ta có*

$$D_\beta^- f(x) = D_G^- f(x) = \partial f(x).$$

Tiếp theo, ta ký hiệu

$$\mathcal{D}_\beta(X) = \{g : X \to \mathbb{R} |\ g \text{ là bị chặn, Lipschitz và } \beta\text{-khả vi trên } X\},$$

$$\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| :\ x \in X\}, \quad \|\nabla_\beta g\|_\infty = \sup\{\|\nabla_\beta g(x)\| :\ x \in X\}$$

và

$$\mathcal{D}_\beta^*(X) = \{g \in \mathcal{D}_\beta(X) |\ \nabla_\beta g : X \to X_\beta^* \text{ là liên tục}\}.$$

Chúng tôi sử dụng các giả thiết sau.
(H_β) Tồn tại một hàm bump (tức là hàm có giá khác rỗng và bị chặn) b sao cho $b \in \mathcal{D}_\beta(X)$; và
(H_β^*) Tồn tại một hàm bump b sao cho $b \in \mathcal{D}_\beta^*(X)$.

Mệnh đề 1.2.5. *Giả thiết (H_β) và (H_β^*) được thỏa mãn nếu không gian Banach X có chuẩn β-trơn.*

Mệnh đề 1.2.6. *Cho X là một không gian Banach thỏa mãn (H_β) (tương ứng (H_β^*)) và E là một tập con đóng của X. Khi đó, với hàm nửa liên tục dưới, bị chặn dưới f trên E và mọi $\varepsilon \in (0,1)$, tồn tại một $g \in \mathcal{D}_\beta(X)$ (tương ứng $g \in \mathcal{D}_\beta^*(X)$) và một $x_0 \in E$ sao cho:*

(a) $f+g$ *đạt cực tiểu tại* x_0;
(b) $\|g\|_\infty \le \varepsilon$ *và* $\|\nabla_\beta g\|_\infty \le \varepsilon$.

Mệnh đề 1.2.7. *Cho* X *là một không gian Banach thỏa mãn giả thiết* (H_β^*) *và* u, v *là hai hàm bị chặn trên* X *sao cho* u *là nửa liên tục trên và* v *là hàm nửa liên tục dưới. Khi đó, tồn tại một hằng số* C *sao cho với mọi* $\varepsilon \in (0,1)$*, tồn tại* $x, y \in X, p \in D_\beta^+ u(x), q \in D_\beta^- v(y)$ *sao cho:*

(a) $\|x-y\| < \varepsilon^2$ *và* $\|p-q\| < \varepsilon$;
(b) *Với mọi* $z \in X$, $v(z) - u(z) \ge v(y) - u(x) - \varepsilon$;
(c) $\|x-y\|\sqrt{\|p\|} < C\varepsilon, \quad \|x-y\|\sqrt{\|q\|} < C\varepsilon$.

Định lý 1.2.8. *Cho* X *là một không gian Banach với chuẩn tương đương với chuẩn* β*-trơn và* $f_1, \cdots, f_N : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *là* N *hàm nửa liên tục dưới, bị chặn dưới và* $\lim\limits_{\eta\to 0} \inf\{\sum_{n=1}^N f_n(y_n) : diam(y_1, \cdots, y_N) \le \eta\} < +\infty$*. Khi đó, với mỗi* $\varepsilon > 0$*, tồn tại* $x_n \in X, n = 1, \cdots, N$ *và* $x_n^* \in D_\beta^- f_n(x_n)$ *thỏa mãn*

$$(i) \qquad diam(x_1, \cdots, x_N)\max(1, \|x_1^*\|, \cdots, \|x_N^*\|) < \varepsilon;$$

$$(ii) \qquad \sum_{n=1}^N f_n(x_n) < \inf_{x\in X} \sum_{n=1}^N f_n(x) + \varepsilon;$$

$$(iii) \qquad \left\|\sum_{n=1}^N x_n^*\right\| < \varepsilon.$$

Định lý 1.2.9. *Cho* X *là một không gian Banach với chuẩn tương đương với chuẩn* β*-trơn. Giả sử* $\Omega \subset X$ *là tập mở và* $f_1, \cdots, f_N : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *là* N *hàm nửa liên tục dưới, bị chặn. Khi đó, với mỗi* $\varepsilon > 0$*, tồn tại* $x_n \in \overline{\Omega}, n = 1, \cdots, N$ *và* $x_n^* \in D_\beta^- f_n(x_n)$ *thỏa mãn*

$$(i) \qquad diam(x_1, \cdots, x_N)\max(1, \|x_1^*\|, \cdots, \|x_N^*\|) < \varepsilon,$$

$$(ii) \qquad \sum_{n=1}^N f_n(x_n) < \inf_{x\in \overline{\Omega}} \sum_{n=1}^N f_n(x) + \varepsilon,$$

$$(iii) \qquad \left\|\sum_{n=1}^N x_n^*\right\| < \varepsilon.$$

Kết luận

Trong chương 1 này chúng tôi tập trung một số vấn đề chính:
1) Đưa ra một số nhận xét về β-khả vi, mối quan hệ giữa các β-khả vi khi các borno β có mối quan hệ bao hàm. Trong chương này cũng đưa ra một số nhận xét về tính chất dưới vi phân thường gặp và mối quan hệ của dưới vi phân thường gặp. Chỉ ra một số trường hợp đặc biệt mà tập dưới vi phân của các hàm bằng nhau.
2) Chứng minh được các kết quả về quy tắc tổng mờ của β-dưới vi phân.

Chương 2

NGHIỆM β-NHỚT CỦA PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON-JACOBI TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Nội dung của chương này là chứng minh tính duy nhất của nghiệm β-nhớt (chúng yếu hơn nghiệm Fréchet-nhớt) cho phương trình Hamilton-Jacobi dạng $u+H(x, Du) = 0$ và $u+H(x, u, Du) = 0$ trên một tập $\Omega \subset X$ bằng kỹ thuật gấp đôi số biến. Kết quả này được chỉ ra trên một không gian Banach X có một chuẩn β-trơn hoặc chuẩn tương đương với một chuẩn β-trơn mà không sử dụng giả thiết Radon-Nikodym. Trong chương này chúng tôi cũng chứng minh sự tồn tại và tính ổn định của nghiệm. Các kết quả trong chương được viết dựa trên bài báo [1] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án. Trong luận án này, kết quả về sự tồn tại nghiệm của bài toán Dirichlet cần thêm giả thiết tồn tại nghiệm dưới và nghiệm trên bằng nhau trên biên (so với định lý tồn tại nghiệm trong bài báo [1]). Đồng thời chúng tôi chứng minh thêm một kết quả về sự tồn tại nghiệm của phương trình Hamilton-Jacobi (Định lý 2.2.2).

2.1. Tính duy nhất của nghiệm β-nhớt

Cho X là một không gian Banach thực với chuẩn β-trơn $\|\cdot\|$ (xem nội dung cụ thể trong mục sau), $\Omega \subset X$ là một tập con mở. Chúng ta nghiên cứu sự tồn tại, tính duy nhất, tính ổn định của nghiệm β-nhớt cho phương trình Hamilton-Jacobi sau

$$u + H(x, u, Du) = 0 \text{ trên } \Omega, \tag{2.1}$$

với điều kiện biên (trong trường hợp $\Omega \neq X$)

$$u = \varphi \text{ trên } \partial\Omega. \tag{2.2}$$

Ở đây $u : \Omega \to \mathbb{R}$ và $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$; $H : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times X^*_\beta \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục, trong đó X^*_β là không gian đối ngẫu của không gian Banach X, với tôpô τ_β (xem Định nghĩa **??**).

2.1.1. Nghiệm β-nhớt

Định nghĩa 2.1.1. *Một hàm $u : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là*

(i) một nghiệm dưới β-nhớt của (2.1) *nếu u là nửa liên tục trên và với mọi $x \in \Omega$, $x^* \in D^+_\beta u(x)$, $u(x) + H(x, u(x), x^*) \le 0$;*

(ii) một nghiệm trên β-nhớt của (2.1) nếu u là nửa liên tục dưới và với mọi $x \in \Omega$, $x^* \in D^-_\beta u(x)$, $u(x) + H(x, u(x), x^*) \ge 0$;

(iii) một nghiệm β-nhớt của (2.1) nếu u vừa là một nghiệm dưới β-nhớt và một nghiệm trên β-nhớt.

Để thuận tiện, sau đây chúng tôi sử dụng các cụm từ "nghiệm β-nhớt của $u + H(x, u, Du) \le 0$" và "nghiệm dưới β-nhớt của $u + H(x, u, Du) = 0$" thay thế cho nhau. Tương tự với cụm từ "nghiệm β-nhớt của $u + H(x, u, Du) \ge 0$" và "nghiệm trên β-nhớt của $u + H(x, u, Du) = 0$".

Định nghĩa 2.1.2. *Một hàm $u : \Omega \to \mathbb{R}$ được gọi là một nghiệm dưới β-nhớt (ương ứng nghiệm trên, nghiệm) của bài toán* (2.1)-(2.2) *nếu u là một nghiệm dưới β-nhớt (tương ứng nghiệm trên, nghiệm) của phương trình* (2.1) *và $u \le \varphi$ (tương ứng $u \ge \varphi, u = \varphi$) trên $\partial\Omega$.*

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra các giả thiết về hàm H.

(H0) Tồn tại một hàm liên tục $w_R : X^*_\beta \to \mathbb{R}$ với mỗi $R > 0$, thỏa mãn

$$|H(x, r, p) - H(x, r, q)| \le w_R(p - q)$$

với mọi $x \in X$, $p, q \in X^*$ và $r \in \mathbb{R}$ sao cho $\|x\|, \|q\|, \|p\| \le R$.

(H1) Với mỗi $(x, p) \in X \times X^*$, $r \mapsto H(x, r, p)$ là không giảm.

(H1)* Với mỗi $(x, p) \in X \times X^*$, $r \mapsto H(x, r, p)$ là liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz $L_H < 1$.

(H2) Tồn tại một môđun địa phương σ_H sao cho

$$H(x, r, p) - H(x, r, p + q) \le \sigma_H(\|q\|, \|p\| + \|q\|)$$

với mọi $r \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ và $p, q \in X^*$.

(H3) Tồn tại một môđun m_H sao cho

$$H(y, r, \lambda(\nabla_\beta \|\cdot\|^2)(x - y)) - H(x, r, \lambda(\nabla_\beta \|\cdot\|^2)(x - y)) \le m_H(\lambda\|x - y\|^2 + \|x - y\|)$$

với mọi $x, y \in \Omega$ với $x \ne y$, $r \in \mathbb{R}$ và $\lambda \ge 0$.

2.1.2. Nghiệm bị chặn

Định lý 2.1.3. *Cho X là một không gian Banach với chuẩn tương đương với một chuẩn β-trơn. Xét $F(x,u,Du) = u + H(x,Du)$ với $H : X \times X^*_\beta \to \mathbb{R}$ thỏa mãn giả thiết:*
(B) với mọi $x, y \in X$ và $x^*, y^* \in X^*_\beta$,

$$|H(x,x^*)-H(y,y^*)| \leq w(x-y, x^*-y^*)+K\max(\|x^*\|, \|y^*\|)\|x-y\|,$$

trong đó K là hằng số dương và $w : X \times X^*_\beta \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục với $w(0,0) = 0$.
Cho u, v là hai hàm bị chặn sao cho u nửa liên tục trên và v nửa liên tục dưới. Nếu u là nghiệm dưới β-nhớt và v là nghiệm trên β-nhớt của phương trình $F(x,u,Du) = 0$ thì $u \leq v$.

Hệ quả 2.1.4. *Dưới giả thiết của Định lý 2.1.3, nghiệm β-nhớt trong lớp hàm liên tục và bị chặn của phương trình $u+H(x,Du) = 0$ là duy nhất.*

Định lý 2.1.5. *Cho X là một không gian Banach với chuẩn tương đương với một chuẩn β-trơn. $\Omega \subset X$ là một tập mở.*
Xét $F(x,u,Du) = u + H(x,Du)$ với $H : X \times X^*_\beta \to \mathbb{R}$ thỏa mãn giả thiết:
(C) với mọi $x, y \in X$ và $x^*, y^* \in X^*_\beta$,

$$|H(x,x^*)-H(y,y^*)| \leq w(x-y, x^*-y^*)+K\max(\|x^*\|, \|y^*\|)\|x-y\|,$$

trong đó K là hằng số dương và $w : X \times X^*_\beta \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục với $w(0,0) = 0$.

Giả sử u, v là hai hàm xác định, bị chặn và liên tục đều trên $\overline{\Omega}$. Nếu u là nghiệm dưới β-nhớt và v là nghiệm trên β-nhớt của phương trình $F(x,u,Du) = 0$ và $u \leq v$ trên $\partial\Omega$ thì $u \leq v$ trên $\overline{\Omega}$.

Hệ quả 2.1.6. *Dưới các giả thiết của Định lý 2.1.5, u, v là hai hàm liên tục đều, bị chặn trên $\overline{\Omega}$ sao cho $u = v$ trên $\partial\Omega$. Nếu u, v là hai nghiệm β-nhớt của phương trình $F(x,u,Du) = 0$ thì $u = v$ trên $\overline{\Omega}$.*

2.1.3. Nghiệm không bị chặn

Trên cơ sở những khái niệm cơ bản ở trên, chúng tôi trình bày những kết quả chính về tính duy nhất của nghiệm β-nhớt của (2.1).

Định lý 2.1.7. *Cho X là một không gian Banach với chuẩn β-trơn và Ω là một tập con mở của X. Giả sử rằng hàm H thỏa mãn giả thiết (H0), (H1) (tương ứng (H1)*), (H2), (H3) và $\widehat{H}$ thỏa mãn (H0). Lấy $u, v \in C(\overline{\Omega})$ tương ứng là nghiệm β-nhớt của bài toán*

$$u + H(x, u, Du) \leq 0 \text{ và } v + \widehat{H}(x, v, Dv) \geq 0 \text{ trên } \Omega, \tag{2.3}$$

và giả sử rằng tồn tại một môđun m sao cho

$$|u(x) - u(y)| + |v(x) - v(y)| \leq m(\|x - y\|) \text{ trên } \Omega. \tag{2.4}$$

Khi đó ta có

$$u(x) - v(x) \leq \sup_{\partial\Omega}(u - v)^+ + \sup_{\Omega\times\mathbb{R}\times X^*}(\widehat{H} - H)^+,$$

$$\Big(t.ư. \quad u(x) - v(x) \leq \sup_{\partial\Omega}(u - v)^+ + \frac{1}{1 - L_H}\sup_{\Omega\times\mathbb{R}\times X^*}(\widehat{H} - H)^+\Big), \tag{2.5}$$

với mọi $x \in \Omega$.

Nói riêng, khi $\Omega = X$, ta có được công thức (2.5) *trong đó số hạng $\sup_{\partial\Omega}(u - v)^+$ trong vế phải được thay bởi 0.*

Hệ quả 2.1.8 (So sánh và tính duy nhất)**.** *Cho X là một không gian Banach và có chuẩn tương đương với một chuẩn β-trơn. Cho $\Omega \subset X$ là một tập mở với biên $\partial\Omega \neq \emptyset$, φ là một hàm liên tục trên $\partial\Omega$. Giả sử rằng hàm H thỏa mãn các giả thiết (H0), (H1) (tương ứng (H1)*), (H2) và (H3). Nếu $u, v \in C(\overline{\Omega})$ tương ứng là nghiệm dưới β-nhớt và nghiệm trên β-nhớt của phương trình* (2.1) *thỏa mãn* (2.4)*, thì $u \leq v$ trong Ω, miễn là $u \leq v$ trên $\partial\Omega$. Do đó, bài toán* (2.1), (2.2) *có không quá một nghiệm trên $C(\overline{\Omega})$.*

Trong trường hợp Ω là toàn bộ không gian X, nguyên lý so sánh và tính duy nhất nghiệm của phương trình (2.1) *dễ dàng có được như một hệ quả.*

2.2. Tính ổn định và sự tồn tại của nghiệm β-nhớt

2.2.1. Tính ổn định

Chúng tôi trình bày tính ổn định của nghiệm β-nhớt. Sử dụng tính ổn định giống như ở trong [R. Deville, G. Godefroy, V. Zizler, (1993)], ta có Mệnh đề 2.2.1.

Định lý 2.2.1 (Tính ổn định). *Cho X là một không gian Banach với chuẩn β-trơn và Ω là một tập con mở của X. Lấy $u_n \in C(\Omega)$ và $H_n \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times X_\beta^*)$, $n = 1, 2, ...$ hội tụ đến u, H tương ứng khi $n \to \infty$ theo nghĩa:*

Với mọi $x \in \Omega$ tồn tại một $R > 0$ sao cho $u_n \to u$ đều trên $B_R(x)$ khi $n \to \infty$ và nếu $(x, r, p), (x_n, r_n, p_n) \in \Omega \times \mathbb{R} \times X_\beta^*$ với $n = 1, 2, ...$ và $(x_n, r_n, p_n) \to (x, r, p)$ khi $n \to \infty$, thì $H_n(x_n, r_n, p_n) \to H(x, r, p)$. Nếu u_n là một nghiệm trên β-nhớt (tương ứng nghiệm dưới) của $H_n = 0$ trên Ω, thì u là một nghiệm trên β-nhớt (tương ứng nghiệm dưới) của $H = 0$ trên Ω.

2.2.2. Sự tồn tại

Định lý 2.2.2 (Sự tồn tại). *Cho X là một không gian Banach với chuẩn β-trơn và Ω là một tập con mở của X. Cho $H : \Omega \times \mathbb{R} \times X_\beta^* \to \mathbb{R}$ thỏa mãn (H0), (H1) (tương ứng (H1)*), (H2), (H3) và*

$$\liminf_{\|p\| \to \infty} (r + H(x, r, p)) > 0 \text{ đều với } (x, r) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Khi đó, tồn tại duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình (2.1).

Định lý 2.2.3 (Sự tồn tại nghiệm bài toán Dirichlet). *Dưới các giả thiết của Định lý 2.2.2 và giả sử thêm rằng tồn tại $u_0, v_0 \in C(\overline{\Omega})$ sao cho $u_0 = v_0 = \varphi$ trên $\partial\Omega$; u_0, v_0 tương ứng là nghiệm dưới β-nhớt và nghiệm trên β-nhớt của phương trình* (2.1) *thì bài toán* (2.1)-(2.2) *có nghiệm duy nhất $u \in C(\overline{\Omega})$.*

Kết luận

Trong chương 2 này chúng tôi tập trung một số vấn đề chính:
1. Chứng minh được tính duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi.
2. Chứng minh được tính ổn định nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi.
3. Chứng minh được sự tồn tại nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi.

Chương 3

ỨNG DỤNG CỦA NGHIỆM β-NHỚT ĐỐI VỚI BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

Chương này chúng tôi đã chỉ ra hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn là nghiệm β-nhớt duy nhất của một phương trình Hamilton-Jacobi tương ứng. Tính bị chặn của nghiệm là không cần thiết trong chứng minh của chúng tôi. Ngoài ra trong chương này chúng tôi đã đưa ra điều kiện cần và điều kiện đủ cho bài toán điều khiển tối ưu trong không gian vô hạn chiều bằng cách sử dụng nghiệm β-nhớt. Các kết quả trong chương được viết dựa trên bài báo [2] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

3.1. Bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn

3.1.1. Bài toán điều khiển tối ưu-nguyên lý quy hoạch động Bellman với hàm giá trị trơn

Cho X là một không gian Banach với chuẩn β-trơn và U là một không gian mêtric. Xét phương trình trạng thái

$$\begin{cases} y'(s) = g(y(s), \alpha(s)), \quad s > 0, \\ y(0) = x, \ \alpha(s) \in U, \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $x \in X$ và $g : X \times U \to X$ là một ánh xạ cho trước với điều khiển

$$\alpha(\cdot) \in \mathcal{U} := \{\alpha : [0, \infty) \to U \text{ đo được và } \alpha(t) \in U \text{ với } t \in [0, \infty) \text{ h.k.n.}\}.$$

Ta giới thiệu hàm chi phí

$$J(x, \alpha) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} f(y_x(s), \alpha(s)) ds, \tag{3.2}$$

trong đó $\lambda > 0$ và $f : X \times U \to \mathbb{R}$.

Bài toán điều khiển tối ưu $P(x)$ trên X là tìm $\overline{\alpha}(\cdot) \in \mathcal{U}$ sao cho

$$J(x, \overline{\alpha}(\cdot)) = \inf_{\alpha \in \mathcal{U}} J(x, \alpha).$$

Ta ký hiệu hàm giá trị của $P(x)$ là $V(x)$. Khi đó

$$V(x) = \inf_{\alpha \in \mathcal{U}} J(x, \alpha) = \inf_{\alpha \in \mathcal{U}} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda s} f(y_x(s), \alpha(s)) ds \right).$$

Bây giờ chúng ta đưa ra một một số giả thiết để nghiên cứu tính chất của hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu:
Hàm $g : X \times U \to X$ và $f : X \times U \to \mathbb{R}$ là liên tục và thỏa mãn một trong các điều kiện sau.

(B1) Tồn tại các hằng số $L_0, L, C, m > 0$, $K \in \beta$, với $0 \le m < \frac{\lambda}{L}, K \subset B(0, L)$ và môđun liên tục địa phương $\omega(\cdot, \cdot)$, sao cho với mọi $x, \overline{x} \in X$ và $u \in U$,

$$\begin{cases} |g(x,u) - g(\overline{x}, u)| \le L_0 \|x - \overline{x}\|, \quad g(x, u) \in K, \\ |f(x,u)| \le Ce^{m|x|}, \quad |f(x,u) - f(\overline{x}, u)| \le \omega(|x - \overline{x}|, |x| \vee |\overline{x}|), \end{cases}$$

trong đó $|x| \vee |\overline{x}| = \max\{|x|, |\overline{x}|\}$.

(B2) Tồn tại các hằng số $L_0, L, C, m > 0$, $K \in \beta$, với $0 \le m < \frac{\lambda}{L_0}$, $K \subset B(0, L)$ và một môđun liên tục địa phương $\omega(\cdot, \cdot)$, sao cho với mọi $x, \overline{x} \in X$ và $u \in U$,

$$\begin{cases} |g(x,u) - g(\overline{x}, u)| \le L_0 |x - \overline{x}|, \quad g(0, u) \in K, \\ |f(x,u)| \le C(1 + |x|)^m, \quad |f(x,u) - f(\overline{x}, u)| \le \omega(|x - \overline{x}|, |x| \vee |\overline{x}|). \end{cases}$$

3.1.2. Tính chất của hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu

Mệnh đề 3.1.1 (X.J. Li, J.M. Yong, (1995), Mệnh đề 6.1)**.** *Giả sử một trong hai điều kiện (B1) hoặc (B2) đúng. Khi đó, với mọi $x \in X$ và $u(\cdot) \in \mathcal{U}[0, \infty)$, phương trình trạng thái* (3.1) *có duy nhất một quỹ đạo $y_x(\cdot)$ và hàm chi phí* (3.2) *là được xác định. Hơn nữa, ta có các kết quả sau:*

(a) *Nếu (B1) đúng thì V là hàm liên tục đều địa phương và có một hằng số $M > 0$ sao cho*

$$|V(x)| \le Me^{m|x|}, \quad x \in X.$$

(b) *Nếu (B2) đúng thì V là hàm liên tục đều địa phương và tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho*

$$|V(x)| \leq M(1 + |x|)^m, \quad x \in X.$$

3.2. Ứng dụng của nghiệm β-nhớt đối với bài toán điều khiển tối ưu

Ta xét bài toán điều khiển tối ưu (3.1)-(3.2). Ta xác định hàm $H : X \times X_\beta^* \to \mathbb{R}$ cho bởi

$$H(x,p) = \sup_{\alpha \in \mathcal{U}} \{-\langle p, g(x,\alpha)\rangle - f(x,\alpha)\}.$$

Mệnh đề 3.2.1. *(a) Nếu (B1) đúng thì*

$$\begin{cases} |H(x,p) - H(x,q)| \leq L|p-q|, \\ |H(x,p) - H(y,p)| \leq L_0|p||x-y| + \omega(|x-y|, |x| \vee |y|). \end{cases} \tag{3.3}$$

(b) Nếu (B2) đúng thì

$$\begin{cases} |H(x,p) - H(x,q)| \leq (L + L_0|x|)|p-q|, \\ |H(x,p) - H(y,p)| \leq L_0|p||x-y| + \omega(|x-y|, |x| \vee |y|). \end{cases} \tag{3.4}$$

Định lý 3.2.2. *Cho X là không gian Banach với chuẩn β-trơn. Giả sử (B1) hoặc (B2) đúng. Khi đó, hàm giá trị V là nghiệm β-nhớt duy nhất của*

$$\lambda V(x) + H(x, DV(x)) = 0. \tag{3.5}$$

Định lý 3.2.3. *Với mọi $\alpha(\cdot) \in \mathcal{U}$, hàm sau là không giảm:*

$$s \mapsto \int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t,\alpha), \alpha(t))dt + e^{-\lambda s} V(y_x(s,\alpha)), \quad s \in [0, \infty).$$

Hơn nữa, hàm này là hằng số khi và chỉ khi điều khiển $\alpha(\cdot)$ là tối ưu cho vị trí ban đầu x.

Một kết quả khác của chúng tôi đó là chúng tôi đã đưa ra điều kiện đủ cho điều khiển tối ưu bằng khái niệm nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi.

Mệnh đề 3.2.4. *Nếu V là hàm Lipschitz địa phương và hầu khắp s tồn tại $p \in D^{\pm}_{\beta}V(y_x(s))$ thỏa mãn bất đẳng thức*

$$\lambda V(y_x(s)) - \langle p, y'_x(s)\rangle - f(y_x(s), \alpha(s)) \leq 0,$$

thì $\alpha(\cdot)$ là điều khiển tối ưu với x, trong đó $D^{\pm}_{\beta}V(z) = D^{+}_{\beta}V(z) \cup D^{-}_{\beta}V(z)$.

Mệnh đề sau đưa ra một kết quả quan trọng cho phản hồi tối ưu. Cách tiếp cận của chúng tôi là sử dụng dưới và trên vi phân β-nhớt.

Mệnh đề 3.2.5. *Nếu V là hàm Lipschitz địa phương; $\alpha(\cdot)$ là tối ưu với x, thì*

$$\lambda V(y_x(s)) - \langle p, y'_x(s)\rangle - f(y_x(s), \alpha(s)) = 0$$

đúng với mọi $p \in D^{\pm}_{\beta}V(y_x(s))$ với hầu khắp s.

Từ những kết quả ở trên ta có định lý sau

Định lý 3.2.6. *Giả sử rằng V là hàm Lipschitz địa phương và $D^{\pm}_{\beta}V(y_x(s)) \neq \emptyset$ với hầu khắp nơi $s > 0$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:*

(a) *$\alpha(\cdot)$ là tối ưu với x;*

(b) *với hầu khắp nơi $s > 0$ và với mọi $p \in D^{\pm}_{\beta}V(y_x(s))$,*

$$\lambda V(y_x(s)) - \langle p, y'_x(s)\rangle - f(y, \alpha) = 0; \qquad (3.6)$$

(c) *với hầu khắp nơi $s > 0$ tồn tại $p \in D^{\pm}_{\beta}V(y_x(s))$ sao cho (3.6) đúng.*

Kết luận

Trong chương này, chúng tôi đã chứng minh được hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu là nghiệm β-nhớt duy nhất của phương trình Hamilton-Jacobi. So sánh với kết quả trong [J.M. Borwein, Q.J. Zhu, (1996)] thì nghiệm β-nhớt của chúng tôi là không bị chặn trong khi nghiệm β-nhớt được trình bày trong [J.M. Borwein, Q.J. Zhu, (1996)] là bị chặn. Chúng tôi cũng đã đưa ra một điều kiện cần và điều kiện đủ cho một lớp bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn bằng cách sử dụng nghiệm β-nhớt. Tương tự ta có thể đưa ra những kết quả về bài toán điều khiển tối ưu với thời gian hữu hạn, thời gian tối thiểu và chiết khấu thời gian tối thiểu.

Chương 4

PHƯƠNG TRÌNH HAMILTON-JACOBI VỚI BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU TRÊN KHỚP NỐI VỚI HÀM CHI PHÍ KHÔNG BỊ CHẶN

Nội dung của chương này là nghiên cứu nghiệm nhớt cho bài toán điều khiển tối ưu trên các khớp nối. Chúng tôi đã chỉ ra rằng hàm giá trị là nghiệm nhớt duy nhất của một phương trình Hamilton-Jacobi tương ứng và trình bày những tính chất về nghiệm nhớt đó. Ngoài ra nghiệm nhớt được sử dụng để thiết lập điều kiện cần và điều kiện đủ cho một điều khiển tối ưu trong một lớp bài toán điều khiển tối ưu. Các kết quả trong chương được viết dựa trên bài báo [3] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

4.1. Bài toán ĐKTƯ trên các Khớp nối

4.1.1. Khớp nối

Chúng tôi tập trung vào các khớp nối trên $\mathbb{R}^d$ với N nửa đường thẳng gọi là cạnh, $N > 1$. Với mỗi $i = 1, \cdots, N$, e_i được ký hiệu là véc tơ đơn vị thứ i. Cạnh được ký hiệu bởi $(J_i)_{i=1,\cdots,N}$ trong đó J_i là nửa đường thẳng đóng $\mathbb{R}^+ e_i$. Nửa đường thẳng J_i được gán với nhau tại đỉnh O để tạo thành khớp nối $\mathcal{G}$: $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^N J_i$.

4.1.2. Bài toán điều khiển tối ưu

Chúng tôi nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn có chi phí và quy hoạch động khác nhau cho mỗi cạnh. Với $i = 1, \cdots, N$,

- tập các điều khiển trên J_i được ký hiệu bởi A_i,
- hệ được điều khiển bởi một hệ động lực f_i,
- chi phí hoạt động ℓ_i.

Chúng tôi giới thiệu các giả thiết được sử dụng trong chương này.

(H0) **(Tập điều khiển)** Cho A là một không gian mêtric (ta có thể lấy $A = \mathbb{R}^d$). Với $i = 1, \cdots, N$, A_i là một tập con compact khác rỗng của A và các tập A_i là rời nhau.

(H1) **(Động lực)** Với $i = 1, \cdots, N$, hàm $f_i : J_i \times A_i \to \mathbb{R}$ là liên tục và bị chặn bởi hằng số M. Hơn nữa, có một hằng số $L > 0$ sao cho $|f_i(x,a) - f_i(y,a)| \le L|x-y|$ với mọi $x, y \in J_i, a \in A_i$. Tiếp theo, chúng tôi ký hiệu $F_i(x)$ là tập $\{f_i(x,a)e_i : a \in A_i\}$.
(H2) **(Chi phí)** Với $i = 1, \cdots, N$, hàm $\ell_i : J_i \times A_i \to \mathbb{R}$ là liên tục và tồn tại hằng số $C, m \ge 0$, với $0 \le m < \frac{\lambda}{M}$ và một môđun địa phương liên tục $\omega(\cdot,\cdot)$ sao cho

$$|\ell_i(x,a) - \ell_i(y,a)| \le \omega(|x-y|, |x| \vee |y|) \text{ với mọi } x, y \in J_i, a \in A_i,$$

$$|\ell_i(x,a)| \le Ce^{m|x|} \text{ với mọi } x \in J_i, a \in A_i,$$

(H2)* **(Chi phí)** Với $i = 1, \cdots, N$, hàm $\ell_i : J_i \times A_i \to \mathbb{R}$ là liên tục và có một hằng số $C, m \ge 0$ và một môđun địa phương liên tục $\omega(\cdot,\cdot)$ sao cho

$$|\ell_i(x,a) - \ell_i(y,a)| \le \omega(|x-y|, |x| \vee |y|) \text{ với mọi } x, y \in J_i, a \in A_i,$$

$$|\ell_i(x,a)| \le C(1+|x|)^m \text{ với mọi } x \in J_i, a \in A_i.$$

Chú ý rằng số M ở trong (H2) và (H2)* được cho bởi trong (H1)
(H3) **(Tính lồi của động lực và chi phí)** Với $i = 1, \cdots, N$, tập hợp sau $FL_i(x) = \{(f_i(x,a)e_i, \ell_i(x,a)) : a \in A_i\}$ là tập đóng, khác rỗng và lồi.
(H4) **(Tính điều khiển mạnh)** Tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $[-\delta e_i, \delta e_i] \subset F_i(O) = \{f_i(O,a)e_i : a \in A_i\}$. Đặt

$$\mathcal{M} = \{(x,a) : x \in \mathcal{G}, a \in A_i \text{ nếu } x \in J_i \backslash \{O\} \text{ và } a \in \cup_{i=1}^N A_i \text{ nếu } x = O\}.$$

Khi đó $\mathcal{M}$ là tập đóng. Ta cũng định nghĩa hàm trên $\mathcal{M}$ bởi:

$$\text{với mọi } (x,a) \in \mathcal{M}, \quad f(x,a) = \begin{cases} f_i(x,a)e_i & \text{nếu } x \in J_i \backslash \{O\}, \\ f_i(O,a)e_i & \text{nếu } x = O \text{ và } a \in A_i. \end{cases}$$

Hàm f là liên tục trên $\mathcal{M}$ từ các tập A_i rời nhau. Lấy $\widetilde{F}(x)$ được xác định bởi

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} F_i(x) & \text{nếu } x \in J_i \backslash \{O\} \\ \cup_{i=1}^N F_i(O) & \text{nếu } x = O. \end{cases}$$

Với $x \in \mathcal{G}$, tập quỹ đạo chấp nhận được bắt đầu từ x là

$$Y_x = \left\{ y_x \in Lip(\mathbb{R}^+; \mathcal{G}) : \left| \begin{array}{l} \dot{y}_x(t) \in \widetilde{F}(y_x(t)) \text{ hầu khắp } t > 0 \\ y_x(0) = x \end{array} \right. \right\}.$$

Ta giới thiệu tập quỹ đạo điều khiển chấp nhận được bắt đầu từ x

$$\mathcal{T}_x = \left\{ (y_x, \alpha) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathcal{M}) : y_x \in Lip(\mathbb{R}^+; \mathcal{G}) \text{ và } \right.$$
$$\left. y_x(t) = x + \int_0^t f(y_x(s), \alpha(t)) ds \right\}$$

Hàm chi phí. Chi phí với quỹ đạo $(y_x, \alpha) \in \mathcal{T}_x$ là

$$J(x; (y_x, \alpha)) = \int_0^\infty \ell(y_x(t), \alpha(t)) e^{-\lambda t} dt, \tag{4.1}$$

trong đó $\lambda > 0$ là một số thực và hàm chi phí ℓ được định nghĩa trên $\mathcal{M}$ bởi $\forall (x, a) \in \mathcal{M}, \quad \ell(x, a) = \begin{cases} \ell_i(x, a) & \text{nếu } x \in J_i \backslash \{O\}, \\ \ell_i(O, a) & \text{nếu } x = O \text{ và } a \in A_i. \end{cases}$
Hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn là

$$v(x) = \inf_{(y_x, \alpha) \in \mathcal{T}_x} J(x; (y_x, \alpha)). \tag{4.2}$$

4.1.3. Một số tính chất của hàm giá trị tại đỉnh

Bổ đề 4.1.1. *Với các giả thiết (H0), (H1), (H2) hoặc* $(H2)^*$, *(H3), (H4), tồn tại* $\varepsilon > 0$ *sao cho* $v|_{J_i}$ *là liên tục Lipschitz trên* $J_i \cap B(O, \varepsilon)$.

Bổ đề 4.1.2. *Với các giả thiết (H0), (H1), (H2) hoặc* $(H2)^*$, *(H3), (H4), hàm giá trị* v *thỏa mãn* $v(O) \leq -\frac{H_O^T}{\lambda}$.

4.2. Phương trình HJ và nghiệm nhớt

4.2.1. Hàm thử

Để định nghĩa nghiệm nhớt trên tập $\mathcal{G}$, trước hết chúng ta cần định nghĩa một lớp hàm thử chấp nhận được.

Định nghĩa 4.2.1. *Hàm* $\varphi : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ *là một hàm thử chấp nhận được nếu*

- *φ là liên tục trên $\mathcal{G}$ và C^1 trên $\mathcal{G}\backslash\{O\}$,*
- *với mọi j, $j = 1, \cdots, N$, $\varphi|_{J_j} \in C^1(J_j)$.*

Tập tất cả các hàm thử chấp nhận được được ký hiệu bởi $\mathcal{R}(\mathcal{G})$. Nếu $\varphi \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ và $\zeta \in \mathbb{R}$, thì $D\varphi(x, \zeta e_i)$ được xác định $D\varphi(x, \zeta e_i) = \zeta \frac{d\varphi}{dx_i}(x)$ nếu $x \in J_i\backslash\{O\}$ và $D\varphi(O, \zeta e_i) = \zeta \lim_{h\to 0^+} \frac{d\varphi}{dx_i}(he_i)$.

4.2.2. Trường véc tơ

Với $i = 1, \cdots, N$, ta ký hiệu $F_i^+(O)$ và $FL_i^+(O)$ là các tập hợp

$$F_i^+(O) = F_i(O) \cap \mathbb{R}^+ e_i, \quad FL_i^+(O) = FL_i(O) \cap (\mathbb{R}^+ e_i \times \mathbb{R}),$$

Các tập này khác rỗng nhờ giả thiết (H3). Chú ý rằng $0 \in \cap_{i=1}^N F_i(O)$. Từ giả thiết (H2), các tập này là compact và lồi. Với $x \in \mathcal{G}$, các tập $F(x)$ và $FL(x)$ được xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} F_i(x) & \text{nếu } x \text{ nằm trong cạnh } J_i\backslash\{O\} \\ \cup_{i=1}^N F_i^+(O) & \text{nếu } x = O, \end{cases}$$

$$FL(x) = \begin{cases} FL_i(x) & \text{nếu } x \text{ nằm trong cạnh } J_i\backslash\{O\} \\ \cup_{i=1}^N FL_i^+(O) & \text{nếu } x = O. \end{cases}$$

4.2.3. Định nghĩa nghiệm nhớt

Bây giờ ta định nghĩa nghiệm nhớt của phương trình

$$\lambda u(x) + \sup_{(\zeta,\xi)\in FL(x)} \{-Du(x,\zeta) - \xi\} = 0 \quad \text{trên } \mathcal{G}. \tag{4.3}$$

Định nghĩa 4.2.2. • *Một hàm nửa liên tục trên $u : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ là một nghiệm nhớt dưới của (4.3) trên $\mathcal{G}$ nếu với mọi $x \in \mathcal{G}$, mọi $\varphi \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ sao cho $u - \varphi$ đạt cực đại địa phương tại điểm x, thì*

$$\lambda u(x) + \sup_{(\zeta,\xi)\in FL(x)} \{-D\varphi(x,\zeta) - \xi\} \le 0. \tag{4.4}$$

• *Một hàm nửa liên tục dưới $u : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ là một nghiệm nhớt trên của (4.3) trên $\mathcal{G}$ nếu với mọi $x \in \mathcal{G}$, mọi $\varphi \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ sao cho $u - \varphi$ đạt cực tiểu địa phương tại x, thì*

$$\lambda u(x) + \sup_{(\zeta,\xi)\in FL(x)} \{-D\varphi(x,\zeta) - \xi\} \ge 0. \tag{4.5}$$

• *Hàm liên tục $u : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ là nghiệm nhớt của (4.3) trên $\mathcal{G}$ nếu nó vừa là nghiệm nhớt dưới vừa là nghiệm nhớt trên của (4.3) trên $\mathcal{G}$.*

4.2.4. Hàm Hamilton

Ta định nghĩa hàm Hamilton $H_i : J_i \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bởi

$$H_i(x,p) = \max_{a \in A_i}\{-pf_i(x,a) - \ell_i(x,a)\}$$

và hàm Hamilton $H_O : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ bởi

$$H_O(p_1,\cdots,p_N) = \max_{i=1,\cdots,N}\ \max_{a\in A_i \text{ s.t. } f_i(O,a)\geq 0}\{-p_i f_i(O,a) - \ell_i(O,a)\}.$$

Định nghĩa 4.2.3. • *Một hàm nửa liên tục trên $u : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ là một nghiệm nhớt dưới của* (4.3) *trên $\mathcal{G}$ nếu với mọi $x \in \mathcal{G}$, mọi $\varphi \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ sao cho $u - \varphi$ đạt cực đại địa phương tại x, thì*

$$\begin{aligned} &\lambda u(x) + H_i\left(x, \frac{d\varphi}{dx_i}(x)\right) \leq 0 \qquad \text{nếu } x \in J_i \setminus \{O\},\\ &\lambda u(O) + H_O\left(\frac{d\varphi}{dx_1}(O),\cdots,\frac{d\varphi}{dx_N}(O)\right) \leq 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

• *Một hàm nửa liên tục dưới $u : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ là một nghiệm nhớt trên của* (4.3) *trên $\mathcal{G}$ nếu với mọi $x \in \mathcal{G}$, mọi $\varphi \in \mathcal{R}(\mathcal{G})$ sao cho $u - \varphi$ đạt cực tiểu địa phương tại x, thì*

$$\begin{aligned} &\lambda u(x) + H_i\left(x, \frac{d\varphi}{dx_i}(x)\right) \geq 0 \qquad \text{nếu } x \in J_i \setminus \{O\}\\ &\lambda u(O) + H_O\left(\frac{d\varphi}{dx_1}(O),\cdots,\frac{d\varphi}{dx_N}(O)\right) \geq 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Định lý 4.2.4. *Giả sử (H0), (H1), (H2) (hoặc (H2)*) và (H3) đúng, hàm giá trị v được xác định trong* (4.2) *là một nghiệm nhớt của* (4.3) *trong $\mathcal{G}$.*

4.3. Nguyên lý so sánh và tính duy nhất

Định lý 4.3.1. *(a) Giả sử (H0), (H1), (H2) và (H3) đúng. Lấy $u, v : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $|u(x)| \leq Ke^{m|x|}$, $|v(x)| \leq Ke^{m|x|}$ với hằng số $K > 0$, $x \in \mathcal{G}$, với $0 \leq m < \frac{\lambda}{M}$ và u, v liên tục trên $\mathcal{G}$. Hơn nữa tồn tại $r_i > 0$ sao cho $u|_{J_i}, v|_{J_i}$ là liên tục Lipschitz trên $J_i \cap B(O, r_i)$. Giả sử rằng u là một nghiệm nhớt dưới và v là một nghiệm nhớt trên của* (4.3) *trên $\mathcal{G}$. Khi đó $u \leq v$.*

(b) Giả sử (H0), (H1), (H2)* và (H3) đúng. Lấy $u, v : \mathcal{G} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$|u(x)| \leq K(1+|x|)^m, \ |v(x)| \leq K(1+|x|)^m$$

với hằng số $K > 0$, $x \in \mathcal{G}$, với $0 \leq m$ và u, v liên tục trên $\mathcal{G}$. Hơn nữa tồn tại $r_i > 0$ sao cho $u|_{J_i}, v|_{J_i}$ là liên tục trên $J_i \cap B(O, r_i)$. Giả sử rằng u là một nghiệm nhớt dưới và v là một nghiệm nhớt trên của (4.3) trên $\mathcal{G}$. Khi đó $u \leq v$.

4.4. Ứng dụng của nghiệm nhớt

Định lý 4.4.1. *Với mọi $x \in \mathcal{G}$ và $(y_x, \alpha) \in \mathcal{T}_x$, hàm sau là không giảm:*

$$s \mapsto \int_0^s e^{-\lambda t} f(y_x(t), \alpha(t))dt + e^{-\lambda s} v(y_x(s)), \quad s \in [0, \infty).$$

Hơn nữa nó là hàm hằng nếu và chỉ nếu điều khiển $\alpha(\cdot)$ là tối ưu với vị trí ban đầu x.

Định lý 4.4.2. *Với mỗi $x \in \mathcal{G}$, nếu $\alpha(\cdot)$ là một điều khiển sao cho với $(y_x, \alpha) \in \mathcal{T}_x$ và hàm giá trị v là liên tục Lipschitz và thỏa mãn*

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{v(y_x(s) + tf(y_x(s), \alpha(s))) - v(y_x(s))}{t} + \ell(y_x(s), \alpha(s)) \leq \lambda v(y_x(s)) \tag{4.8}$$

với hầu khắp nơi s, khi đó $\alpha(\cdot)$ là tối ưu với thời điểm đầu x.

Định lý 4.4.3. *Giả sử rằng hàm giá trị v là Lipschitz địa phương. Khi đó $\alpha(\cdot)$ là tối ưu với thời điểm đầu x nếu và chỉ nếu*

$$\lim_{t \to 0} \frac{v(y_x(s) + tf(y_x(s), \alpha(s))) - v(y_x(s))}{t} + \ell(y_x(s), \alpha(s)) = \lambda v(y_x(s)) \tag{4.9}$$

với hầu khắp nơi s.

Kết luận

Nội dung của chương này nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu trên các khớp nối. So sánh với những kết quả gần đây, hàm chi phí mà chúng tôi sử dụng trong một lớp rộng hơn. Do đó, hàm giá trị đạt được có thể không bị chặn. Chúng tôi cũng đã thiết lập được một điều kiện cần và đủ cho một điều khiển tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn.

KẾT LUẬN

Luận án nghiên cứu ứng dụng của dưới vi phân cho nghiệm nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi trong không gian Banach. Cụ thể luận án nghiên cứu các vấn đề sau: (1) dưới vi phân β-nhớt, các tính chất của dưới vi phân β-nhớt, nguyên lý biến phân trơn; (2) tính duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi trong không gian Banach có dạng $u+H(x,Du)=0$ và $u+H(x,u,Du)=0$ bao gồm tính chất của nghiệm và tính tổng quát của Hamiltonian; tính ổn định và sử tồn tại của nghiệm β-nhớt cho phương trình; (3) nghiệm β-nhớt của bài toán điều khiển tối ưu trong không gian Banach, phản hồi tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn; (4) nghiệm nhớt của bài toán điều khiển tối ưu trên khớp nối, điều kiện cần và đủ cho một điều khiển tối ưu. Cụ thể, luận án đã đạt được các kết quả sau:

1. Chứng minh được một số kết quả về nguyên lý biến phân trơn cho hàm nửa liên tục dưới và bị chặn ở trên không gian Banach X thỏa mãn giả thiết (H_β^*) và trên không gian có chuẩn β-trơn.
2. Chứng minh tính duy nhất nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi trong lớp hàm liên tục và bị chặn cho phương trình Hamilton-Jacobi có dạng $u + H(x, Du) = 0$, tính duy nhất nghiệm trong lớp hàm liên tục đều và không bị chặn đối với phương trình đạo hàm riêng cấp 1 dạng tổng quát $u + H(x, u, Du) = 0$. Chứng minh được tính ổn định và sự tồn tại nghiệm β-nhớt của phương trình Hamilton-Jacobi dạng tổng quát $u + H(x, u, Du) = 0$.
3. Chứng minh hàm giá trị của bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn là nghiệm β-nhớt duy nhất của phương trình Hamilton-Jacobi tương ứng, chứng minh được điều kiện cần và đủ đối với một điều khiển tối ưu.
4. Khi nghiên cứu nghiệm nhớt trên các khớp nối: Chứng minh được một số tính chất của hàm giá trị như tính liên tục, độ tăng, tính bị chặn trên tại điểm O. Thiết lập được một điều kiện cần và đủ cho một điều khiển tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu với thời gian vô hạn.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] T.V. Bang, P.T. Tien, (2018), On the existence, uniqueness, and stability of β-viscosity solutions to a class of Hamilton-Jacobi equations in Banach spaces, *Acta Math. Vietnam* DOI: 10.1007/s40306-018-0287-7

[2] P.T. Tien, T.V. Bang, (2019), Uniqueness of β-viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations and applications to a class of optimal control problems, *Differential Equations and Dynamical Systems,* DOI: 10.1007/s12591-019-00479-7

[3] P.T. Tien, T.V. Bang, (2019), Hamilton-Jacobi equations for optimal control on junctions with unbounded running cost functions, *Applicable Analysis,* DOI: 10.1080/00036811.2019.1643012.