BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2
****

KHỔNG CHÍ NGUYỆN

TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ ỔN ĐỊNH VỮNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC TUYẾN TÍNH TRÊN THANG THỜI GIAN

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 9.46.01.02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **1. PGS. TS. ĐỖ ĐỨC THUẬN**
2. GS. TS. NGUYỄN HỮU DƯ

HÀ NỘI - 2019

Luận án được hoàn thành trên cơ sở những nghiên cứu của tác giả tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2.

Tập thể hướng dẫn: **PGS. TS. ĐỖ ĐỨC THUẬN và GS. TS. NGUYỄN HỮU DƯ**

Phản biện 1: . . . .

Phản biện 2: . . . .

Phản biện 3: . . . .

Luận án được tổ chức bảo vệ tại Hội đồng chấm luận án tiến sĩ, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 vào hồi . . . . . giờ . . . . . phút, ngày . . . . ./ . . . . ./2020

Luận án được công khai tại:

1. **Thư viện Quốc gia Việt Nam.**
2. **Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2.**

GIỚI THIỆU

Năm 1988, lý thuyết giải tích trên thang thời gian đã được Stefan Hilger giới thiệu trong Luận án tiến sĩ của mình với mục đích thống nhất và mở rộng lý thuyết giải tích thời gian rời rạc và liên tục. Một trong những bài toán quan trọng là xét tính ổn định của phương trình động lực trên thang thời gian. Đã có nhiều công trình liên qua đến chủ đề này được công bố trong những năm qua. Nội dung luận án là nghiên cứu tính ổn định và ổn định vững của phương trình động lực tuyến tính thông qua số mũ Lyapunov, số mũ Bohl và bán kính ổn định.

Số mũ Lyapunov, số mũ Bohl được sử dụng để nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của các nghiệm của phương trình vi phân. Số mũ Lyapunov được A.M. Lyapunov (1857-1918) giới thiệu trong Luận án tiến sĩ của mình năm 1982, số mũ Bohl được P. Bohl (1865-1921) công bố vào năm 1913 trong một bài báo[1]. Cả hai cùng mô tả sự tăng trưởng cấp số mũ của nghiệm của phương trình $\dot{x} = A(t)x$.

Phương pháp số mũ Lyapunov là một nội dung cơ bản, kinh điển được sử dụng để xét tính ổn định của phương trình vi phân và sai phân. Tuy nhiên, cho đến nay, chưa có bất kỳ công trình nào liên quan đến khái niệm số mũ Lyapunov và tính ổn định của các hàm xác định trên thang thời gian. Lý do chính là cách tiếp cận truyền thống thông qua hàm logarit là không thể, bởi vì không có một định nghĩa hàm logarit có thể chấp nhận được trên thang thời gian, mà được xem như là hàm ngược của hàm mũ $e_{p(t)}(t,s)$.

Luận án nghiên cứu phương pháp Lyapunov thứ nhất của phương trình động lực với cách tiếp cận phù hợp, thay vì xét giới hạn $\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |f(t)|$, ta sử dụng dao động của tỉ số $\frac{|f(t)|}{e_\alpha(t,t_0)}$ khi $t \to \infty$ theo tham số α để định nghĩa số mũ Lyapunov của hàm f trên thang thời gian và sử dụng nó để nghiên cứu tính ổn định của phương trình động lực.

$$x^\Delta = A(t)x.$$

Một số kết quả nghiên cứu được trình bày ở Chương 2 của Luận án, chẳng hạn: điều kiện cần và đủ để tồn tại số mũ $\Upsilon[f(\cdot)]$ thông thường và các tính chất cơ bản; điều kiện cần về tính bị chặn của số mũ Lyapunov $\Upsilon[x(\cdot)]$, trong đó $x(\cdot) \neq 0$ là nghiệm của phương trình $x^\Delta = A(t)x$; điều kiện đủ về tính ổn định của phương trình $x^\Delta = A(t)x$ với giả thiết bổ sung $\|A(t)\| \leq \mathcal{M}, t \in \mathbb{T}_\tau$, đặc biệt là điều kiện phổ về tính ổn định mũ.

Số mũ Bohl được sử dụng để đặc trưng tính ổn định mũ và rút ra kết quả về tính vững của các phương trình vi phân thường (ODEs). Trong bài báo Chyan et al. (2008), các tác giả đã tổng quát hóa một số kết quả liên quan đến số mũ Bohl của

[1] Bohl P. (1913), Uber Differentialungleichungen, J.F.d. Reine Und Angew. Math., **144**, 284–133.

phương trình vi phân-đại số, tuyến tính có chỉ số-1

$$E(t)\dot{x} = A(t)x + f(t),$$

trong đó $E(\cdot)$ được giả sử là suy biến. Năm 2009, Linh and Mehrmann đã nghiên cứu phổ Bohl và số mũ Bohl của nghiệm và ma trận nghiệm cơ bản của DAE. Tuy nhiên, số mũ Bohl không phải là mục tiêu của cả hai bài báo, Chyan et al. (2008), Linh and Mehrmann (2009). Năm 2012, trong bài báo của mình, Berger đã phát triển lý thuyết số mũ Bohl đối với phương trình vi phân-đại số, tuyến tính, thời gian biến thiên. Những kết quả của bài báo là sự tổng quát những kết quả của phương trình vi phân thường trong Daleckii and Krein (1974), Hinrichsen et al. (1989)... Năm 2016, các tác giả bài báo Du et al. đã giới thiệu khái niệm số mũ Bohl và đặc trưng mối quan hệ giữa tính ổn định mũ và số mũ Bohl của hệ các phương trình sai phân tuyến tính suy biến với hệ số biến thiên.

Chương 3 của luận án sẽ giới thiệu số mũ Bohl của phương trình động lực ẩn $E_\sigma(t)x^\Delta = A(t)x$ và đặc trưng mối liên hệ giữa tính ổn định mũ và số mũ Bohl. Một số kết quả chính là: Xây dựng được công thức nghiệm của phương trình $E_\sigma(t)x^\Delta = A(t)x + f(t)$ với điều kiện ban đầu $P(t_0)(x(t_0) - x_0) = 0$; trình bày một số đặc trưng về tính ổn định của phương trình động lực ẩn chịu nhiễu Lipschitz, Định lý 3.10, Định lý 3.11; mở rộng định lý ổn định kiểu Bohl-Perron; đưa ra khái niệm số mũ Bohl của phương trình $E_\sigma(t)x^\Delta = A(t)x$ và mối liên hệ với tính ổn định mũ đã được xem xét, Định lý 3.18. Tính vững của số Bohl được chứng minh khi phương trình $E_\sigma(t)x^\Delta = A(t)x$ chịu nhiễu tác động lên vế phải hoặc cả hai vế, Định lý 3.21, Định lý 3.22.

Vấn đề cuối cùng được nghiên cứu trong luận án là bán kính ổn định của phương trình động lực ẩn trên thang thời gian. Ta biết rằng bán kính ổn định của phương trình vi phân-đại số, phương trình sai phân ẩn đã thu sự chú ý của nhiều nhà nghiên cứu. Đã có nhiều công trình được công bố, nhưng các kết quả về bán kính ổn định của hệ tuyến tính, thời gian biến thiên thì rất hạn chế. Khái niệm về bán kính ổn định của hệ tuyến tính, thời gian biến thiên được giới thiệu đầu tiên trong bài báo Hinrichsen et al. (1992)

$$r_{\mathbb{C}}(I, A; B, C) = \inf \left\{ \begin{array}{l} \|\Sigma\|_{L_\infty}, \Sigma \in \mathrm{PC_b}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^{m\times q}) \\ \text{and } (I, A; B, C) \text{ is not exponential stable} \end{array} \right\},$$

và công thức tính bán kính ổn định rút ra trong bài báo Jacob (1998),

$$r_{\mathbb{K}}(I, A; B, C) = \sup_{t_0 \geq 0} \|\mathbb{L}_{t_0}\|^{-1}.$$

Năm 2006, các tác giả đã nghiên cứu bán kính ổn định của phương trình vi phân-đại số, tuyến tính, thời gian biến thiên có chỉ số-1 trong bài báo Du and Linh (2006) và nhận được công thức tính,

$$r_{\mathbb{K}}(E, A; B, C) = \min \left\{ \sup_{t_0 \geq 0} \|\mathbb{L}_{t_0}\|^{-1}, \|\widetilde{\mathbb{L}}_0\|^{-1} \right\}.$$

Năm 2019, Rodjanadid et al. đã nghiên cứu và rút ra được công thức bán kính ổn định của phương trình sai phân ẩn, tuyến tính, thời gian biến thiên có chỉ số-1,

$$r_{\mathbb{K}}(E, A; B, C) = \min \left\{ \sup_{n_0 \geq 0} \|\mathbb{L}_{n_0}\|^{-1}, \|\widetilde{\mathbb{L}}_0\|^{-1} \right\}.$$

Năm 2014, T. Berger đã thu được một vài cận dưới về bán kính ổn định của phương trình vi phân-đại số, thời gian biến thiên có chỉ số-1 chịu nhiễu không cấu trúc tác động lên hệ số của đạo hàm,

$$r(E, A) \geq \begin{cases} \frac{\min\{l(E,A), \|QG^{-1}\|_\infty^{-1}\}}{\kappa_1 + \kappa_2 \min\{l(E,A), \|QG^{-1}\|_\infty^{-1}\}} & \text{if } Q \neq 0, \\ \frac{l(E,A)}{\kappa_1 + \kappa_2 l(E,A)}, & \text{if } Q = 0 \text{ and } l(E, A) < \infty, \\ \frac{1}{\kappa_2}, & \text{if } Q = 0 \text{ and } l(E, A) = \infty. \end{cases}$$

Những kết quả nghiên cứu về tính ổn định, ổn định vững trên thang thời gian của phương trình vi phân-đại số, tuyến tính, thời gian biến thiên,

$$E_\sigma(t) x^\Delta(t) = A(t)x(t) + f(t),$$

có dạng thuần nhất tương ứng

$$E_\sigma(t) x^\Delta(t) = A(t)x(t).$$

được trình bày ở Chương 4 của luận án. Một số kết quả chính: công thức tính bán kính ổn định có cấu trúc của phương trình động lực ẩn, Định lý 4.9; cận dưới của bán kính ổn định đối với phương trình chịu nhiễu có cấu trúc tác động lên cả đạo hàm và vế phải, Định lý 4.20, Hệ quả 4.22. Nhiều kết quả trước đây về bán kính ổn định của các phương trình vi phân/sai phân, phương trình vi phân-đại số/sai phân ẩn với thời gian biến thiên cũng đã được tổng quát hóa bởi những kết quả thu được, các Nhận xét 4.10, 4.11, 4.14, và 4.15.

Luận án được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, Khóa 2015 - 2019 và được trình bày tại seminar của Khoa Toán, HPU2. Những kết quả chính của luận án cũng được báo cáo tại

1. Hội thảo liên kết Việt Nam - Hàn Quốc về Hệ Động lực và các Chủ đề liên quan (Viện Nghiên cứu Cao cấp về Toán, Hà Nội, 02-05/3/2016);

2. Hội nghị Quốc tế Thái Bình Dương mở rộng lần thứ 2 về Tô-pô và Ứng dụng (Đại học Quốc gia Pusan, Busan, Hàn Quốc, 13-17/11/2017);

3. Đại hội Toán học Toàn quốc lần thứ 9 (Hội Toán học Việt Nam, Nha Trang, 14-18/8/2018); và

4. Hội thảo Quốc tế về Phương trình Vi phân và Hệ Động lực (ĐHSP Hà Nội 2 và Viện Toán học - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, Vĩnh Phúc, 05-07/9/2019)

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Những kiến thức cơ bản nhất về giải tích trên thang thời gian cần thiết để nghiên cứu về tính ổn định và ổn định vững của phương trình động lực sẽ được trình bày ở chương này. Nội dung của Chương 1 được trích dẫn từ hai cuốn sách chuyên khảo về thang thời gian của các tác giả M. Bohner và A. Peterson được xuất bản vào năm 2001, 2003 và một số tài liệu tham khảo khác.

1.1 Thang Thời gian và các Phép toán

1.1.1 Định nghĩa và Ví dụ

Thang thời gian được ký hiệu bằng $\mathbb{T}$, là một tập con tùy ý, đóng và khác rỗng của tập số thực $\mathbb{R}$. Ta luôn giả thiết rằng $\mathbb{T}$ có một tô-pô được cảm sinh từ tô-pô trên $\mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.2 (Bohner & Peterson (2001), trang 1)**.** Giả sử $\mathbb{T}$ là thang thời gian. Với mọi $t \in \mathbb{T}$, ta định nghĩa

i) *toán tử nhảy tiến* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ là $\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : \ s > t\}$,

ii) *toán tử nhảy lùi* $\varrho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ là $\varrho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : \ s < t\}$, and

iii) *hàm hạt* $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ là $\mu(t) = \sigma(t) - t$.

Ta định nghĩa tập hợp $\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T} \backslash (\varrho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}] & \text{nếu } \sup \mathbb{T} < \infty, \\ \mathbb{T} & \text{nếu } \sup \mathbb{T} = \infty. \end{cases}$

Định nghĩa 1.4 (Bohner & Peterson (2001), trang 2)**.** Một điểm $t \in \mathbb{T}$ được gọi là *trù mật-trái* nếu $t > \inf \mathbb{T}$ và $\varrho(t) = t$; *trù mật-phải* nếu $t < \sup \mathbb{T}$ và $\sigma(t) = t$, và *trù mật* nếu t đồng thời là trù mật-trái và trù mật-phải; *cô lập-trái* nếu $\varrho(t) < t$; *cô lập-phải* nếu $\sigma(t) > t$, và *cô lập* nếu t đồng thời là cô lập-trái và cô lập phải.

Nếu $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ là một hàm, thì $f_\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ là một hàm được xác định bởi $f_\sigma(t) = f(\sigma(t))$ for all $t \in \mathbb{T}$, nghĩa là, $f_\sigma = f \circ \sigma$. Với $t_0 \in \mathbb{T}$ cố định, ta định nghĩa tập hợp $\mathbb{T}_{t_0} := [t_0, \infty) \cap \mathbb{T}$.

1.1.2 Vi phân

Định nghĩa 1.7 (Bohner & Peterson (2001), trang 5)**.** Hàm $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ được gọi là *khả vi delta* tại $t \in \mathbb{T}$ nếu tồn tại một hàm $f^{\Delta}(t)$ sao cho với mọi $\varepsilon > 0$, thì

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|,$$

với mọi $s \in U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ và một vài $\delta > 0$. Hàm $f^{\Delta}(t)$ được gọi là *đạo hàm delta* (hay *Hilger*) của hàm f. Khi đó f được gọi là *khả vi delta* (hay *Hilger*) trên $\mathbb{T}^{\kappa}$. Ta dùng các thuật ngữ *đạo hàm, khả vi* thay cho *đạo hàm delta, khả vi delta* nếu không gây ra nhầm lẫn.

1.1.3 Tích phân

Định nghĩa 1.16 (Bohner & Peterson (2001), trang 22)**.** Hàm $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ được gọi là *chính quy* nếu giới hạn phải tồn tại (hữu hạn) tại mọi điểm trù mật phải trong $\mathbb{T}$ và giới hạn trái tồn tại (hữu hạn) tại mọi điểm trù mật trái trong $\mathbb{T}$; *rd-liên tục* nếu nó liên tục tại các điểm trù mật-phải trong $\mathbb{T}$ và giới hạn trái tồn tại (hữu hạn) tại mọi điểm trù mật-trái trong $\mathbb{T}$.

Tập các hàm *rd*-liên tục $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ được ký hiệu là $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Tập các hàm $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ khả vi và đạo hàm của nó là *rd*-liên tục được ký hiệu là $C^1_{rd} = C^1_{rd}(\mathbb{T}) = C^1_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Tập các hàm $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ xác định trên khoảng $J \subset \mathbb{T}$, rd-liên tục và lấy giá trị trong X được ký hiệu là $C_{rd}(J, X)$.

Định nghĩa 1.17 (Bohner & Peterson (2001), trang 22)**.** Hàm $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ được gọi là *tiền khả vi* trong miền khả vi D, nếu $D \subset \mathbb{T}^{\kappa}$, $\mathbb{T}^{\kappa} \setminus D$ là đếm được và không chứa bất kỳ một phần tử cô lập-phải nào của $\mathbb{T}$, và f khả vi tại mỗi điểm $t \in D$.

Định nghĩa 1.20 (Guseinov (2003))**.** Giả sử $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ là một hàm chính quy.

i) Hàm f được gọi là *tiền nguyên hàm* của f nếu $F^{\Delta}(t) = f(t)\ \forall\ t \in D$.

ii) Tích phân không xác định của f được xác định bởi $\int f(t)\Delta t = F(t) + C$, trong đó C là hằng số bất kỳ, F là một tiền nguyên hàm của f.

iii) *Tích phân Cauchy* của f được xác định bởi $\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a), \forall a, b \in \mathbb{T}$, trong đó F là một tiền nguyên hàm.

iv) Hàm $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ được gọi là *nguyên hàm* của $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ nếu $F^{\Delta}(t) = f(t)$ đúng với mọi $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$.

Định lý 1.25 (Akin-Bohner et al. (2005), Bohner & Peterson (2003), trang 46)**.** *Cho $a \in \mathbb{T}^{\kappa}, b \in \mathbb{T}$ và giả sử $f : \mathbb{T} \times \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ liên tục tại (t, t), trong đó $t \in \mathbb{T}^{\kappa}, t > a$. Ta cũng giả thiết rằng $f^{\Delta}(t, \cdot)$ rd-liên tục trên khoảng $[a, \sigma(t)]$. Cũng giả thiết rằng $f(\cdot, \tau)$ khả vi delta differentiable với mỗi $\tau \in [a, \sigma(t)]$. Giả sử rằng với bất kỳ $\varepsilon > 0$, tồn tại một lân cận*

U của t, sao cho $|f(\sigma(t),\tau) - f(s,\tau) - f^{\Delta}(t,\tau)(\sigma(t)-s)| \leq \varepsilon|\sigma(t)-s|$, *với mọi* $s \in U$, *trong đó* f^{Δ} *ký hiệu là đạo hàm của* f *tương ứng với biến thứ nhất. Khi đó*

$$g(t) := \int_a^t f(t,\tau)\Delta\tau \ \text{ chỉ ra } \ g^{\Delta}(t) = f(\sigma(t),t) + \int_a^t f^{\Delta}(t,\tau)\Delta\tau.$$

1.1.4 Tính Hồi quy

Định nghĩa 1.26 (Bohner & Peterson (2003), trang 10)**.** Hàm $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ được gọi là *hồi quy*, nếu $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$, với mọi $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$; *hồi quy dương*, nếu $1 + \mu(t)p(t) > 0$, với mọi $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$; và *hồi quy đều*, nếu tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho $|1 + \mu(t)p(t)| \geq \delta$, với mọi $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$.

Ký hiệu $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ (tương ứng, $\mathcal{R}^{+} = \mathcal{R}^{+}(\mathbb{T},\mathbb{R})$) là tập các hàm hồi quy (tương ứng, hồi quy dương) trên thang thời gian.

1.2 Hàm mũ

Định nghĩa 1.33 (Bohner & Peterson (2001), trang 59)**.** Nếu $p(\cdot) \in \mathcal{R}$, thì hàm mũ trên thang thời gian được định nghĩa là

$$e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right) \text{ for all } s,t \in \mathbb{T},$$

trong đó $\xi_h(z)$ là phép biến đổi trụ, $\xi_h(z) := \begin{cases} \frac{\mathrm{Log}(1+zh)}{h} & \text{nếu } h > 0, \\ z & \text{nếu } h = 0. \end{cases}$

1.3 Bất đẳng thức

Bổ đề 1.36 (Bổ đề Gronwall-Bellman, Bohner & Peterson (2001), trang 257)**.** *Cho* $y \in \mathrm{C_{rd}}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ *và* $k \in \mathcal{R}^{+}(\mathbb{T},\mathbb{R})$, $k \geq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. *Giả thiết rằng* $y(t)$ *thỏa mãn bất đẳng thức* $y(t) \leq \alpha + \int\limits_{t_0}^{t} k(s)y(s)\Delta s$, *for all* $t \in \mathbb{T}, t \geq t_0$. *Khi đó,* $y(t) \leq \alpha e_{k(t)}(t,t_0)$ *đúng với mọi* $t \in \mathbb{T}, t \geq t_0$.

Định lý 1.39 (Bất đẳng thức Hölder, Bohner & Peterson (2001), trang 259)**.** *Cho* $a,b \in \mathbb{T}$. *Với mọi hàm rd-liên tục* $f,g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $p,q > 0, p > 1$ *và* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *ta có*

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\Delta t \leq \left\{\int_a^b |f(t)|^p \Delta t\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_a^b |g(t)|^q \Delta t\right\}^{\frac{1}{q}},$$

1.4 Phương trình Động lực Tuyến tính

Cho $A : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}^{n\times n}$ là một hàm rd-liên tục. Xét phương trình động lực tuyến tính n-chiều $x^\Delta = A(t)x$ với mọi $t \in \mathbb{T}$.

Định lý 1.42 (Hilger (1990))**.** *Giả thiết $A(\cdot)$ là hàm giá trị ma trận rd-liên tục. Khi đó, với mỗi $t_0 \in \mathbb{T}^\kappa$, bài toán giá trị ban đầu*

$$x^\Delta = A(t)x,\ x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

có nghiệm duy nhất $x(\cdot)$ xác định trên $t \geq t_0$. Hơn nữa, nếu $A(\cdot)$ là hồi quy thì nghiệm này xác định trên $t \in \mathbb{T}^\kappa$.

Nghiệm của phương trình (1.1) được gọi là *toán tử Cauchy*, hay *hàm mũ ma trận* và được ký hiệu là $\Phi_A(t, t_0)$ hay $\Phi(t, t_0)$.

Định lý 1.44 (Bohner & Peterson (2001), trang 195)**.** *Cho $A : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}^{m\times m}$ và $f : \mathbb{T}^\kappa \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ là rd-liên tục. Nếu $x(t)$, $t \geq t_0$, là một nghiệm của phương trình động lực $x^\Delta = A(t)x + f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, thì*

$$x(t) = \Phi_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_A(t, \sigma(s)) f(s, x(s))\Delta s, \quad t \geq t_0.$$

1.5 Tính Ổn định của Phương trình Động lực

Cho $\mathbb{T}$ là một thang thời gian, $t_0 \in \mathbb{T}$. Xét phương trình động lực có dạng

$$x^\Delta = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{T}, \tag{1.2}$$

trong đó $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ là rd-liên tục. Nếu $f(t, 0) = 0$, thì phương trình (1.2) có nghiệm tầm thường $x \equiv 0$. Ký hiệu $x(t; t_0, x_0)$ là nghiệm của bài toán Cauchy (1.2).

Định nghĩa 1.45 (DaCunha (2005a), Hilger (1990))**.** Nghiệm tầm thường $x \equiv 0$ of dynamic equation của phương trình động lực (1.2) được gọi là ổn định mũ nếu tồn tại một hằng số dương α thỏa mãn $-\alpha \in \mathcal{R}^+$ và một số dương $\delta > 0$ sao cho với mỗi $t_0 \in \mathbb{T}$ tồn tại số $N = N(t_0) > 0$, nghiệm của phương trình (1.2) với điều kiện ban đầu $x(t_0) = x_0$ thoả mãn $\|x(t; t_0, x_0)\| \leq N\|x_0\|e_{-\alpha}(t, t_0)$, với mọi $t \geq t_0, t \in \mathbb{T}$ và $\|x_0\| < \delta$. Nếu hằng số N có thể được lựa chọn độc lập với $t_0 \in \mathbb{T}$ thì nghiệm $x \equiv 0$ của phương trình (1.2) được gọi là ổn định mũ đều.

CHƯƠNG 2

SỐ MŨ LYAPUNOV CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC

Ở Chương 2, ta sẽ nghiên cứu phương pháp Lyapunov thứ nhất đối với phương trình động lực trên thang thời gian với cách tiếp cận phù hợp. Nội dung của chương dựa trên bài báo số 1 trong danh sách các công trình của tác giả. Ta đã biết rằng, không thể định nghĩa hàm logarit trên thang thời gian, xem Bohner (2005), vì vậy ta sử dụng dao động của tỉ số $\frac{|f(t)|}{e_\alpha(t,t_0)}$ khi $t \to \infty$ theo một tham số α cụ thể để định nghĩa số mũ Lyapunov của hàm f trên thang thời gian.

Cho $\mathbb{T}$ là thang thời gian không bị chặn trên, $\sup \mathbb{T} = \infty$, và hàm hạt $\mu(t)$ bị chặn, tức là, tồn tại một số $\mu^* = \sup_{t\in\mathbb{T}} \mu(t) < \infty$. Điều này tương đương với việc tồn tại các số dương m_1, m_2 sao cho với mỗi phần tử $t \in \mathbb{T}$, tồn tại một đại lượng phụ thuộc t, $c = c(t) \in \mathbb{T}$, thỏa mãn điều kiện $m_1 \le c - t < m_2$, xem Pötzsche (2004). Hơn nữa, theo định nghĩa, nếu $\alpha \in \mathbb{R} \cap \mathcal{R}^+$ thì $\alpha > -\frac{1}{\mu(t)}$ với mọi $t \in \mathbb{T}$. Kết quả là, ta có $\inf(\mathbb{R} \cap \mathcal{R}^+) = -\frac{1}{\mu^*}$. Ta quy ước $\frac{1}{0} = \infty$.

2.1 Số mũ Lyapunov: Định nghĩa và Tính chất

2.1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 2.1. *Số mũ Lyapunov* của hàm f xác định trên thang thời gian $\mathbb{T}_{t_0}$, lấy giá trị trong $\mathbb{K}$, là một số thực $a \in \mathcal{R}^+$ sao cho với mọi $\varepsilon > 0$ tùy ý, ta có

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{e_{a\oplus\varepsilon}(t,t_0)} = 0, \tag{2.1}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{e_{a\ominus\varepsilon}(t,t_0)} = \infty. \tag{2.2}$$

Số mũ Lyapunov của hàm f được ký hiệu là $\kappa_L[f]$.

Nếu (2.1) đúng với mọi $a \in \mathbb{R} \cap \mathcal{R}^+$ thì ta quy ước rằng f có *số mũ cực biên trái* $\kappa_L[f] = -\frac{1}{\mu^*} = \inf(\mathbb{R} \cap \mathcal{R}^+)$. Nếu (2.2) đúng với mọi $a \in \mathbb{R} \cap \mathcal{R}^+$, thì ta nói *f có số mũ cực biên phải* $\kappa_L[f] = +\infty$. Nếu $\kappa_L[f]$ không là số mũ cực biên trái và không là số mũ cực biên phải, thì ta gọi $\kappa_L[f]$ là số mũ Lyapunov thông thường (normal Lyapunov exponent).

Bổ đề 2.2. *Cho $f : \mathbb{T}_{t_0} \to \mathbb{K}$ là một hàm. Khi đó, f có số mũ Lyapunov thông thường nếu và chỉ nếu $\lambda, \gamma \in \mathcal{R}^+$ với $\lambda \neq \inf(\mathbb{R} \cap \mathcal{R}^+)$ sao cho*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{e_\gamma(t,t_0)} = 0; \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{e_\lambda(t,t_0)} = \infty. \tag{2.3}$$

Nhận xét 2.3. i) Trường hợp $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, Định nghĩa 2.1.1 là định nghĩa kinh điển của số mũ Lyapunov $\kappa_L[f] = \chi[f] = \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln|f(t)|}{t}$.

ii) Trường hợp $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, dễ thấy $\ln(1+\kappa_L[f]) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln|f(n)|}{n} = \chi[f]$. Hơn nữa, số mũ cực biên trái là $\inf(\mathbb{R}\cap\mathcal{R}^+) = -1$.

2.1.2 Tính chất

Ta luôn giả sử $f, g : \mathbb{T}_{t_0} \to \mathbb{K}$ là các hàm.

Bổ đề 2.4. *Các khẳng định sau đây là đúng:*

i) $\kappa_L[|f|] = \kappa_L[f]$;

ii) $\kappa_L[0] = \inf(\mathbb{R}\cap\mathcal{R}^+)$;

iii) $\kappa_L[cf] = \kappa_L[f]$, *trong đó $c \neq 0$ là hằng số;*

iv) *Nếu $a \in \mathbb{R}\cap\mathcal{R}^+$ và (2.1) thỏa mãn với bất kỳ $\varepsilon > 0$ thì $\kappa_L[f] \le a$. Nếu $a \in \mathbb{R}\cap\mathcal{R}^+$ và (2.2) đúng với bất kỳ $\varepsilon > 0$ thì $\kappa_L[f] \ge a$;*

v) *Nếu $|f(t)| \le |g(t)|$ với mọi t đủ lớn thì $\kappa_L[f] \le \kappa_L[g]$;*

vi) *Nếu f bị chặn trên (hay dưới) thì $\kappa_L[f] \le 0$ (hay $\kappa_L[f] \ge 0$). Kết quả là, nếu f bị chặn thì $\kappa_L[f] = 0$.*

Bổ đề 2.5. *Với bất kỳ $\lambda \in \mathcal{R}\cap\mathbb{C}$, các khẳng định sau là đúng:*

i) $\kappa_L[e_\lambda(\cdot,t_0)] = \kappa_L[e_{\widehat{\Re}\lambda}(\cdot,t_0)]$;

ii) $\kappa_L[e_\lambda(\cdot,t_0)]$ *không phụ thuộc t_0;*

iii) *Nếu $q(\cdot) \in \mathcal{R}^+$ thì* $\kappa_L[e_q(\cdot,t_0)] \le \limsup_{t\to\infty} q(t)$;

iv) $\kappa_L[e_\lambda(\cdot,t_0)] \le \limsup_{t\to\infty} \widehat{\Re}\lambda(t) \le |\lambda|$;

v) $\Re\lambda \le \liminf_{t\to\infty} \widehat{\Re}\lambda(t) \le \kappa_L[e_\lambda(\cdot,t_0)]$.

Bổ đề 2.7. $\kappa_L[f+g] \le \max\{\kappa_L[f], \kappa_L[g]\}$ *và nếu $\kappa_L[f] \neq \kappa_L[g]$ thì đẳng thức xảy ra.*

Bổ đề 2.9. $\kappa_L[fg] \le \kappa_L[e_{\kappa_L[f]\oplus\kappa_L[g]}(\cdot,t_0)]$.

Định nghĩa 2.10. Hàm f gọi là có số mũ Lyapunov chính xác α nếu

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{e_{\alpha\oplus\varepsilon}(t,t_0)} = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{e_{\alpha\ominus\varepsilon}(t,t_0)} = \infty, \text{ for any } \varepsilon > 0.$$

Bổ đề 2.11. *Nếu ít nhất một trong hai hàm f và g có số mũ Lyapunov chính xác, thì*

$$\kappa_L[fg] = \kappa_L[e_{\kappa_L[f]\oplus\kappa_L[g]}(\cdot, t_0)].$$

Nhận xét 2.12. Nếu cả f và g đều có số mũ Lyapunov chính xác, thì thì hàm fg cũng vậy, và $\kappa_L[fg] = \kappa_L[e_{\kappa_L[f]\oplus\kappa_L[g]}(\cdot, t_0)]$. Nói chung, nếu tất cả các hàm $f_1, f_2, ..., f_m$ đều có số mũ Lyapunov chính xác, thì hàm $f_1f_2\cdots f_m$ cũng có, và $\kappa_L[f_1f_2\cdots f_m] = \kappa_L[e_{\kappa_L[f_1]\oplus\kappa_L[f_2]\oplus\cdots\oplus\kappa_L[f_m]}(\cdot, t_0)]$.

Nhận xét 2.13. i) Trường hợp $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, $\kappa_L[fg] \le \kappa_L[e_{\kappa_L[f]\oplus\kappa_L[g]}(\cdot, t_0)] = \kappa_L[f] + \kappa_L[g]$.

ii) Trường hợp $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, $\kappa_L[fg] \le \kappa_L[e_{\kappa_L[f]\oplus\kappa_L[g]}(\cdot, t_0)] = \kappa_L[f] + \kappa_L[g] + \kappa_L[f]\kappa_L[g]$ (hay tương đương, $\chi[fg] \le \chi[f] + \chi[g]$).

2.2 Số mũ Lyapunov của Nghiệm của Phương trình Tuyến tính

2.2.1 Phổ Lyapunov của Phương trình Tuyến tính

Xét phương trình tuyến tính

$$x^\Delta = A(t)x, \tag{2.4}$$

trong đó $A(t)$ là ma trận vuông cấp n hồi quy và rd-liên tục. Biết rằng phương trình (2.4) với điều kiện đầu $x(t_0) = x_0$ có nghiệm duy nhất $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ trên $\mathbb{T}$.

Định lý 2.15. *Giả sử $\mathcal{M} = \limsup_{t\to\infty} \|A(t)\|$. Nếu $x(\cdot)$ là nghiệm không tầm thường của* (2.4)*, thì $\kappa_L[x(\cdot)] \le \mathcal{M}$. Hơn nữa, nếu $\limsup_{t\to\infty} \mu(t) < \frac{1}{\mathcal{M}}$, thì ước lượng $-\mathcal{M} \le \kappa_L[x(\cdot)] \le \mathcal{M}$ xảy ra.*

Trường hợp $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, ta nhận được bất đẳng thức $-\mathcal{M} \le \kappa_L[x(\cdot)] = \chi[x(\cdot)] \le \mathcal{M}$.

Định nghĩa 2.17. Tập tất cả các số mũ Lyapunov hữu hạn của các nghiệm của phương trình (2.4) được gọi là *phổ Lyapunov* của phương trình (2.4).

Định lý 2.18. *Phổ Lyapunov của* (2.4) *có nhiều nhất n giá trị phân biệt.*

2.2.2 Bất đẳng thức Lyapunov

Cho $\{x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\}$ là một hệ các nghiệm cơ bản không suy biến của (2.4), tức là, hệ các nghiệm nay có tính chất: Số mũ Lyapunov của một vài nghiệm được kết hợp từ những nghiệm tùy ý của phương trình thì bằng số mũ Lyapunov của một nghiệm có mặt trong tổ hợp. Nói cách khác, nếu

$$x(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t) + \cdots + k_nx_n(t),$$

thì $\kappa_L[x(\cdot)] = \kappa_L[x_i(\cdot)]$ với một vài $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Ký hiệu $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n | \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n\}$ là tập phổ Lyapunov của (2.4). Hơn nữa, ta giả sử rằng $\alpha_i \in \mathbb{R} \cap \mathcal{R}^+$, với mọi $i = 1, 2, ..., n$.

Định lý 2.19 (Bất đẳng thức Lyapunov)**.** $\kappa_L[e_\alpha(\cdot, t_0)] \leq \kappa_L[e_{\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n}(\cdot, t_0)]$.

Trường hợp $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, ta có $\kappa_L[e_\alpha(\cdot, t_0)] = \limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t (\text{trace}\, A(s))ds$, và $\kappa_L\left[e_{\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n}(\cdot, t_0)\right] = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Vì vậy, ta nhận được Bất đẳng thức Lyapunov của phương trình vi phân thường trong bài báo Malkin (1958).

Xét phương trình (2.4), trong đó $A(t) \equiv A$ là ma trận hằng, hồi quy và vuông cấp n. Giả sử $\lambda_i, i = 1, 2, ..., n$ là các giá trị riêng của A. Ta có thể chứng minh rằng

$$\alpha(t) = \lambda_1 \oplus \lambda_2 ... \oplus \lambda_n. \tag{2.5}$$

Định lý 2.22. *Với bất kỳ giá trị riêng λ_i của ma trận A, hàm mũ $e_{\lambda_i}(\cdot, t_0)$ có số mũ Lyapunov chính xác, khi đó $\kappa_L[e_\alpha(\cdot, t_0)] = \kappa_L[e_{\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n}(\cdot, t_0)]$, trong đó $\alpha_i = \kappa_L[e_{\lambda_i}(\cdot, t_0)]$, $i = 1, 2, ..., n$.*

2.3 Phổ Lyapunov và Tính Ổn định của Phương trình Tuyến tính

Xét phương trình

$$x^\Delta = A(t)x, \tag{2.6}$$

trong đó $A(t)$ là ma trận vuông cấp n, hồi quy và rd-liên tục, thỏa mãn $\|A(t)\| \leq \mathcal{M}$, với mọi $t \in \mathbb{T}_\tau$.

Định lý 2.24. *Phương trình* (2.6) *với những điều kiện được phát biểu trên $A(\cdot)$. Khi đó,*

i) *Phương trình* (2.6) *là ổn định tiệm cận mũ khi và chỉ khi tồn tại một hằng số $\alpha > 0$ thỏa mãn $-\alpha \in \mathcal{R}^+$ sao cho với mỗi $t_0 \in \mathbb{T}_\tau$, có một số $N = N(t_0) > 0$ sao cho*

$$\|\Phi_A(t, t_0)\| \leq N e_{-\alpha}(t, t_0) \ \textit{với mọi}\ t \geq t_0, t \in \mathbb{T}_\tau.$$

ii) *Phương trình* (2.6) *là ổn định tiệm cận mũ đều khi và chỉ khi tồn tại một hằng số $\alpha > 0,\ N > 0$ thỏa mãn $-\alpha \in \mathcal{R}^+$ sao cho*

$$\|\Phi_A(t, t_0)\| \leq N e_{-\alpha}(t, t_0) \ \textit{với mọi}\ t \geq t_0, t, t_0 \in \mathbb{T}_\tau.$$

Định lý 2.25 (Điều kiện phổ của tính ổn định mũ)**.** *Ký hiệu $-\alpha := \max S$, trong đó S là tập phổ Lyapunov của phương trình* (2.6)*. Khi đó, phương trình* (2.6) *ổn định tiệm cận mũ khi và chỉ khi $\alpha > 0$.*

Bây giờ ta xét phương trình

$$x^\Delta = Ax. \tag{2.7}$$

trong đó A là ma trận hằng, hồi quy. Ký hiệu tập các giá trị riêng của A là $\sigma(A)$. Từ tính hồi quy của ma trận A, kéo theo $\sigma(A) \subset \mathcal{R}$.

Định lý 2.26. *Nếu phương trình* (2.7) *là ổn định tiệm cận mũ thì* $\kappa_L[e_\lambda(\cdot, t_0)] < 0$, *với mọi* $\lambda \in \sigma(A)$. *Hơn nữa, giả sử rằng mỗi giá trị riêng* $\lambda \in \sigma(A)$ *là hồi quy đều. Khi đó, giả thiết* $\kappa_L[e_\lambda(\cdot, t_0)] < 0$ *chỉ ra phương trình* (2.7) *là ổn định tiệm cận mũ.*

Hệ quả 2.27. *Nếu với bất kỳ giá trị riêng* $\lambda \in \sigma(A)$ *ta có* $\Im\lambda \neq 0$ *và* $\kappa_L[e_\lambda(\cdot, t_0)] < 0$, *khi đó, phương trình* (2.7) *là ổn định tiệm cận mũ.*

Định lý 2.28. *Nếu* $\limsup_{t\to\infty} \widehat{\Re}\lambda(t) < 0$ *với mọi* $\lambda \in \sigma(A)$, *thì phương trình* (2.7) *là ổn định tiệm cận mũ.*

Hệ quả 2.29. *Nếu* $\sigma(A) \subset (-\infty, 0) \cap \mathcal{R}^+$ *thì phương trình* (2.7) *ổn định tiệm cận mũ.*

Ví dụ 2.30. Xét phương trình $x^\Delta(t) = Ax(t)$ trên thang thời gian $\mathbb{T} = \cup_{k=0}^{\infty}[2k, 2k+1]$, trong đó,

$$A = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} -24 & 0 & 48 \\ 1 & -24 & 24 \\ 33 & -72 & -48 \end{pmatrix}.$$

Rõ ràng

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \in \cup_{k=0}^{\infty}[2k, 2k+1), \\ 1 & \text{if } t \in \cup_{k=0}^{\infty}\{2k+1\}, \end{cases}$$

có số mũ cực biên trái là -1. Hơn nữa, $\sigma(A) = \left\{-2, -1 + \frac{1}{2}i, -1 - \frac{1}{2}i\right\}$ và mọi $\lambda \in \sigma(A)$ là hồi quy đều.

i) Trường hợp $\lambda_1 = -2, t \in [2k, 2k+1]$, ta nhận được $\kappa_L[e_{-2}(\cdot, 0)] \leq \kappa_L[e_{-\frac{1}{2}}(\cdot, 0)] = -\frac{1}{2} < 0$.

ii) Trường hợp $\lambda_2 = -1 + \frac{i}{2}$, ta nhận được $\kappa_L[e_{\lambda_2}(\cdot, 0)] \leq \limsup_{t\to\infty} \widehat{\Re}\lambda_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 < 0$.

iii) Trường hợp $\lambda_3 = -1 - \frac{i}{2}$, ta nhận được $\kappa_L[e_{\lambda_3}(\cdot, 0)] \leq \limsup_{t\to\infty} \widehat{\Re}\lambda_3(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 < 0$.

Do đó, theo Định lý 2.23, phương trình là ổn định tiệm cận mũ.

Chú ý rằng, phương trình $x^\Delta(t) = -2x(t)$, $t \in \mathbb{T} = \cup_{k=0}^{\infty}[2k, 2k+1]$ là ổn định tiệm cận mũ, trong khi đó $\limsup_{t\to\infty} \widehat{\Re}(-2)(t) = 0$. Kết quả này chứng tỏ, điều ngược lại của Định lý 2.23 nói chung là không đúng.

CHƯƠNG 3

SỐ MŨ BOHL CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC ẨN

Xét phương trình động lực ẩn tuyến tính có dạng

$$E_\sigma(t)x^\Delta(t) = A(t)x(t), \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

trong đó $E_\sigma(\cdot)$ được giả thiết là suy biến $\ker A(\cdot)$ là liên tục tuyệt đối. Nếu phương trình này chịu ngoại lực $f(t)$ tác động thì nó trở thành,

$$E_\sigma(t)x^\Delta(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad t \geq 0. \tag{3.2}$$

Ta sẽ định nghĩa số mũ Bohl của phương trình (3.1) có chỉ số-1 và nghiên cứu mối liên hệ giữa tính ổn định mũ và số mũ Bohl cũng như tính vững của số mũ Bohl khi phương trình chịu nhiễu tác động lên các hệ số. Nội dung của Chương 3 dựa trên bài báo số 2 và số 3 trong danh sách các công trình của tác giả.

3.1 Phương trình Động lực Ẩn với chỉ số-1

Xét phương trình động lực ẩn tuyến tính, thời gian biến thiên (3.2) với mọi $t \geq a > 0$, trong đó A, E_σ thuộc $L^{\mathrm{loc}}_\infty(\mathbb{T}_a; \mathbb{K}^{n\times n})$. Giả thiết rằng $\operatorname{rank} E = r$, $1 \leq r < n$, với mọi $t \in \mathbb{T}_a$ và $\ker E$ là trơn theo nghĩa tồn tại một phép chiếu Q lên $\ker E$ sao cho Q là liên tục khả vi với mọi $t \in (a, \infty)$, $Q^2 = Q$ và $Q^\Delta \in L^{\mathrm{loc}}_\infty(\mathbb{T}_a; \mathbb{K}^{n\times n})$. Đặt $P = I - Q$, P là một phép chiếu dọc theo $\ker E$, $EP = E$. Khi đó, phương trình (3.2) được viết lại

$$E_\sigma(t)(Px)^\Delta(t) = \bar{A}(t)x(t) + f(t),\ t \geq a, \bar{A} := A + E_\sigma P^\Delta \in L^{\mathrm{loc}}_\infty(\mathbb{T}_a; \mathbb{K}^{n\times n}. \tag{3.3}$$

Cho H là một hàm liên tục xác định trong $\mathbb{T}$, lấy giá trị trong nhóm $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$ sao cho $H|_{\ker E_\sigma}$ là một tự đồng cấu giữa $\ker E_\sigma$ và $\ker E$. Ta định nghĩa ma trận $G := E_\sigma - \bar{A}HQ_\sigma$, và tập hợp $S := \{x : Ax \in \operatorname{im} E_\sigma\}$.

Bổ đề 3.2 (Du et.al. (2007))**.** *Giả sử ma trận G là không suy biến*

i) $P_\sigma = G^{-1}E_\sigma$; ii) $G^{-1}\bar{A}HQ_\sigma = -Q_\sigma$;

iii) $\widetilde{Q} := -HQ_\sigma G^{-1}\bar{A}$ *là phép chiếu lên* $\ker E$ *dọc theo* S, $\widetilde{Q}$ *là một phép chiếu chuẩn tắc;*

iv) *Nếu* $\widehat{Q}$ *là một phép chiếu lên* $\ker E$ *và* $\widehat{P} = I - \widehat{Q}$, *thì* $P_\sigma G^{-1}\bar{A} = P_\sigma G^{-1}\bar{A}\widehat{P}$, $Q_\sigma G^{-1}\bar{A} = Q_\sigma G^{-1}\bar{A}\widehat{P} - H^{-1}\widehat{Q}$;

v) *Các ma trận $P_\sigma G^{-1}$, $HQ_\sigma G^{-1}$ không phụ thuộc H và Q.*

Định nghĩa 3.4. Phương trình động lực ẩn (3.2) được gọi có chỉ số-1 dễ điều khiển (index-1 tractable) trên $\mathbb{T}_a$ nếu $G(t)$ là khả nghịch với hầu hết $t \in \mathbb{T}_a$ và $G^{-1} \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}_a; \mathbb{K}^{n\times n})$.

Cho $J \subset \mathbb{T}$ là một khoảng. Ta ký hiệu tập

$$\mathrm{C}^1(J, \mathbb{K}^n) := \left\{ x(\cdot) \in \mathrm{C}_{\mathrm{rd}}(J, \mathbb{K}^n) : P(t)x(t) \text{ là khả vi delta, với hầu hết } t \in J \right\}.$$

Định nghĩa 3.6. Hàm x gọi là một nghiệm của phương trình (3.2) (có index-1) trên khoảng J nếu $x \in \mathrm{C}^1(J, \mathbb{K}^n)$ và thỏa mãn phương trình (3.2) với hầu hết $t \in J$.

Nhân cả hai vế của (3.3) với $P_\sigma G^{-1}$ và $Q_\sigma G^{-1}$ và sử dụng các phép đổi biến số $u := Px$ và $v := Qx$, phương trình (3.3) được phân rã thành

$$u^\Delta = (P^\Delta + P_\sigma G^{-1}\bar{A})u + P_\sigma G^{-1} f, \tag{3.4}$$

$$v = HQ_\sigma G^{-1}\bar{A}u + HQ_\sigma G^{-1} f, \tag{3.5}$$

(3.4) được gọi là thành phần vi phân, (3.5) là thành phần đại số. Ta tìm nghiệm u từ phương trình (3.4), tiếp theo v từ (3.5), và cuối cùng $x = u + v$. Do đó ta có nghiệm của (3.2) với điều kiện ban đầu là

$$x(t) = \Phi(t, t_0)P(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \sigma(s))P_\sigma(s)G^{-1}(s)f(s)\Delta s + H(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)f(t).$$

Giả thiết 3.1. *Tồn tại một phép chiếu khả vi bị chặn Q lên $\ker E$. Đặt $P = I - Q$ và $K_0 = \sup_{t\geq a} \|P(t)\|$.*

3.2 Tính Ổn định của Phương trình Động lực Ẩn chịu Nhiễu nhỏ

Cho $a \in \mathbb{T}$ là một điểm cố định. Xét trường hợp ngoại lực $f(t) := F(t, x(t))$, với F là một hàm cụ thể xác định trên $\mathbb{T}_a \times \mathbb{R}^n$. Khi đó, phương trình (3.2) được viết lại

$$E_\sigma(t)x^\Delta(t) = A(t)x(t) + F(t, x(t)),\ t \geq a. \tag{3.6}$$

Giả thiết $F(t, 0) = 0$ với mọi $t \in \mathbb{T}_a$, thì phương trình (3.6) có nghiệm tầm thường $x(t) \equiv 0$. Sử dụng kỹ thuật ở Mục 3.1 và các phép đổi biến số $u = Px$ và $v = Qx$, (3.6) được phân rã thành hai thành phần vi phân 3.7, và đại số 3.8

$$u^\Delta = (P^\Delta + P_\sigma G^{-1}\bar{A})u + P_\sigma G^{-1}F(t, u + v), \tag{3.7}$$

$$v = HQ_\sigma G^{-1}\bar{A}u + HQ_\sigma G^{-1}F(t, u + v). \tag{3.8}$$

Giả thiết rằng $HQ_\sigma G^{-1}F(t, \cdot)$ là liên tục Lipschitz với hệ số Lipschitz $\gamma_t < 1$, nghĩa là, $\|HQ_\sigma G^{-1}F(t, y) - HQ_\sigma G^{-1}F(t, z)\| \leq \gamma_t \|y - z\|$, $\forall t \geq a$. Bởi vì $HQ_\sigma G^{-1}$ không phụ thuộc vào sự lựa chọn của H và Q, nên tính chất Lipschitz của $HQ_\sigma G^{-1}F(t, \cdot)$

cũng vậy. Cố định $u \in \mathbb{R}^n$và chọn $t \in \mathbb{T}_a$, ta xét ánh xạ $\Gamma_t : \operatorname{im} Q(t) \to \operatorname{im} Q(t)$ được xác định bởi $\Gamma_t(v) := H(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)\bar{A}(t)u + H(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)F(t, u+v)$. Dễ thấy $\|\Gamma_t(v) - \Gamma_t(v')\| \le \gamma_t \|v - v'\|$ với bất kỳ $v, v' \in \operatorname{im} Q(t)$. Vì $\gamma_t < 1$, Γ_t là một ánh xạ co, nên tồn tại một ánh xạ (theo Định lý Điểm bất động) $g_t : \operatorname{im} P(t) \to \operatorname{im} Q(t)$ thỏa mãn

$$g_t(u) = H(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)\big(\bar{A}(t)u + F(t, u + g_t(u))\big). \tag{3.9}$$

Ký hiệu $\beta_t := \|H(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)\bar{A}(t)\|$, ta có $\|g_t(u) - g_t(u')\| \le \frac{\gamma_t + \beta_t}{1-\gamma_t}\|u - u'\|$. Vì vậy g_t là liên tục Lipschitz với hệ số Lipschitz $L_t = \frac{\gamma_t+\beta_t}{1-\gamma_t} > 1$. Thay thế $v = g_t(u)$ vào (3.7), ta thu được

$$u^\Delta = (P^\Delta + P_\sigma G^{-1}\bar{A})u + P_\sigma G^{-1} F\big(t, u + g_t(u)\big). \tag{3.10}$$

Ta có thể giải và nhận được nghiệm $u(t)$ từ phương trình (3.10). Do đó, nghiệm duy nhất của (3.6) là

$$x(t) = u(t) + g_t(u(t)),\ t \in \mathbb{T}_a. \tag{3.11}$$

Định lý 3.10. *Giả thiết phương trình* (3.2) *là có* chỉ số-1, *bị chặn đều và thỏa mãn*:

i) $L = \sup_{t\in\mathbb{T}_a} L_t < \infty$, *và*

ii) *hàm $P_\sigma(t)G^{-1}(t)F(t,x)$ là liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz k_t, sao cho một trong hai điều kiên sau đây được thỏa mãn*

   a) $N = \displaystyle\int_a^\infty \frac{k_t}{1-\alpha\mu(t)}\Delta t < \infty.$

   b) $\limsup_{t\to\infty} k_t(1+L_t) = \delta < \frac{\alpha}{LM}$, *với α, M dương và $-\alpha \in \mathcal{R}^+$.*

Khi đó, tồn tại hai hằng số $K > 0$, $-\alpha_1$ hồi quy dương sao cho

$$\|x(t)\| \le K e_{-\alpha_1}(t,s)\|P(s)x(s)\|,$$

với mọi $t \ge s \ge a$, trong đó $x(\cdot)$ là một nghiệm của (3.6). *Nghĩa là phương trình bị nhiễu* (3.6) *bảo toàn tính ổn định mũ.*

Tiếp theo, ta chứng minh Định lý Bohl-Perron đối với phương trình (3.2) và tính ổn định mũ của phương trình động lực ẩn (3.1).

Trước hết ta chú ý rằng, khi giải phương trình (3.2), hàm f được tách thành hai thành phần $P_\sigma G^{-1}f$ và $HQ_\sigma G^{-1}f$. Do đó, với bất kỳ $t_0 \in \mathbb{T}_a$ ta xét hàm f như một phần tử của tập

$$L(t_0) = \left\{ \begin{array}{r} f \in C\left([t_0,\infty], \mathbb{R}^n\right) : \sup_{t\ge t_0} \|H(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)f(t)\| < \infty \\ \text{và } \sup_{t\ge t_0}\|P_\sigma(t)G^{-1}(t)f(t)\| < \infty \end{array} \right\}.$$

Dễ thấy $L(t_0)$ là không gian Banach được trang bị chuẩn

$$\|f\| = \sup_{t\geq t_0} \left(\|P_\sigma(t)G^{-1}(t)f(t)\| + \|H(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)f(t)\|\right).$$

Ký hiệu $x(t,s,f)$ là nghiệm, liên kết với hàm f, của phương trình (3.2) với điều kiện ban đầu $P(s)(x(s,s)-x_0)=0$. Ta viết $x(t,s)$ hay $x(t)$ thay cho $x(t,s,f)$ nếu không xảy ra nhầm lẫn.

Bổ đề 3.13. *Nếu với mỗi hàm $f(\cdot)\in L(t_0)$, nghiệm $x(\cdot,t_0)$ của bài toán Cauchy* (3.2) *với điều kiện ban đầu $P(t_0)(x(t_0)-x_0)=0$ là bị chặn, thì với mọi $t_1\geq t_0$, tồn tại một hằng số $k>0$, độc lập với t_1, sao cho*

$$\sup_{t\geq t_1} \|x(t,t_1)\| \leq k\|f\|. \tag{3.12}$$

Định lý 3.14. *Tất cả các nghiệm của bài toán Cauchy* (3.2) *với điều kiện ban đầu $P(t_0)(x(t_0)-x_0)=0$, liên kết với hàm tùy ý f trong $L(t_0)$, là bị chặn nếu và chỉ nếu* (3.1) *ổn định mũ.*

Nhận xét 3.15. Những kết quả trên đã mở rộng định lý ổn định kiểu Bohl-Perron với đầu vào/ra bị chặn đối với phương trình vi phân hay sai phân, và phương trình vi phân đại số hay phương trình sai phân ẩn, khi $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ hay $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$.

3.3 Số mũ Bohl của Phương trình Động lực Ẩn

3.3.1 Định nghĩa và Tính chất

Định nghĩa 3.17. Giả sử phương trình động lực ẩn (3.1) có chỉ số-1, $\Phi(t,s)$ là toán tử Cauchy tương ứng. Số mũ Bohl (trên) của (3.1) được định nghĩa bởi

$$\kappa_{\mathcal{B}}(E,A) = \inf\{\alpha\in\mathbb{R}; \exists M_\alpha>0 : \|\Phi(t,s)\| \leq M_\alpha e_\alpha(t,s), \forall t\geq s\geq t_0\}.$$

Khi $\kappa_{\mathcal{B}}(E,A) = -\frac{1}{\mu^*}$ hay $\kappa_{\mathcal{B}}(E,A)=+\infty$ ta gọi số mũ Bohl của phương trình động lực ẩn (3.1) là cực biên. Trường hợp $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ (hay $\mathbb{T}=h\mathbb{Z}$), ta nhận được định nghĩa kinh điển của số mũ Bohl và các số mũ cực biên có thể là $\pm\infty$ (hay $-\frac{1}{h}$, hay $+\infty$). Hơn nữa, ta có mệnh đề dưới đây:

Mệnh đề 1.18. *Nếu $\alpha=\kappa_{\mathcal{B}}(E,A)$ không là cực biên, thì với bất kỳ $\varepsilon>0$ ta có*

i) $\displaystyle\lim_{\substack{t-s\to\infty\\ s\to\infty}} \frac{\|\Phi(t,s)\|}{e_{\alpha\oplus\varepsilon}(t,s)} = 0$ ii) $\displaystyle\limsup_{\substack{t-s\to\infty\\ s\to\infty}} \frac{\|\Phi(t,s)\|}{e_{\alpha\ominus\varepsilon}(t,s)} = \infty.$

Giả thiết 3.2. *Các số hạng $P_\sigma G^{-1}$ và $HQ_\sigma G^{-1}$ lần lượt bị chặn bởi các hằng số dương K_3 và K_4 trên $\mathbb{T}_{t_0}$.*

Định lý 3.23. *Các khẳng định sau là tương đương*:

i) *Phuong trình* (3.1) *là ổn định mũ;*   ii) *Số mũ Bohl $\kappa_{\mathcal{B}}(E,A)$ là số âm;*

iii) *Số mũ Bohl $\kappa_{\mathcal{B}}(E, A)$ là hữu hạn với bất kỳ $p > 0$, tồn tại một hằng số K_p sao cho*

$$\int_s^{\infty} \|\Phi(t, s)\|^p \Delta t \leq K_p, \ \forall t \geq s \geq t_0;$$

iv) *Tất cả nghiệm của bài toán Cauchy* (3.2) *với điều kiện ban đầu $P(t_0)(x(t_0) - x_0) = 0$, liên kết với f trong $L(t_0)$ là bị chặn.*

3.3.2 Tính Vững của Số mũ Bohl

Giả sử rằng $\Sigma(\cdot) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là một hàm ma trận liên tục. Ta xét phương trình bị nhiễu

$$E_\sigma(t) x^\Delta(t) = (A(t) + \Sigma(t)) x(t), \ \forall t \geq t_0. \tag{3.13}$$

Ta có thể kiểm chứng trực tiếp, phương trình (3.13) tương đương với phương trình

$$E_\sigma(t)(Px)^\Delta(t) = (\bar{A}(t) + \Sigma(t)) x(t), \ \forall t \geq t_0. \tag{3.14}$$

Phương trình (3.14) là trường hợp đặc biệt của (3.6) với $F(t, x) = \Sigma(t)x$. Giả sử nhiễu Σ là đủ nhỏ, sao cho

$$\sup_{t \geq t_0} \|\Sigma(t)\| < \left(\sup_{t \geq t_0} \|HQ_\sigma G^{-1}(t)\| \right)^{-1}. \tag{3.15}$$

Theo (3.15) và quan hệ $(I - \Sigma HQ_\sigma G^{-1})^{-1} G_\Sigma = G$, trong đó $G_\Sigma := E_\sigma - (\bar{A} + \Sigma)HQ_\sigma$, rõ ràng G_Σ là khả nghịch khi và chỉ khi G cũng khả nghịch, nghĩa là, phương trình (3.2) có chỉ số-1 khi và chỉ khi phương trình (3.14) cũng có chỉ số-1.

Ta có thể giải phương trình (3.14). Bởi vì $HQ_\sigma G^{-1}\Sigma(t)x$ liên tục Lipschitz với hệ số Lipschitz $\gamma_t = \|HQ_\sigma G^{-1}\Sigma(t)\| < 1$, nên hàm g_t xác định bởi (3.9) trở thành

$$g_t(u) = (I - HQ_\sigma G^{-1}\Sigma(t))^{-1} HP_\sigma G^{-1}(\bar{A} + \Sigma)(t)u.$$

Khi đó nghiệm của (3.14) là $x(t, s) = u(t, s) + g_t(u(t, s))$, trong đó $u(t, s)$ là nghiệm của bài toán giá trị ban đầu

$$\begin{cases} u^\Delta = (P^\Delta + P_\sigma G^{-1}\bar{A})u + P_\sigma G^{-1}\Sigma(u + g_t(u)), \\ u(s, s) = P(s)x_0. \end{cases}$$

Định lý 3.26. *Giả sử Giả thiết 3.2 đúng. Khi đó, với bất kỳ $\varepsilon > 0$ tồn tại số $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho, nếu $\limsup_{t \to \infty} \|\Sigma(t)\| \leq \delta$ thì $\kappa_{\mathcal{B}}(E, A + \Sigma) \leq \kappa_{\mathcal{B}}(E, A) + \varepsilon$.*

Cuối cùng ta xét phương trình $E_\sigma(t)x^\Delta(t) = A(t)x(t), \ \forall t \geq t_0$ chịu nhiễu hai vế có dạng

$$\big(E_\sigma(t) + F_\sigma(t)\big) x^\Delta(t) = \big(A(t) + \Sigma(t)\big) x(t), \ \forall t \geq t_0, \tag{3.16}$$

trong đó $F_\sigma(t)$ và $\Sigma(t)$ là nhiễu và $\ker(E_\sigma + F\sigma) = \ker E_\sigma$. Ta có thể chứng minh phương trình (3.16) tương đương với phương trình

$$E_\sigma(t) x^\Delta(t) = \big(A(t) + \bar{\Sigma}(t)\big) x(t), \ \forall t \geq t_0.$$

Định lý 3.27. *Giả sử Giả thiết 3.2 đúng. Khi đó, với bất kỳ $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho bất đẳng thức $\limsup_{t \to \infty} \|\bar{\Sigma}(t)\| \leq \delta$ kéo theo $\kappa_{\mathcal{B}}(E + F, A + \bar{\Sigma}) \leq \kappa_{\mathcal{B}}(E, A) + \varepsilon$.*

CHƯƠNG 4

BÁN KÍNH ỔN ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LỰC ẨN

Ta sẽ xét tính ổn định vững của phương trình động lực ẩn tuyến tính thời gian biến thiên trên thang thời gian

$$E_\sigma(t)x^\Delta(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad t \geq t_0, \tag{4.1}$$

trong đó $E_\sigma(\cdot) \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}; \mathbb{K}^{n\times n})$, được giả sử là $t \in \mathbb{T}$, $t \geq t_0$. Ma trận $A(\cdot) \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}; \mathbb{K}^{n\times n})$, và $\ker A(\cdot)$ tuyệt đối liên tục. Phương trình thuần nhất tương ứng

$$E_\sigma(t)x^\Delta(t) = A(t)x(t), \quad t \geq t_0, \tag{4.2}$$

Chương 4 được viết dựa trên nội dung của bài báo số 3 trong danh sách các công trình của tác giả

Cho X, Y là các không gian véc tơ hữu hạn chiều. Với mỗi $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ và $s < t$, $s, t \in \mathbb{T}_a$, ký hiệu $L_p([s,t]; X)$ là không gian các hàm đo được trên khoảng đóng $[s,t]$ với chuẩn $\|f\|_p = \|f\|_{L_p([s,t];X)} := \left(\int_s^t \|f(\tau)\|^p \Delta\tau\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, và $L_\infty([s,t]; X)$ là không gian các hàm đo được và bị chặn cốt yếu (essentially bounded) f với chuẩn $\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty([s,t];X)} := \Delta\text{-}\operatorname{esssup}_{\tau\in[s,t]} \|f(\tau)\|$. Ta cũng xét các không gian $L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}_a; X)$, $L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}_a; X)$, chứa tất cả các hàm f hạn chế trên $[s,t]$, $f|_{[s,t]}$, tương ứng thuộc $L_p([s,t]; X)$, $L_\infty([s,t]; X)$, với $s, t \in \mathbb{T}_a$, $a \leq s < t < \infty$.

Với mỗi $\tau \geq a, \tau \in \mathbb{T}$, toán tử chặt (operator of truncation) π_τ trong không gian $L_p(\mathbb{T}_a; X)$ được định nghĩa bởi

$$\pi_\tau(u)(t) := \begin{cases} u(t), & \text{nếu } t \in [a,\tau], \\ 0, & \text{nếu } t > \tau. \end{cases}$$

Ký hiệu $\mathcal{L}(L_p(\mathbb{T}_a; X), L_p(\mathbb{T}_a; Y))$ là không gian Banach các hàm tuyến tính, bị chặn Σ đi từ $L_p(\mathbb{T}_a; X)$ đến $L_p(\mathbb{T}_a; Y)$ và với chuẩn tương ứng là

$$\|\Sigma\| := \sup_{x\in L_p(\mathbb{T}_a;X),\ \|x\|=1} \|\Sigma x\|_{L_p(\mathbb{T}_a;Y)}.$$

Toán tử $\Sigma \in \mathcal{L}(L_p(\mathbb{T}_a; X), L_p(\mathbb{T}_a; Y))$ được gọi là *causal* nếu nó thỏa mãn đẳng thức

$$\pi_t\Sigma\pi_t = \pi_t\Sigma, \text{ với mỗi } t \geq a.$$

4.1 Tính Ổn định của Phương trình Động lực Ẩn chịu Nhiễu Causal

Xét phương trình động lực ẩn tuyến tính thời gian biến thiên (4.1), với mọi $t \geq a$, và phương trình thuần nhất tương ứng

$$E_\sigma(t)x^\Delta(t,t_0) = A(t)x(t,t_0), t \geq a \tag{4.3}$$

với điều kiện ban đầu $P(t_0)(x(t_0,t_0) - x_0) = 0$.

Với $P(t), Q(t)$ là các phép chiếu trong Chương 3, phương trình (4.1) được đưa về dạng

$$E_\sigma(t)(Px)^\Delta(t) = \bar{A}(t)x(t) + f(t),\ t \geq a,\ \bar{A} := A + E_\sigma P^\Delta \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}_a;\mathbb{K}^{n\times n}) \tag{4.4}$$

Giả thiết 4.1. *Phương trình động lực ẩn* (4.3) *có* chỉ số-1 *và ổn định mũ đều theo nghĩa rằng, tồn tại các số $M > 0$, $\omega > 0$ sao cho $-\omega$ là hồi quy dương, $\|\Phi(t,s\| \leq Me_{-\omega}(t,s)$, $t \geq s$, $t,s \in \mathbb{T}_a$.*

Giả thiết 4.2. *Tồn tại một phép chiếu trơn, bị chặn $Q(t)$ lên* $\ker E(t)$ *sao cho các toán tử $P_\sigma G^{-1}$ và $HQ_\sigma G^{-1}$ bị chặn cốt yếu trên $\mathbb{T}_a$.*

Xét phương trình (4.3) chịu nhiễu cấu trúc có dạng

$$E_\sigma(t)x^\Delta(t) = A(t)x(t) + B(t)\Sigma\big(C(\cdot)x(\cdot)\big)(t),\ t \in \mathbb{T}_a, \tag{4.5}$$

trong đó $B \in L_\infty(\mathbb{T}_a;\mathbb{K}^{n\times m})$ và $C \in L_\infty(\mathbb{T}_a;\mathbb{K}^{q\times n})$ là các ma trận cho trước xác định cấu trúc của nhiễu, $\Sigma : L_p(\mathbb{T}_a;\mathbb{K}^q) \to L_p(\mathbb{T}_a;\mathbb{K}^m)$ là toán tử nhiễu chưa biết được giả sử là tuyến tính, causal. Do đó, với nhiễu Σ, phương trình (4.5) trở thành phương trình vi phân-đại số hàm ẩn (implicit functional DAE).

Ta định nghĩa toán tử tuyến tính $\widetilde{G}$ từ $L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}_a;\mathbb{K}^n)$ đến $L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}_a;\mathbb{K}^n)$ mà được viết một cách hình thức bởi $\widetilde{G} = (I - B\Sigma CHQ_\sigma G^{-1})G$.

Định nghĩa 4.3. Phương trình vi phân-đại số hàm ẩn (4.5) được gọi là có chỉ số-1, theo nghĩa tổng quát, nếu với mỗi $T > a$, toán tử $\widetilde{G}$ hạn chế trên $L_p([a,T];\mathbb{K}^n)$ có toán tử nghịch đảo và bị chặn $\widetilde{G}^{-1}$.

Với bất kỳ $t_0 \in \mathbb{T}_a$, ta thiết lập bài toán Cauchy của phương trình (4.5) như sau

$$\begin{cases} E_\sigma(t)x^\Delta(t) = A(t)x(t) + B(t)\Sigma\big(C(\cdot)[x(\cdot)]_{t_0}\big)(t), \\ P(t_0)(x(t_0) - x_0) = 0, \forall t \in \mathbb{T}_{t_0}, \end{cases} \tag{4.6}$$

trong đó, $[x(t)]_{t_0} = \begin{cases} 0 & \text{if } t \in [a,t_0) \\ x(t) & \text{if } t \in [t_0,\infty) \end{cases}$. Bài toán Cauchy (4.6) chấp nhận một nghiệm đủ tốt (mild solution) nếu tồn tại một phần tử $x(\cdot) \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}_{t_0};\mathbb{K}^n)$ sao cho với mọi $t \geq t_0$, ta có

$$\begin{aligned} x(t) = \Phi(t,t_0)P(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t,\sigma(s))P_\sigma(s)G^{-1}(s)B(s)\Sigma\big(C(\cdot)[x(\cdot)]_{t_0}\big)(s)\Delta s \\ + H(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)B(t)\Sigma\big(C(\cdot)[x(\cdot)]_{t_0}\big)(t). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ta định nghĩa các toán tử: $(\widehat{\mathbb{M}}_{t_0}u)(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\sigma(s))P_\sigma(s)G^{-1}(s)B(s)u(s)\Delta s$, và

$$(\widetilde{\mathbb{M}}_{t_0}u)(t) = H(t)Q_\sigma(t)G^{-1}(t)B(t)u(t), \ \ (\mathbb{M}_{t_0}u)(t) = (\widehat{\mathbb{M}}_{t_0}u)(t) + (\widetilde{\mathbb{M}}_{t_0}u)(t).$$

Ta có thể nhận thấy rằng $\mathbb{M}_{t_0}, \widehat{\mathbb{M}}_{t_0} \in \mathcal{L}(L_p([t_0,\infty);\mathbb{K}^m), L_p([t_0,\infty);\mathbb{K}^n))$ và tồn tại các hằng số $K_0 \geq 0$ sao cho $\|(\mathbb{M}_{t_0}u)(t)\| \leq K_0 \|u\|_{L_p([t_0,t];\mathbb{K}^m)}$, $t \geq t_0 \geq a$, $u|_{[t_0,t]} \in L_p([t_0,t];\mathbb{K}^m)$. Ký hiệu $x(t;t_0,x_0)$ là nghiệm đủ tốt của bài toán Cauchy (4.6). Khi đó công thức (4.7) được viết ngắn gọn là

$$x(t;t_0,x_0) = \Phi(t,t_0)P(t_0)x_0 + \big(\mathbb{M}_{t_0}\Sigma(C(\cdot)[x(\cdot;t_0,x_0)]_{t_0})\big)(t).$$

Định lý 4.4. *Nếu phương trình* (4.6) *có* chỉ số-1, *thì nó chấp nhận nghiệm đủ tốt duy nhất $x(\cdot)$ với $P(\cdot)x(\cdot)$ là tuyệt đối liên tục tương ứng với Δ-độ đo. Hơn nữa, với một số tùy ý $T > t_0$, tồn tại các hằng số dương $M_1 = M_1(T), M_2 = M_2(T)$ sao cho*

$$\|P(t)x(t)\| \leq M_1 \|P(t_0)x_0\|, \quad \|x(t)\|_{L_p([t_0,t];\mathbb{K}^n)} \leq M_2\|P(t_0)x_0\|, \quad \forall t \in [t_0,T].$$

Nhận xét 4.5. Giả sử toán tử $\Sigma \in \mathcal{L}(L_p(\mathbb{T}_a;\mathbb{K}^q), L_p(\mathbb{T}_a;\mathbb{K}^m))$ là causal với mọi $t > a$ và $h \in L_p([a,t];\mathbb{K}^q)$. Khi đó, áp dụng Định lý 4.4, ta thấy rằng hàm g, được định nghĩa $g(s) := P(t)x(t;\sigma(s),h(s))$, $s \in [a,t]$, thuộc về $L_p([a,t];\mathbb{K}^n)$. Hơn nữa, đặt $y(t) := \int_s^t g(\tau)\Delta\tau$ khi đó, theo Định lý 1.27, ta có

$$y^\Delta(t) = P_\sigma(t)h(t) + (\mathbb{W}y)(t),$$

trong đó $\mathbb{W}u := (P^\Delta + P_\sigma G^{-1}\bar{A})u + P_\sigma G^{-1}B\Sigma C(I+\mathbb{D})[u]_{t_0}$.

4.2 Bán kính Ổn định của Phương trình chịu Nhiễu Động lực

Giả sử các Giả thiết 4.1, 4.2 đúng. Nghiệm tầm thường của (4.5) được gọi là L_p-ổn định toàn cục, nếu tồn tại các hằng số dương M_3, M_4 sao cho, với mọi $t \geq t_0$, $x_0 \in \mathbb{K}^n$.

$$\begin{aligned} &\|P(t)x(t;t_0,x_0)\|_{\mathbb{K}^n} \leq M_3 \|P(t_0)x_0\|_{\mathbb{K}^n}, \\ &\|x(t;t_0,x_0)\|_{L_p(T_{t_0};\mathbb{K}^n)} \leq M_4 \|P(t_0)x_0\|_{\mathbb{K}^n}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

Định nghĩa 4.6. Giả sử các Giả thiết 4.1, 4.2 đúng. Bán kính ổn định của phương trình (4.2) chịu nhiễu tuyến tính, dynamic và causal trong phương trình (4.5) là

$$r_{\mathbb{K}}(E_\sigma, A; B, C; \mathbb{T}) = \inf\left\{ \begin{array}{l} \|\Sigma\|, \text{ nghiệm tầm thường của (4.5) không} \\ L_p\text{-ổn định toàn cục hay (4.5) không có chỉ số-1} \end{array} \right\}.$$

Với mọi $t_0 \in \mathbb{T}_a$, ta định nghĩa các toán tử: $\widehat{\mathbb{L}}_{t_0}u := C(\cdot)\widehat{\mathbb{M}}_{t_0}u$, $\widetilde{\mathbb{L}}_{t_0}u := C(\cdot)\widetilde{\mathbb{M}}_{t_0}u$, and $\mathbb{L}_{t_0}u := C(\cdot)\mathbb{M}_{t_0}u$. Toán tử $\mathbb{L}_{t_0}$ được gọi là toán tử input-output liên kết với phương tình bị nhiễu (4.5). Các toán tử $\mathbb{L}_{t_0}, \widehat{\mathbb{L}}_{t_0} \in \mathcal{L}\big(L_p(\mathbb{T}_{t_0};\mathbb{K}^m), L_p(\mathbb{T}_{t_0};\mathbb{K}^q)\big)$ và $\|\mathbb{L}_{t_0}\|, \|\widehat{\mathbb{L}}_{t_0}\|$ giảm theo t_0. Hơn nữa

$$\|\widetilde{\mathbb{L}}_{t_0}\| = \Delta\text{- esssup}_{t\geq t_0} \left\|CHQ_\sigma G^{-1}B\right\| \leq \|\mathbb{L}_{t_0}\|.$$

Bởi vì $\|\mathbb{L}_t\|$ giảm theo biến t, do đó tồn tại giới hạn $\|\mathbb{L}_\infty\| := \lim_{t\to\infty}\|\mathbb{L}_t\|$. Ký hiệu

$$\beta := \|\mathbb{L}_\infty\|^{-1}, \quad \gamma := \|\widetilde{\mathbb{L}}_a\|^{-1}, \text{ quy ước } \frac{1}{0} = \infty. \tag{4.9}$$

Bổ đề 4.8. *Giả sử $\beta < \infty$ và $\alpha > \beta$, trong đó β được định nghĩa trong* (4.9). *Khi đó, tồn tại toán tử $\Sigma \in \mathcal{L}\big(L_p(\mathbb{T}_a;\mathbb{K}^q), L_p(\mathbb{T}_a;\mathbb{K}^m)\big)$, các hàm $\tilde{y}, \tilde{z} \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}_a;\mathbb{K}^q)$ và số tự nhiên $N_0 > 0$ sao cho*

i) $\|\Sigma\| < \alpha$, Σ *là causal và có nhớ hữu hạn;*

ii) $\Sigma h(t) = 0$ *với mỗi* $t \in [0, N_0]$*và mọi* $h \in L_p(\mathbb{T}_a;\mathbb{K}^q)$;

iii) $\tilde{y} \in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{T}_a;\mathbb{K}^q) \setminus L_p(\mathbb{T}_a;\mathbb{K}^q)$ *và* $\operatorname{supp}\tilde{z} \subset [0, N_0]$;

iv) $(I - \mathbb{L}_a\Sigma)\tilde{y} = \tilde{z}$.

Định lý 4.9. *Giả sử các Giả thiết* 4.1, 4.2 *đúng. Khi đó,*

$$r_{\mathbb{K}}(E_\sigma, A; B, C; \mathbb{T}) = \min\{\beta, \gamma\}. \tag{4.10}$$

trong đó β, γ được định nghĩa trong (4.9).

Nhận xét 4.10. Trong trường hợp $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, công thức (4.10) xác định công thức bán kính ổn định trong bài báo Du & Linh (2006), và trong trường hợp $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ta thu được công thức bán kính ổn định ở bài báo Rodjanadid et al. (2009).

Nhận xét 4.11. Trong trường hợp $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ and $E = I$, công thức (4.10) trình diễn một công thức bán kính ổn định trong bài báo Jacob (1998).

Ví dụ 4.12. Xét phương trình (4.3) với $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A(t) = \begin{bmatrix} p(t) & p(t) & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, thang thời gian $\mathbb{T} = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\{3k\} \bigcup\limits_{k=0}^{\infty}[3k+1, 3k+2]$, $p(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{if } t = 3k, \\ -\frac{1}{4} & \text{if } t \in [3k+1, 3k+2]. \end{cases}$ Dễ dàng tính được $P = \widetilde{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $H = I, G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Giả sử $B = C = I$ là các ma trận có cấu trúc trong phương trình bị nhiễu (4.5). Ta sẽ tính được $\|\mathbb{L}_{t_0}\| = 8$, $\|\widetilde{\mathbb{L}}_{t_0}\| = 1$. Theo Định lý 4.9, ta nhận được $r_{\mathbb{K}}(E_\sigma, A; B, C; \mathbb{T}) = \frac{1}{8}$.

Cho $\Sigma \in L_\infty(\mathbb{T}_{t_0};\mathbb{K}^{m\times q})$ là toán tử tuyến tính, causal được xác định bởi $(\Sigma u)(t) = \Sigma(t)u(t)$. Hơn nữa, ta có $\|\Sigma\| = \operatorname{esssup}_{t_0 \le t \le \infty}\|\Sigma(t)\|$.

Hệ quả 4.13 *Giả sử các Giả thiết* 4.1, 4.2 *đúng. Nếu $r_{\mathbb{K}}(E_\sigma, A; B, C; \mathbb{T}) > \|\Sigma\|$ thì phương trình* (4.5) *là L_p-ổn định toàn cục.*

Nhận xét 4.14. Trường hợp $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ và $E = I$ và $\Sigma(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}_{t_0};\mathbb{K}^{m\times q})$, Hệ quả 4.13 chỉ ra cận dưới đối với bán kính ổn định trong bài báo của Hinrichsen et al. (1989).

Nhận xét 4.15. Theo kỹ thuật biến đổi Fourier-Plancherel như trong Hinrichsen & Pritchard (1986b), và Marks II et al. (2008). Nếu E, A, B, C là các ma trận hằng và $p = 2$ thì ta có thể chứng tỏ rằng $\|\mathbb{L}_{t_0}\| = \sup_{\lambda \in \partial S} \|C(A - \lambda E)^{-1}B\|$, trong đó $S := \{\lambda \in \mathbb{C} : x^{\Delta} = \lambda x$ ổn định mũ đều$\}$ là miền ổn định mũ đều của $\mathbb{T}$. Hơn nữa, $\|\widetilde{\mathbb{L}}_{t_0}\| = \lim_{\lambda \to \infty} \|C(A - \lambda E)^{-1}B\|$. Trong trường hợp này, ta thu được công thức bán kính ổn định trong bài báo Du et al. (2011)

$$r(E, A; B, C; \mathbb{T}) = \frac{1}{\sup_{\lambda \in \partial S \cup \infty} \|C(A - \lambda E)^{-1}B\|}.$$

4.3 Bán kính Ổn định chịu Nhiễu Cấu trúc Hai vế

Trong mục này, ta xét phương trình (4.2) chịu nhiễu tác động lên cả hai vế

$$(E_\sigma + B_{1\sigma}\Sigma_{1\sigma}C_{1\sigma})(t)x^{\Delta}(t) = (A + B_2\Sigma_2C_2)(t)x(t), \quad t \geq t_0. \tag{4.11}$$

trong đó $B_i \in L_\infty(\mathbb{T}_{t_0}; \mathbb{K}^{n\times m}), C_i \in L_\infty(\mathbb{T}_{t_0}; \mathbb{K}^{q\times n})$ là các ma trận cho trước, và $\Sigma_i \in L_\infty(\mathbb{T}_{t_0}; \mathbb{K}^{m\times q})$ là ma trận nhiễu, với $i = 1, 2$. Ta định nghĩa tập các nhiễu chấp nhận được, $\mathbb{S} = \mathbb{S}(E; B_1, C_1) := \{(\Sigma_1, \Sigma_2) | \ker(E + B_1\Sigma_1C_1) = \ker(E)\}$.

Bổ đề 4.16. *Các khẳng định sau đúng:*

i) $Q_\sigma Q^{\Delta} H Q_\sigma = 0$; ii) $Q_\sigma Q^{\Delta} P = Q^{\Delta}$; iii) $I + Q^{\Delta} H Q_\sigma$ *khả nghịch;*

iv) $(I + Q^{\Delta} H Q_\sigma) G^{-1} = (E_\sigma - AHQ_\sigma)^{-1}$, $Q_\sigma G^{-1} = Q_\sigma(E_\sigma - AHQ_\sigma)^{-1}$.

Đặt $\bar{\mathbb{A}} := \mathbb{A} - \mathbb{E}_\sigma Q^{\Delta}$, $\mathbb{G} := \mathbb{E}_\sigma - \bar{\mathbb{A}} H Q_\sigma$ và $B := \begin{bmatrix} B_{1\sigma} & B_2 \end{bmatrix}$, $\Sigma_b := \begin{bmatrix} \Sigma_{1\sigma} & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}$.

Bổ đề 4.17. *Giả sử phương trình* (4.2) *có* chỉ số-1. *Nếu* $(\Sigma_1, \Sigma_2) \in \mathbb{S}$ *sao cho* $\|\Sigma_b\| < \frac{1}{\|FB\|}$, *khi đó phương trình bị nhiễu* (4.11) *cũng có* chỉ số-1.

Bổ đề 4.18. *Giả sử phương trình* (4.2) *có* chỉ số-1. *Khi đó, phương trình* (4.5) *tương đương với phương trình* (4.11) *với nhiễu* $\Sigma = (I + \Sigma_b FB)^{-1}\Sigma_b$.

Định nghĩa 4.19. Giả sử các Giả thiết 4.1, 4.2 đúng. Bán kính ổn định phức (thực) của phương trình (4.2) chịu nhiễu tuyến tính có cấu trúc trong phương trình (4.11) được xác định bởi

$$r_{\mathbb{K}}(E_\sigma, A; B_1, C_1, B_2, C_2; \mathbb{T}) = \inf \left\{ \begin{matrix} \|\Sigma_b\|, \text{ nghiệm tầm thường của (4.11) không } L_p \\ \text{-ổn định toàn cục hoặc (4.11) không là chỉ số-1} \end{matrix} \right\}.$$

Định lý 4.20. *Giả sử các Giả thiết* 4.1, 4.2 *đúng. Khi đó, bán kính ổn định của phương trình* (4.2) *chịu nhiễu tuyến tính có cấu trúc trong phương trình* (4.11) *thỏa mãn*

$$r_{\mathbb{K}}(E_\sigma, A; B_1, C_1, B_2, C_2; \mathbb{T}) \geq \begin{cases} \frac{\min\{\beta;\gamma\}}{1+\|FB\|\min\{\beta;\gamma\}} & \textit{nếu } \beta < \infty \textit{ hoặc } \gamma < \infty, \\ \frac{1}{\|FB\|} & \textit{nếu } \beta = \infty \textit{ và } \gamma = \infty. \end{cases}$$

trong đó β, γ được định nghĩa trong (4.9).

Ví dụ 4.21. Xét phương trình động lực ẩn $Ex^{\Delta} = Ax$, trong đó, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Giả sử phương trình chịu nhiễu có cấu trúc có dạng $E \rightsquigarrow \mathbb{E}, A \rightsquigarrow \mathbb{A}$

$$\mathbb{E} = \begin{bmatrix} 1+\delta_1(t) & \delta_1(t) & \delta_1(t) \\ \delta_1(t) & 1+\delta_1(t) & \delta_1(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{A} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2}+\delta_2(t) & -1+\delta_2(t) & 1+\delta_2(t) \\ \delta_2(t) & \delta_2(t) & -1+\delta_2(t) \end{bmatrix},$$

trong đó $\delta_i(t), i = 1, 2$, là các phần tử nhiễu. Dễ thấy, mô hình này có dạng (4.11) với $B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Chọn $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Qua tính toán, ta nhận được $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Do đó $\|FB\| = 3$ và $C(A - \lambda E)^{-1}B = \dfrac{1}{(\lambda+1)^2 - \frac{1}{4}} \begin{bmatrix} \lambda + \frac{3}{2} & \lambda + \frac{3}{2} \\ 2\lambda + 3 & 2\lambda + 3 \end{bmatrix}$. Lấy $\mathbb{T} = \bigcup_{k=1}^{\infty} [2k, 2k+1]$. Khi đó, miền ổn định mũ đều $S = \{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda + \ln|1+\lambda| < 1\}$. Theo Nhận xét 4.15, ta dễ dàng tính được $\beta = \frac{1}{8}, \gamma = +\infty$. Áp dụng Định lý 4.20, ta nhận được

$$r_{\mathbb{K}}(E_\sigma, A; B_1, C_1, B_2, C_2; \mathbb{T}) \geq \frac{1}{11}.$$

Hệ quả 4.22. *Giả sử các Giả thiết* 4.1, 4.2 *đúng. Khi đó, bán kính ổn định phức (thực) của phương trình* (4.2) *chịu nhiễu tuyến tính không cấu trúc $E \rightsquigarrow E + \Sigma_1, A \rightsquigarrow A + \Sigma_2$ thỏa mãn*

$$r_{\mathbb{K}}(E_\sigma, A; I; \mathbb{T}) \geq \begin{cases} \frac{\min\{l(E,A), \|HQ_\sigma G^{-1}\|_\infty^{-1}\}}{k_1 + k_2 \min\{l(E,A), \|HQ_\sigma G^{-1}\|_\infty^{-1}\}} & \textit{nếu } Q \neq 0 \textit{ hoặc } l(E,A) < \infty, \\ \frac{1}{k_2} & \textit{nếu } Q = 0 \textit{ và } l(E,A) = \infty. \end{cases}$$

quy ước $\|HQ_\sigma G^{-1}\|_\infty^{-1} = \infty$ nếu $\|HQ_\sigma G^{-1}\|_\infty = 0$.

Nhận xét 4.23. Trong trường hợp $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, hệ quả này liên quan tới cận dưới của bán kính ổn định trong bài báo Berger (2014).

Ví dụ 4.24. Xét phương trình (4.3) với $E, A, \mathbb{T}$ trong Ví dụ 4.12. Ta có thể tính được $\|p\|_\infty = \dfrac{1}{2}$, $k_1 = k_2 = 1$. Do vậy theo Hệ quả 4.22, ta nhận được kết quả

$$r_{\mathbb{K}}(E_\sigma, A; I; \mathbb{T}) \geq \frac{\frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{1}{9}.$$

KẾT LUẬN

Luận án đã đạt được những kết quả sau đây trên thang thời gian:

1. Đưa ra khái niệm số mũ Lyapunov trên thang thời gian và sử dụng nó để nghiên cứu tính ổn định của các phương trình động lực tuyến tính trên thang thời gian.

2. Thiết lập được một số kết quả về tính ổn định vững của các phương trình động lực ẩn với nhiễu Lipschitz và mở rộng định lý ổn định kiểu Bohl-Perron cho các phương trình động lực ẩn trên thang thời gian.

3. Đưa ra khái niệm số mũ Bohl và nghiên cứu mối quan hệ giữa tính ổn định mũ và số mũ Bohl khi các phương trình động lực chịu nhiễu tác động lên các hệ số của phương trình.

4. Đưa ra được công thức bán kính ổn định của phương trình động lực ẩn trên thang thời gian dưới một số lớp nhiễu có cấu trúc tác động lên vế phải hoặc cả hai vế.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ

1. Nguyen K.C., Nhung T.V., Anh Hoa T.T., and Liem N.C. (2018), Lyapunov exponent for dynamic equations on time scales, *Dynamic Systems and Application*, **27(2)**, 367–386 (SCIE), Giải thưởng công trình Toán học năm 2019 của Chương trình trọng điểm quốc gia phát triển Toán học giai đoạn 2010 - 2020 theo Quyết định số 146/QĐ-VNCCCT ngày 22/11/2019 của Giám đốc điều hành Viện Nghiên cứu Cao cấp về Toán.

2. Thuan D.D., Nguyen K.C., Ha N.T., and Du N.H. (2019), Robust stability of linear time-varying implicit dynamic equations: A general consideration, *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, **31(3)**, 385–413 (SCI).

3. Thuan D.D., Nguyen K.C., Ha N.T., and Quoc P.V. (2019), On stability, Bohl exponent and Bohl-Perron theorem for implicit dynamic equations, *International Journal of Control*, Published online, (SCI).