

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2



Nguyễn Đức Trường

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI
BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN
TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2024

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2**



Nguyễn Đức Trường

**MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI
BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN
TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG**

Chuyên ngành: Toán Giải tích

Mã số: 946 01 02

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

TẬP THỂ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:

- 1. GS. TS. Phạm Ngọc Anh**
- 2. TS. Hoàng Ngọc Tuấn**

Hà Nội - 2024

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi, dưới sự hướng dẫn của các thầy trong Tập thể hướng dẫn khoa học. Các kết quả, số liệu trong luận án là trung thực và chưa từng được công bố trên bất kỳ công trình nào khác. Các tài liệu tham khảo được trích dẫn đầy đủ.

Tác giả

Nguyễn Đức Trường

Lời cảm ơn

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 dưới sự hướng dẫn tận tình của GS. TS. Phạm Ngọc Anh (Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông) và TS. Hoàng Ngọc Tuấn (Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2). Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới các Thầy.

Trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận án, thông qua các bài giảng, hội nghị và hội thảo học thuật, tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và các ý kiến đóng góp quý báu của các thầy/cô ở Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2. Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu, Khoa Toán, Phòng đào tạo - Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2; Ban giám hiệu, Khoa Toán và Khoa học Tự nhiên - Trường Đại học Hải Phòng, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt thời gian làm nghiên cứu sinh.

Xin chân thành cảm ơn các anh/chị/em trong nhóm nghiên cứu tại phòng Lab "Toán Ứng dụng và Tính toán" của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, các bạn bè đồng nghiệp đã luôn bên cạnh trao đổi, động viên, khích lệ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Nghiên cứu sinh xin chân thành cảm ơn những người thân yêu trong gia đình mình, đã luôn luôn động viên, chia sẻ và giúp đỡ trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu sinh.

Tác giả

Danh mục ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{N}$	tập hợp các số tự nhiên
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}_+$	tập số thực không âm
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide thực n -chiều
$\mathbb{H}$	không gian Hilbert thực
$x^k \rightarrow x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới x
$x^k \rightharpoonup x$	dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu tới x
$\ x\ $	chuẩn của vectơ x
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của hai vectơ x và y
E	ánh xạ đồng nhất
$A \times B$	tích Đề-Các của hai tập hợp A và B
$\operatorname{argmin}\{f(x) : x \in C\}$	tập các điểm cực tiểu của hàm f trên C
$\partial f(x)$	dưới vi phân của f tại x
$\delta_C(\cdot)$	hàm chỉ trên C
$\Pi_C(x)$	hình chiếu của x lên tập C
$N_C(x)$	nón pháp tuyến ngoài của C tại $x \in C$
$\operatorname{dom} F$	miền hữu hiệu của ánh xạ F
$OP(\Omega, f)$	bài toán tối ưu với hàm mục tiêu f và miền ràng buộc Ω
$VI(C, F)$	bài toán bất đẳng thức biến phân được xác định bởi tập C và ánh xạ F
$Sol(C, F)$	tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân đơn trị $VI(C, F)$
$VIF(\Omega, F)$	bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập

	điểm bất động
$BVI(C, F, G)$	bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập
	điểm bất động của ánh xạ nghiệm
$Fix(S)$	tập điểm bất động của ánh xạ S
$CPU - times$	thời gian thực hiện thuật toán
Start. point	điểm khởi tạo ban đầu
$Iter.$	số bước lặp trong thuật toán
$(HICA)$	thuật toán lai ghép co quán tính
$(RLPA)$	thuật toán chiếu nới lỏng
(PCA)	thuật toán chiếu co
$(PIPA)$	thuật toán xấp xỉ song song quán tính
$PSNR$	chỉ số sai số tín hiệu nhiễu đỉnh
$SSIM$	chỉ số cấu trúc tương đương

Mục lục

Lời cam đoan	iii
Lời cảm ơn	iv
Danh mục các ký hiệu và chữ viết tắt	v
Mở đầu	1
1 Bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động	9
1.1 Một số kiến thức cơ bản	9
1.1.1 Phép chiếu và ánh xạ đơn điệu	9
1.1.2 Bài toán bất đẳng thức biến phân	14
1.1.3 Bài toán điểm bất động	15
1.1.4 Một số bổ đề cơ bản	15
1.2 Bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động	17
1.2.1 Phát biểu bài toán và ví dụ	17
1.2.2 Một số trường hợp đặc biệt	18
1.2.3 Mô hình xử lý ảnh	19
1.2.4 Một vài thuật toán thông dụng giải bài toán $VIF(\Omega, F)$	21
2 Các kỹ thuật quán tính	25
2.1 Kỹ thuật lai ghép co quán tính	25
2.1.1 Thuật toán $(HICA)$	25
2.1.2 Định lý hội tụ	26
2.1.3 Các ví dụ tính toán	32
2.2 Kỹ thuật xấp xỉ song song quán tính	38
2.2.1 Thuật toán $(PIPA)$	38

2.2.2	Định lý hội tụ	38
2.2.3	Áp dụng vào mô hình phục hồi ảnh	43
3	Phương pháp ánh xạ nghiệm nối lỏng	49
3.1	Phương pháp chiếu nối lỏng	50
3.1.1	Thuật toán (<i>RLPA</i>)	50
3.1.2	Ánh xạ nghiệm	51
3.1.3	Định lý hội tụ	56
3.1.4	Các ví dụ tính toán	63
3.2	Phương pháp chiếu co	69
3.2.1	Thuật toán (<i>PCA</i>)	69
3.2.2	Định lý hội tụ	70
3.2.3	Sai số tính toán	78
3.2.4	Các ví dụ tính toán	82
	Kết luận	88
	Hướng nghiên cứu tiếp theo	89
	Danh mục công trình khoa học đã công bố	90
	Tài liệu tham khảo	91

Mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Khi nghiên cứu các bài toán biên cho một lớp phương trình đạo hàm riêng vào năm 1966, lần đầu tiên Hartman, Ph. và Stampacchia, G. [39] đã đề cập đến mô hình bất đẳng thức biến phân. Từ đó, bài toán này được biết đến với những ứng dụng thú vị như mô hình cân bằng kinh tế Nash, mô hình cân bằng mạng giao thông, mô hình định tuyến tối ưu mạng truyền thông CDMA [44], lý thuyết trò chơi bất hợp tác, mô hình xử lý ảnh, ... Rất nhiều ứng dụng thực tế của bài toán này được Kinderlehrer, D. và Stampacchia, G. [48] mô tả trong cuốn sách “An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications” và trong các tài liệu [14, 31, 56]. Bài toán bất đẳng thức biến phân chứa đựng nhiều lớp bài toán quen thuộc, chẳng hạn như lớp bài toán tối ưu lồi khả dưới vi phân, bài toán điểm bất động Kakutani, bài toán bù phi tuyến và một số mô hình khác.

Cho C là một tập cho lồi đóng khác rỗng của một không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ và một ánh xạ $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ (thường được gọi là ánh xạ giá), bài toán bất đẳng thức biến phân với ánh xạ giá F và miền ràng buộc C , ký hiệu $VI(C, F)$, được phát biểu dưới dạng:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, F)$ là một đối tượng nghiên cứu phổ biến trong lĩnh vực Giải tích và Lý thuyết tối ưu. Hiện nay, tồn tại hai hướng nghiên cứu chính về bài toán này. *Thứ nhất là*, nghiên cứu định tính về sự tồn tại nghiệm và tính chất của tập nghiệm của bài toán. Các kết quả nổi bật về hướng nghiên cứu này phải được nhắc đến với các nhóm nghiên

cứu trong, ngoài nước của Yen, N.D và cộng sự [49, 88], của Khanh, P.Q. và cộng sự [50, 51], của Mordukhovich, B.S. và cộng sự [63, 64], của nhiều tác giả khác trong [65, 54]. *Thứ hai là*, nghiên cứu đề xuất các thuật toán giải và ứng dụng trực tiếp với các mô hình cụ thể. Một trong các phương pháp thông dụng giải bài toán này là phương pháp một phép chiếu trong [19]. Sơ đồ lặp có dạng:

$$\begin{cases} x^0 \in C, \\ x^{k+1} = \Pi_C[x^k - \lambda F(x^k)], \quad \forall k \geq 0. \end{cases}$$

Dưới giả thiết rằng, ánh xạ giá F là β -đơn điệu mạnh và L -liên tục Lipschitz, $\lambda \in (0, \frac{2\beta}{L^2})$, dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới một nghiệm duy nhất x^* của bài toán $VI(C, F)$. Tuy nhiên, giả thiết đơn điệu mạnh của ánh xạ giá là khá chặt. Để giảm nhẹ giả thiết này, trong [52], Korpelevich, G.M. đã đề xuất thuật toán đạo hàm tăng cường sau:

$$\begin{cases} x^0 \in C, \\ y^k = \Pi_C[x^k - \lambda F(x^k)], \\ x^{k+1} = \Pi_C[x^k - \lambda F(y^k)], \quad \forall k \geq 0. \end{cases}$$

Khi đó, dưới giả thiết ánh xạ giá F đơn điệu và liên tục Lipschitz, các dãy lặp $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ hội tụ yếu tới một nghiệm của bài toán $VI(C, F)$. Gần đây, một số thuật toán cũng đã nghiên cứu mở rộng với ánh xạ giá giả đơn điệu không cần giả thiết liên tục Lipschitz trong [40, 42]. Chú ý rằng, phép chiếu Π_C được tính toán dưới dạng hiển, là khá hiệu quả trên máy tính với một số dạng quen thuộc của miền ràng buộc C . Chẳng hạn như, C có cấu trúc dạng hình hộp, nửa không gian, giao của hai nửa không gian hoặc hình cầu. Tuy nhiên, khi miền C được cho dưới dạng tổng quát, việc tính toán phép chiếu của một điểm $\Pi_C(x)$ với $x \in \mathbb{H}$ là không dễ thực thi trên máy tính. Khi đó, một số tác giả nghiên cứu với các phương pháp xấp xỉ ngoài của miền C là khá hiệu quả trong [22, 34]. Bên cạnh đó, với ánh xạ giá đơn điệu có rất nhiều phương pháp giải khác như phương pháp điểm gần kề [61], nguyên lý bài toán phụ [24], phương pháp egordic [20], phương pháp điểm trong [32], phương pháp đạo hàm tăng cường quán tính [29] và

nhiều phương pháp thú vị khác [23, 53, 66, 71, 78, 89].

Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, $I = \{1, 2, \dots\}$, các ánh xạ $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, ($i \in I$). Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu đề xuất các thuật toán mới giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, ký hiệu là $VIF(\Omega, F)$, được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega \text{ sao cho } \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (1)$$

ở đây $\Omega = \bigcap_{i \in I} \text{Fix}(S_i)$ và $\text{Fix}(S_i) = \{x \in \mathbb{H} : x = S_i(x)\}$. Rõ ràng, khi S_i là ánh xạ đồng nhất, bài toán $VIF(\Omega, F)$ được viết dưới dạng bài toán bất đẳng thức biến phân thông thường $VI(C, F)$.

Nghiên cứu thuật toán đầu tiên giải bài toán $VIF(\Omega, F)$ được nhắc đến với công trình của Sibony, M. trong [72], ở đây miền ràng buộc Ω là tập nghiệm của phương trình toán tử đơn điệu. Khi Ω là tập điểm bất động của một ánh xạ không giãn $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, trong [84], Yamada, I. đã đề xuất thuật toán đường dốc gắn kết với dãy lặp khá đơn giản sau:

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{H}, \\ x^{k+1} = S(x^k) - \lambda F(S(x^k)), \quad \forall k \geq 0. \end{cases}$$

Dưới giả thiết β -đơn điệu mạnh và L -liên tục Lipschitz của ánh xạ giá F , và $\lambda \in (0, \frac{2\beta}{L^2})$, dãy lặp $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới một nghiệm duy nhất của bài toán $VIF(\Omega, F)$. Mở rộng kết quả này của Yamada, I. và Xu, H.K. [82] đưa ra thuật toán lặp xoay vòng với miền ràng buộc của bài toán thành tập điểm bất động của họ hữu hạn các ánh xạ không giãn. Trong [45], Iemoto, S. và Takahashi, W. nghiên cứu mở rộng thuật toán cho miền ràng buộc là tập điểm bất động của dãy các ánh xạ không giãn. Một số kết quả nghiên cứu thú vị với ánh xạ giá đơn điệu tổng quát và miền ràng buộc Ω là giao của các ánh xạ giả co chặt (hoặc các ánh xạ tựa không giãn) được đề xuất bởi nhiều tác giả, chẳng hạn như phương pháp xấp xỉ [60], phương pháp nối lỏng quán tính [36], phương pháp chiếu dưới đạo hàm [6], phương pháp co quán tính [12] và một số phương pháp khác [7, 9, 87]

Như ta đã biết, trong [1, Proposition 2.2], một điểm $x^* \in C$ là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, G)$ (ở đây $G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$) khi và

chỉ khi nó là một điểm bất động của ánh xạ nghiệm $S : \mathbb{H} \rightarrow C$ như sau:

$$S(x) = \Pi_C[x - \lambda G(x)], \quad \forall x \in \mathbb{H},$$

ở đây $\lambda > 0$. Trong trường hợp này, bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động $VIF(\Omega, F)$ với $\Omega = \text{Fix}(S)$, trở thành bài toán $BVI(C, F, G)$, được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } u \in \Omega \text{ sao cho } \langle F(u), x - u \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

ở đây $\Omega = \{x^* \in C : \langle G(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C\}$. Về thuật toán giải bài toán bất đẳng thức biến phân $BVI(C, F, G)$, đã có một số kết quả thông dụng như phương pháp đạo hàm tăng cường của Anh, P.N. và cộng sự trong [4, 8], phương pháp xấp xỉ gắn kết của Maingé, P.E. trong [59], phương pháp xấp xỉ dưới đạo hàm của Vương, P.T. và cộng sự trong [80], và một số phương pháp khác trong [27, 41, 59, 73, 79, 85, 86].

Về các ứng dụng của bài toán $VIF(\Omega, F)$, ta phải nhắc đến ứng dụng thú vị trong các mô hình xử lý ảnh [25, 74, 33]. Ảnh kỹ thuật số được hiểu như một ma trận xếp liên tiếp các điểm ảnh (gọi là các Pixel), mỗi cột là một véc tơ trong không gian $\mathbb{R}^n$. Từ một bức ảnh đã bị làm mờ hoặc gây nhiễu, ta phải tìm về bức ảnh gốc ban đầu nhờ vào các thuật toán tìm điểm bất động [18, 33, 38, 57, 74]. Hiệu quả của thuật toán phục hồi ảnh có thể đánh giá khách quan qua hai chỉ số: Sai số tín hiệu nhiễu đỉnh $PSNR$ trong [76] và chỉ số cấu trúc tương đương $SSIM$ trong [67].

Bài toán $VIF(\Omega, F)$ là bài toán khó, vì miền ràng buộc Ω là giao các tập điểm bất động của họ ánh xạ và không được cho dưới dạng hiển. Theo hiểu biết của chúng tôi về các thuật toán hiện nay cho việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động $VIF(\Omega, F)$, nhìn chung, đều có một số đặc điểm sau:

- Sự hội tụ của các thuật toán đòi hỏi các giả thiết đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz của ánh xạ giá F hoặc một số giả thiết đơn điệu chính quy (khá phức tạp);
- Các thuật toán lặp chưa thực sự hiệu quả trên máy tính, khi miền ràng buộc C phức tạp. Tại mỗi bước lặp trong một số thuật toán, dãy

lập được tính là nghiệm của một bài toán bất đẳng thức biến phân phụ khác. Sự hội tụ của thuật toán đòi hỏi tính chính xác các nghiệm tại mỗi bước lặp, tuy nhiên, tính toán thực tế trên máy tính chỉ được nghiệm xấp xỉ có sai số;

- Thuật toán và tính toán ứng dụng vào các mô hình thực tế còn nhiều hạn chế.

Với các lý do trên, chúng tôi chọn nghiên cứu đề tài luận án “*Một số phương pháp giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động*”. Với mục tiêu chính là đề xuất các thuật toán mới để giải bài toán $VIF(\Omega, F)$, chúng tôi đã nghiên cứu mở rộng các phương pháp trong tối ưu và các kỹ thuật lặp điểm bất động, chẳng hạn như kỹ thuật lai ghép, kỹ thuật quán tính, kỹ thuật lặp, kỹ thuật chiếu nối lỏng, ... Sự hội tụ mạnh và yếu của các thuật toán đề xuất được chứng minh, các ví dụ có tính chất minh họa và so sánh với các kết quả thông dụng khác được lập trình tính toán trên phần mềm Matlab.

2. Mục tiêu nghiên cứu

Mục tiêu trong luận án của chúng tôi là nghiên cứu các thuật toán mới giải bài toán $VIF(\Omega, F)$. Cụ thể như sau:

- Nghiên cứu kỹ thuật lai ghép co quán tính, là sự kết hợp giữa kỹ thuật lai ghép của Yamada và kỹ thuật quán tính, để giải bài toán $VIF(\Omega, F)$, trong trường hợp ánh xạ giá F là đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz, còn họ các ánh xạ $\{S_i\}_{i \in I}$ thoả mãn điều kiện (Z).
- Nghiên cứu kỹ thuật xấp xỉ song song quán tính để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động khi họ các ánh xạ $\{S_i\}_{i \in J}$, $J = \{1, 2, \dots, m\}$ là họ hữu hạn, thoả mãn giả thiết nửa co, còn ánh xạ giá F là đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz.
- Nghiên cứu ánh xạ nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân và đề xuất thuật toán giải cho bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập

điểm bất động của ánh xạ nghiệm bằng cách sử dụng các phép chiếu và phép chiếu nối lỏng lên nửa không gian đóng.

- Đề xuất thuật toán chiếu co giải bài toán $BVI(C, F, G)$ cho trường hợp trong không gian $\mathbb{R}^n$.
- Triển khai tính toán bằng các ví dụ giải số cho các thuật toán, và áp dụng vào mô hình xử lý ảnh.

Đối tượng nghiên cứu:

Đối tượng nghiên cứu. Luận án nghiên cứu lớp các bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Cụ thể là: Bài toán bất đẳng thức biến phân với ràng buộc là tập điểm bất động của các ánh xạ $\{S_i\}_{i \in I}$, bài toán bất đẳng thức biến phân với ràng buộc là giao của tập điểm bất động và tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân khác.

Phạm vi nghiên cứu. Luận án chỉ nghiên cứu các thuật toán giải, cải tiến các phương pháp xấp xỉ nghiệm cho bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, trọng tâm là mở rộng phương pháp chiếu, phương pháp lặp, phương pháp lai ghép. Bên cạnh đó, chứng minh sự hội tụ của thuật toán, phân tích cho sai số trong một số trường hợp, áp dụng thuật toán vào mô hình xử lý ảnh,...

4. Phương pháp nghiên cứu

Để đề xuất thuật toán mới và chứng minh sự hội tụ của dãy lặp giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, ngoài việc sử dụng các kỹ thuật cơ bản trong giải tích, Giải tích lồi, Giải tích đa trị và Giải tích phi tuyến, chúng tôi dựa trên các phương pháp đã được sử dụng trong bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân như phương pháp chiếu, phương pháp đạo hàm tăng cường, phương pháp điểm gần kề, kỹ thuật quán tính, kỹ thuật tính toán song song, kỹ thuật chiếu nối lỏng,...

5. Kết quả của luận án

Một số kết quả đã đạt được của luận án như sau:

- Đề xuất thuật toán lai ghép co quán tính và chứng minh sự hội tụ mạnh trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ để giải bài toán $VIF(\Omega, F)$.
- Đề xuất thuật toán xấp xỉ song song quán tính và chứng minh sự hội tụ mạnh trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ để giải bài toán $VIF(\Omega, F)$. Áp dụng thuật toán này vào mô hình xử lý ảnh.
- Đề xuất thuật toán chiếu nối lỏng và chứng minh sự hội tụ mạnh trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của một ánh xạ giao với tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân khác.
- Đề xuất thuật toán chiếu co và chứng minh sự hội tụ trong không gian $\mathbb{R}^n$ để giải bài toán $BVI(C, F, G)$.

Nội dung của luận án được viết dựa trên kết quả của 4 bài báo, trong đó 3 bài báo được xuất bản trên tạp chí SCIE xếp hạng Q2, 01 bài báo đã được xuất bản trên tạp chí Scopus. Các kết quả chính của luận án đã được báo cáo tại

- Hội nghị quốc tế “The International Symposium on Applied Science ISAS2022”. (14 - 16/10/2022 tại Trường Đại học Bách khoa thành phố Hồ Chí Minh),
- Hội thảo: “Tối ưu và Tính toán Khoa học” lần thứ 21 (20-22/4/2023 tại Ba Vì),
- Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ X (8-12/08/2023 tại Đà Nẵng),
- Seminar bộ môn “Giải tích và toán ứng dụng”, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2,
- Seminar phòng Lab “Toán Ứng dụng và tính toán”, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông.

6. Cấu trúc luận án

Ngoài các phần mục lục, danh mục các ký hiệu và chữ viết tắt, mở đầu và tài liệu tham khảo, nội dung chính của luận án được chia thành 3 chương như sau:

- Chương 1: Bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động.
- Chương 2: Các kỹ thuật quán tính.
- Chương 3: Phương pháp ánh xạ nghiệm nổi lồi.

Chương 1

Bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động

Trong chương mở đầu của luận án, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm cũng như kiến thức cơ bản trong giải tích hàm và giải tích lồi, làm cơ sở để nghiên cứu ở các chương sau. Bên cạnh đó, các khái niệm về bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, sự tồn tại nghiệm, các bổ đề hỗ trợ, mô hình xử lý ảnh và một vài phương pháp thường gặp để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động như: Phương pháp lặp, phương pháp lai ghép đường dốc, phương pháp chiếu cũng được chúng tôi trình bày trong chương này. Nội dung của Chương 1 được viết dựa trên một số kết quả trong các tài liệu tham khảo [1, 2, 16, 21, 28, 30, 31, 53, 59, 82, 83].

1.1 Một số kiến thức cơ bản

1.1.1 Phép chiếu và ánh xạ đơn điệu

Xét trong một không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn được xác định bởi $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ với mọi $x \in \mathbb{H}$, một dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{H}$ được gọi là hội tụ mạnh tới $x^0 \in \mathbb{H}$ nếu $\|x^k - x^0\| \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow +\infty$. Dãy $\{y^k\} \subset \mathbb{H}$ được gọi là hội tụ yếu tới $y^0 \in \mathbb{H}$ nếu $\langle y, y^k - y^0 \rangle \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow +\infty$, với mọi $y \in \mathbb{H}$. Một dãy hội tụ mạnh thì hội tụ yếu, nhưng điều ngược lại không đúng. Tuy vậy, theo [15], nếu dãy $\{y^k\}$ hội tụ yếu đến y^0

và có chuẩn $\|y^k\|$ hội tụ tới $\|y^0\|$ thì $\{y^k\}$ hội tụ mạnh đến y^0 .

Bổ đề 1.1. [21, Lemma 2.1] Với mọi $x, y \in \mathbb{H}$, ta có

- (i) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 - 2\langle x - y, y \rangle$;
- (ii) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$;
- (iii) $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x + y \rangle$;
- (iv) $\|tx + (1 - t)y\|^2 = t\|x\|^2 + (1 - t)\|y\|^2 - t(1 - t)\|x - y\|^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1. Cho C là một tập con của một không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Khi đó, tập C được gọi là

- (i) một tập lồi, nếu C chứa đoạn thẳng đi qua hai điểm bất kỳ của nó.
Tức là, C là lồi khi và chỉ khi $\forall x, y \in C, \forall \alpha \in [0, 1]$ ta có

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C;$$

- (ii) tập đóng, nếu mọi dãy $\{x^k\} \subset C$ thỏa mãn $x^k \rightarrow x$ khi $k \rightarrow +\infty$ ta đều có $x \in C$;
- (iii) tập đóng yếu, nếu mọi dãy $\{x^k\} \subset C$ thỏa mãn $x^k \rightharpoonup x$ khi $k \rightarrow +\infty$ ta đều có $x \in C$;
- (iv) tập compact, nếu mọi dãy $\{x^k\} \subset C$ đều có một dãy con hội tụ mạnh về một phần tử thuộc C .

Định nghĩa 1.2. Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của một không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Với mỗi phần tử x nằm trong $\mathbb{H}$, hình chiếu của x lên C , ký hiệu $\Pi_C(x)$, là điểm thuộc C được xác định dưới dạng

$$\Pi_C(x) = \operatorname{argmin} \{\|y - x\| : y \in C\}.$$

Một số tính chất cơ bản của phép chiếu được cho trong các mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.1. [16, Section 4.3] Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của $\mathbb{H}$. Khi đó,

- (i) hình chiếu $\Pi_C(x)$ của x trên C luôn tồn tại và duy nhất;

- (ii) $\langle x - \Pi_C(x), y - \Pi_C(x) \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C, x \in \mathbb{H};$
- (iii) $\|\Pi_C(x) - \Pi_C(y)\|^2 \leq \langle \Pi_C(x) - \Pi_C(y), x - y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{H};$
- (iv) $\|\Pi_C(x) - \Pi_C(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{H};$
- (v) $\|x - \Pi_C(x)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|y - \Pi_C(x)\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{H}, y \in C;$
- (vi) $\|\Pi_C(x) - \Pi_C(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|\Pi_C(x) - x + y - \Pi_C(y)\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{H};$

Mệnh đề 1.2. [59, Proposition 4.1] *Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của $\mathbb{H}$, $y = \Pi_C(x - r), r \in \mathbb{H}, x, y \in C$. Khi đó,*

- (i) $\|y - x\| \leq \|r\|;$
- (ii) $5\|r\|^2 + \|x - q\|^2 - \|y - q\|^2 \geq 2\langle x - q, r \rangle, \quad \forall q \in C.$

Định nghĩa 1.3. *Cho $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi, nửa liên tục dưới, chính thường và $c \in \mathbb{R}$. Một ánh xạ $\text{prox}_{(cg)} : \mathbb{H} \rightarrow C$:*

$$\text{prox}_{(cg)}(x) = \arg \min \left\{ cg(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2, y \in C \right\}, \forall x \in \mathbb{H},$$

được gọi là ánh xạ gần kề.

Với mỗi $u \in C$, tập hợp

$$N_C(u) = \{w \in \mathbb{H} : \langle w, y - u \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C\}$$

được gọi là nón pháp tuyến ngoài của C tại u .

Cho hàm $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi, chính thường, véc tơ $w \in \mathbb{H}$ được gọi là dưới đạo hàm của g tại u nếu

$$g(v) \geq \langle w, v - u \rangle + g(u), \quad \forall v \in C.$$

Tập tất cả các dưới đạo hàm của g tại u gọi là dưới vi phân của g tại u , ký hiệu là $\partial g(u)$.

Bổ đề 1.2. [17, Theorem 6.39] *Với mọi $x, y \in C, c > 0$, các khẳng định sau đây là tương đương:*

- (a) $u = \text{prox}_{(cg)}(x);$
- (b) $(x - u) \in \partial g(u) + N_C(u);$

$$(c) \langle x - u, y - u \rangle \leq g(y) - g(u), \forall y \in C.$$

Bổ đề 1.3. [17, Theorem 6.42] Cho $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi, nửa liên tục dưới. Khi đó, với mọi $x, y \in \mathbb{H}$, $z \in C$, ta có

(a) (đơn điệu mạnh ngược)

$$\langle x - y, \text{prox}_{(cg)}(x) - \text{prox}_{(cg)}(y) \rangle \geq \|\text{prox}_{(cg)}(x) - \text{prox}_{(cg)}(y)\|^2;$$

(b) (không giãn)

$$\|\text{prox}_{(cg)}(x) - \text{prox}_{(cg)}(y)\| \leq \|x - y\|;$$

(c) (tựa không giãn)

$$\begin{aligned} \|\text{prox}_{(cg)}(x) - z\|^2 &\leq \|x - z\|^2 - \|x - \text{prox}_{(cg)}(x)\|^2 \\ &\quad - 2c [g(\text{prox}_{(cg)}(x)) - g(z)]. \end{aligned}$$

Định nghĩa 1.4. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của $\mathbb{H}$. Ánh xạ $F : C \rightarrow \mathbb{H}$ được gọi là

(a) γ -đơn điệu mạnh trên C nếu

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \gamma \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C;$$

(b) đơn điệu trên C nếu

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C;$$

(c) đơn điệu chặt trên C nếu

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle > 0, \quad \forall x, y \in C, x \neq y;$$

(d) giả đơn điệu trên C nếu

$$\langle F(y), x - y \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle F(x), x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C;$$

(e) β -đơn điệu mạnh ngược trên C nếu

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \beta \|F(x) - F(y)\|^2, \quad \forall x, y \in C;$$

(f) para-đơn điệu trên C nếu F đơn điệu trên C và

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle = 0 \Rightarrow F(x) = F(y), \quad \forall x, y \in C;$$

(g) *para-đơn điệu chặt* trên $S \subset C$ nếu F giả đơn điệu trên C và

$$\{x \in S, y \in C, \langle F(y), x - y \rangle = 0\} \Rightarrow y \in S;$$

(h) *L-liên tục Lipschitz* trên C nếu

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in C.$$

Định nghĩa 1.5. Cho $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là ánh xạ, điểm $x^0 \in \mathbb{H}$ được gọi là điểm bất động của S , nếu như $S(x^0) = x^0$. Tập tất cả các điểm bất động của S ký hiệu là $Fix(S)$:

$$Fix(S) = \{x \in \mathbb{H} : S(x) = x\}.$$

Định nghĩa 1.6. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của $\mathbb{H}$. Một ánh xạ $S : C \rightarrow C$ được gọi là:

(i) *ánh xạ co*, nếu tồn tại hằng số $\xi \in [0, 1)$ thỏa mãn

$$\|S(x) - S(y)\| \leq \xi\|x - y\|, \quad \forall x, y \in C;$$

(ii) *nửa co* với hằng số d , viết gọn là *d-nửa co*, nếu $Fix(S) \neq \emptyset$ và $d \in [0, 1)$ sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\|S(x) - x^*\|^2 \leq \|x - x^*\|^2 + d\|x - S(x)\|^2, \quad \forall x \in C, x^* \in Fix(S);$$

(iii) *tựa không giãn*, nếu $Fix(S) \neq \emptyset$ và

$$\|S(x) - x^*\| \leq \|x - x^*\|, \quad \forall x \in C, x^* \in Fix(S);$$

(iv) *nửa đóng tại 0*, nếu với mỗi $\{x^k\} \subset C$, ta có

$$\{x^k \rightharpoonup \hat{x}, \|S(x^k) - x^k\| \rightarrow 0\} \Rightarrow S(\hat{x}) = \hat{x}.$$

Định nghĩa 1.7. [13, Page 2] Cho dãy ánh xạ $\{S_i\}_{i \in I}$, $\Omega = \bigcap_{i \in I} Fix(S_i) \neq \emptyset$, được gọi là thỏa mãn điều kiện (Z), nếu với dãy $\{x^i\}$ bị chặn trong $\mathbb{H}$ mà

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|x^i - S_i x^i\| = 0,$$

thì mọi điểm tụ yếu của dãy $\{x^i\}$ đều thuộc miền Ω .

1.1.2 Bài toán bất đẳng thức biến phân

Định nghĩa 1.8. Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của $\mathbb{H}$ và ánh xạ $F : C \rightarrow \mathbb{H}$ thường được gọi là ánh xạ giá (trong một vài trường hợp, F đi từ $\mathbb{H}$ tới $\mathbb{H}$). Bài toán bất đẳng thức biến phân, ký hiệu là $VI(C, F)$, được cho dưới dạng:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C. \quad (1.1)$$

Mệnh đề 1.3. [35] Điểm $x^* \in C$ là một nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, F)$ khi và chỉ khi

$$x^* = \Pi_C [x^* - \lambda F(x^*)],$$

trong đó λ là hằng số dương bất kỳ.

Việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân liên quan tới việc giải bài toán đối ngẫu (ký hiệu là $DVI(C, F)$):

$$\text{Tìm } z^* \in C \text{ sao cho } \langle F(z), z - z^* \rangle \geq 0, \quad \forall z \in C.$$

Nghiệm của bài toán $VI(C, F)$ nếu tồn tại, cũng là nghiệm của bài toán $DVI(C, F)$.

Nhận xét 1.1. Cho C là một tập con lồi, compact và khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, ánh xạ $F : C \rightarrow \mathbb{H}$ là ánh xạ liên tục. Khi đó, bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, F)$ có nghiệm.

Khi miền ràng buộc C là không compact, định lý sau cho ta kết quả khác về sự tồn tại nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân.

Định lý 1.1. [46, Lemma 2.1] Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, ánh xạ $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là liên tục. Khi đó, bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, F)$ có nghiệm khi và chỉ khi tồn tại số thực $R > 0$ sao cho bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C \cap B(0, R), F)$ có một nghiệm z_R thỏa mãn $\|z_R\| < R$.

Định lý 1.2. [71, Lemma 2.3] Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, ánh xạ $F : C \rightarrow \mathbb{H}$ là liên tục và đơn điệu trên C . Khi đó, bài toán $VI(C, F)$ có tập nghiệm lồi và đóng.

Bổ đề sau chỉ ra tính duy nhất nghiệm của bất đẳng thức biến phân đơn điệu.

Bổ đề 1.4. [84, Proposition 2.7] *Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, ánh xạ $F : C \rightarrow \mathbb{H}$ là ánh xạ β -đơn điệu mạnh và L -liên tục Lipschitz. Khi đó, bài toán $VI(C, F)$ có duy nhất nghiệm.*

Định lý 1.3. [26, Theorem 2.1] *Cho C là một tập con lồi, đóng, bị chặn và khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, ánh xạ $F : C \rightarrow \mathbb{H}$ là giả đơn điệu và liên tục trên các không gian con hữu hạn chiều của $\mathbb{H}$. Khi đó, bài toán $VI(C, F)$ có nghiệm.*

1.1.3 Bài toán điểm bất động

Cho $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là một ánh xạ. Tập điểm bất động của S ký hiệu là $\text{Fix}(S)$.

Định lý 1.4. [69, Theorem 1.3] *Cho $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là một ánh xạ co. Khi đó tồn tại duy nhất $x^0 \in \mathbb{H}$ sao cho $S(x^0) = x^0$.*

Định lý 1.5. [43, Proposition 4.14] *Cho C là tập con đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ và ánh xạ $S : C \rightarrow \mathbb{H}$ là ánh xạ liên tục. Khi đó tập điểm bất động $\text{Fix}(S)$ là tập đóng.*

Định lý 1.6. [62, Proposition 2.1] *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ và ánh xạ $S : C \rightarrow C$ là ánh xạ β -nửa co. Khi đó tập điểm bất động $\text{Fix}(S)$ là tập lồi, đóng.*

1.1.4 Một số bổ đề cơ bản

Bổ đề 1.5. [60, Remark 4.2] *Cho $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là ánh xạ $\mathcal{K}$ -nửa co, $\text{Fix}(S) \neq \emptyset$ và $\alpha \in [0, 1 - \mathcal{K}]$. Khi đó,*

$$\|S_\alpha x - \bar{x}\|^2 \leq \|x - \bar{x}\|^2 - \alpha(1 - \mathcal{K} - \alpha)\|Sx - x\|^2, \quad \forall \bar{x} \in \text{Fix}(S), x \in \mathbb{H},$$

ở đây $S_\alpha = (1 - \alpha)Id + \alpha S$ và Id là ánh xạ đồng nhất.

Bổ đề 1.6. [70, Lemma 2.6] Cho $\{s_k\}$ là dãy số thực không âm và $\{p_k\}$ là dãy số thực. Cho $\{\alpha_k\}$ là một dãy số thực trong khoảng $(0, 1)$ sao cho $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$. Giả sử rằng

$$s_{k+1} \leq (1 - \alpha_k)s_k + \alpha_k p_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nếu mọi dãy con $\{s_{k_i}\}$ của $\{s_k\}$ mà

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} (s_{k_i+1} - s_{k_i}) \geq 0,$$

kéo theo $\limsup_{i \rightarrow \infty} p_{k_i} \leq 0$, thì khi đó $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$.

Cho $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận đối xứng, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ là một ma trận và các véc tơ $q \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Xét bài toán quy hoạch toàn phương:

$$\min \left\{ f(x) := \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle q, x \rangle : x \in C \right\}, \quad (1.2)$$

ở đây, $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$. Ta gọi $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ là điểm *Karush-Kuhn-Tucker* (viết tắt là điểm *KKT*) của bài toán quy hoạch toàn phương (1.2) nếu và chỉ nếu tồn tại véc tơ $\lambda \in \mathbb{R}^m$ sao cho

$$Q\bar{x} + q - \langle A, \lambda \rangle = 0, \quad A\bar{x} \geq b, \quad \lambda \geq 0, \quad \langle A\bar{x} - b, \lambda \rangle = 0.$$

Đặt $F(x) = Qx + q$, xét bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, F)$, ta có quan hệ giữa $Sol(C, F)$ và nghiệm của bài toán (1.2) được chỉ ra thông qua ba Bổ đề 1.7, 1.8, 1.9 như sau:

Bổ đề 1.7. [37, Page 834] Điểm $\hat{x} \in C$ là một điểm thuộc tập nghiệm $Sol(C, F)$ nếu và chỉ nếu nó là một điểm *KKT* của bài toán quy hoạch toàn phương (1.2).

Bổ đề 1.8. [58, Theorem 2.3] Cho $\rho > 0$ và $Sol(C, F) \neq \emptyset$. Khi đó, tồn tại hai số dương $\epsilon > 0$ và $\beta > 0$ sao cho

$$d(x, Sol(C, F)) \leq \beta \left\| x - \Pi_C \left[x - \frac{1}{\rho}(Qx + q) \right] \right\|,$$

với mọi $x \in C$ và

$$\left\| x - \Pi_C \left[x - \frac{1}{\rho}(Qx + q) \right] \right\| \leq \epsilon,$$

ở đây $d(x, Sol(C, F)) = \min\{\|x - y\| : y \in Sol(C, F)\}$.

Bổ đề 1.9. [58, Lemma 3.1] Cho $K_1, \dots, K_r$ là tất cả các thành phần liên thông của tập $Sol(C, F)$ của Bài toán (1.2). Khi đó, ta có các tính chất sau:

- (a) $Sol(C, F) = \cup_{i=1}^r K_i$;
- (b) với mỗi $i = 1, 2, \dots, r$, tập K_i là hợp hữu hạn của các tập lồi đa diện;
- (c) các tập K_i ($i = 1, \dots, r$) tách rời nhau, tức là, tồn tại $\delta > 0$ sao cho nếu $i \neq j$ thì $d(x, K_j) \geq \delta$ với mọi $x \in K_i$;
- (d) hàm f cho bởi (1.2) là hằng số trên mỗi tập K_i .

Bổ đề 1.10. [60, Remark 4.4] Cho dãy số thực không âm $\{a_k\}$. Giả sử với bất kỳ số tự nhiên m , tồn tại số tự nhiên p sao cho $p \geq m$ và $a_p \leq a_{p+1}$. Cho k_0 là một số tự nhiên thỏa mãn $a_{k_0} \leq a_{k_0+1}$, với mọi $k \geq k_0$, ta gọi

$$\tau(k) = \max\{i \in \mathbb{N} : k_0 \leq i \leq k, a_i \leq a_{i+1}\}.$$

Khi đó, $0 \leq a_k \leq a_{\tau(k)+1}$ với mọi $k \geq k_0$. Hơn nữa, dãy số $\{\tau(k)\}_{k \geq k_0}$ là không giảm và tiến đến $+\infty$ khi $k \rightarrow \infty$.

Bổ đề 1.11. [84, Lemma 3.1] Cho $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là ζ -đơn điệu mạnh và L -Liên tục Lipschitz. Khi đó, ánh xạ $S = Id - \xi F$ là δ -co với $\xi \in (0, \frac{2\zeta}{L^2})$, Id là ánh xạ đồng nhất và $\delta = \sqrt{1 - \xi(2\zeta - \xi L^2)}$. Hơn nữa,

$$\|[x - \alpha\eta F(x)] - [y - \alpha\eta F(y)]\| \leq (1 - \alpha\beta)\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{H},$$

ở đây $\alpha \in (0, 1)$, $\eta \in (0, \frac{2\zeta}{L^2})$, $\beta = 1 - \sqrt{1 - \eta(2\zeta - \eta L^2)} \in (0, 1)$.

1.2 Bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động

1.2.1 Phát biểu bài toán và ví dụ

Định nghĩa 1.9. Cho $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $\forall i \in I$ là một họ các ánh xạ và $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là ánh xạ giá. Đặt $\Omega = \bigcap_{i \in I} Fix(S_i)$. Bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, ký hiệu là $VIF(\Omega, F)$, tức là tìm $x^* \in \Omega$ sao cho

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Ví dụ 1.1. Cho họ ánh xạ $S_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} S_1(x) &= (x_1, \sin x_2, \tfrac{1}{2}x_3)^T, \\ S_i(x) &= (x_1, \tfrac{1}{2}x_2, \sin x_3)^T, \quad \forall i \geq 2. \end{aligned}$$

Cho các ma trận

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \\ K &= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Đặt $B = PP^T + H + K$ và gọi $F(x) = \alpha x + Bx + b$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Xét bài toán $VIF(\Omega, F)$ với tập điểm bất động $\Omega = \bigcap_{i \in I} \text{Fix}(S_i) = \{(x_1, 0, 0)^T : x_1 \in \mathbb{R}\}$ và ánh xạ giá F . Ta tính được

$$B = \begin{bmatrix} 20 & 11 & 5 \\ 13 & 16 & 3 \\ 1 & 7 & 15 \end{bmatrix}.$$

Theo [11], nếu $\alpha > \|B\|$, $L = \|\alpha I + B\|$ thì F là đơn điệu mạnh với hằng số $\beta = \alpha - \|B\|$ và L -liên tục Lipschitz. Ta có $\|B\| = 31,9762$, chọn $\alpha = 32$, khi đó, $\beta = 0,0238$ và $L = 63,98$. Rõ ràng, theo Bổ đề 1.4, bài toán $VIF(\Omega, F)$ có duy nhất nghiệm.

1.2.2 Một số trường hợp đặc biệt

a. Bài toán tối ưu lồi. Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ và họ ánh xạ $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $\forall i \in I$, sao cho $C = \Omega = \bigcap_{i \in I} \text{Fix}(S_i)$. Cho $\varphi : C \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi, khả vi. Ta xét bài toán tối ưu lồi, ký hiệu là $OP(C, \varphi)$, như sau:

$$\text{Tìm } \min\{\varphi(x) : x \in C\}.$$

Ta đặt $F(x) = \nabla\varphi(x)$, bài toán $VIF(\Omega, F)$ trở thành bài toán tìm $x^* \in C$,

sao cho

$$\langle \nabla \varphi(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Giả sử x^* là nghiệm của bài toán tối ưu lồi $OP(C, \varphi)$, ta suy ra

$$\varphi(x^* + t(x - x^*)) \geq \varphi(x^*), \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall x \in C,$$

tức là $\varphi(\cdot)$ đạt cực tiểu tại x^* . Với mọi $x \in C$, ta đặt

$\phi(t) = \varphi(x^* + t(x - x^*))$, $t \in [0, 1]$, rõ ràng, đạo hàm của $\phi(t)$ tại $t = 0$:

$$\phi'(0) \geq 0, \quad \forall x \in C,$$

hay

$$\langle \nabla \varphi(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Như vậy bài toán $OP(C, \varphi)$ là một trường hợp riêng của bài toán $VIF(\Omega, F)$.

b. Bài toán bất đẳng thức biến phân. Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ và họ ánh xạ $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $\forall i \in I$ thoả mãn $C = \Omega = \bigcap_{i \in I} \text{Fix}(S_i)$. Cho $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là ánh xạ giá. Bài toán $VIF(\Omega, F)$ trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, F)$:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

c. Bài toán điểm bất động chung. Cho họ ánh xạ $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $\forall i \in I$ và $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là ánh xạ giá. Bài toán tìm điểm bất động chung, ký hiệu là (CFP) , được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega = \bigcap_{i \in I} \text{Fix}(S_i).$$

Ta thấy nghiệm x^* của bài toán $VIF(\Omega, F)$ nằm trong tập Ω , do đó, nó chính là một nghiệm của bài toán (CFP) .

1.2.3 Mô hình xử lý ảnh

a) Bài toán phục hồi ảnh. Trong ảnh kỹ thuật số, một bức ảnh được hiểu là ma trận xếp liên tiếp các điểm ảnh, gọi là các Pixel, ở đó, chứa thông tin về ba màu cơ bản R, G, B. Một véc tơ cột của ma trận đó, có thể

gọi là véc tơ $x \in \mathbb{R}^n$. Giả sử x thuộc ảnh gốc chưa biết và $y \in \mathbb{R}^m$ thuộc bức ảnh bị làm mờ và đã biết, thoả mãn mô hình

$$y = Bx + \varepsilon, \quad (1.3)$$

ở đây, ma trận $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ là toán tử làm mờ, còn ε là nhiễu. Bài toán phục hồi ảnh là:

$$\text{Tìm } \hat{x} \in \mathbb{R}^n \text{ để } \hat{x} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \|Bx - y\|^2 \right\}, \quad (1.4)$$

$\hat{x}$ là tín hiệu ảnh gần đúng của x . Theo Hansen, P.C. và các cộng sự [38], ta thường gặp $\hat{x}$ có chuẩn rất lớn, nghiệm của bài toán phục hồi ảnh trở nên vô nghĩa. Để kiểm soát điều này, ta có hướng tiếp cận khác để phục hồi ảnh [33, 74, 77], đó là giải bài toán:

$$\text{Tìm } \hat{x} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} \|y - Bx\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \right\}, \quad (1.5)$$

ở đây λ là một số thực không âm, $\|\cdot\|_1$ là chuẩn 1 và chuẩn $\|\cdot\|_2$ là chuẩn Euclid.

b) *Vấn đề cực tiểu lồi.* Cho $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi, khả vi và ∇f_1 là hàm liên tục Lipchitz với hệ số L . Cho $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ là hàm lồi, nửa liên tục dưới. Xét bài toán tìm cực tiểu, ký hiệu là (MCP) , như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \arg \min \{f_1(x) + f_2(x), x \in \mathbb{R}^n\}. \quad (1.6)$$

Bài toán (1.6) là trường hợp tổng quát của bài toán phục hồi ảnh (1.5).

Mệnh đề 1.4. [25, Mệnh đề 3.1] *Cho $\text{prox}_{(cf_2)} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là ánh xạ gần kề, E là ma trận đơn vị cấp n và $c \geq 0$ là hằng số bất kỳ. Giả sử*

$$x^* = \text{prox}_{(cf_2)}(E - c\nabla f_1)(x^*), \quad (1.7)$$

khi đó, x^ là nghiệm của bài toán (1.6).*

Nhận xét 1.2. *Từ Mệnh đề 1.4, ta thấy nghiệm của bài toán (1.6) được tìm thông qua bài toán điểm bất động (1.7). Do đó các thuật toán tìm điểm bất động, tìm điểm bất động chung, giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động ... đều có thể áp dụng vào bài toán phục hồi ảnh.*

c) *Một số thuật toán phục hồi ảnh.* Trong phần này, chúng tôi nhắc lại một vài thuật toán để giải Bài toán 1.6.

Thuật toán 1.1. [57, Thuật toán phân chia tiến-lùi (FBSA)]

Bước 1. Chọn $x_1 \in \mathbb{R}^n$, dãy tham số $\{c_k\} \geq 0$.

Bước 2. Tính

$$x_{k+1} = \text{prox}_{(c_k f_2)}(E - c_k \nabla f_1)(x_k), \quad k \geq 1.$$

Bước 3. Đặt $k:=k+1$, quay lại Bước 2.

Định lý sau chỉ ra sự hội tụ của dãy lặp $\{x_k\}$ trong Thuật toán (1.1).

Định lý 1.7. [57] Với điều kiện dãy tham số $\{c_k\}$ thỏa mãn $0 \leq c_k \leq \frac{2}{L}$, ở đây L là hệ số Lipschitz trong bài toán (1.6), dãy số $\{x_k\}$ sinh bởi Thuật toán 1.1 hội tụ đến nghiệm x^* của bài toán (1.6).

Thuật toán 1.2. [18, Thuật toán co rút nhanh (FISTA)]

Bước 1. Chọn $x_1 = y_0 \in \mathbb{R}^n$, tham số $t_1 = 1$.

Bước 2. Tại bước lặp thứ $k \geq 1$, tính

$$\begin{cases} y_k = \text{prox}_{\frac{1}{L}f_2}(E - \frac{1}{L}\nabla f_1)(x_k), \\ t_{k+1} = \frac{1+\sqrt{1+4t_k^2}}{2}, \quad \theta_k = \frac{t_k-1}{t_{k+1}}, \\ x_{k+1} = y_k + \theta_k(y_k - y_{k-1}). \end{cases} \quad (1.8)$$

Bước 3. Đặt $k:=k+1$, quay lại Bước 2.

Định lý 1.8. [18] Dãy số $\{x_k\}$ sinh bởi Thuật toán 1.2 hội tụ đến nghiệm x^* của bài toán (1.6).

1.2.4 Một vài thuật toán thông dụng giải bài toán $VIF(\Omega, F)$

Trong thời gian gần đây, bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả [45], [82], [84], [90]. Sau đây, chúng tôi điểm qua một số thuật toán giải thông dụng có liên quan đến luận án.

a) Thuật toán lai ghép đường dốc của Yamada

Năm 2001, khi nghiên cứu mở rộng giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, Yamada, I. [84] xét bài toán $VIF(\Omega, F)$ với các giả thiết như sau:

(A1) Ánh xạ $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là ánh xạ không giãn, đặt $\Omega = \text{Fix}(S) \neq \emptyset$;

- (A2) $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là ánh xạ L -liên tục Lipschitz, β -đơn điệu mạnh trên $\mathbb{H}$;
 (A3) Các tham số μ và $\{\lambda_k\}$ thoả mãn

$$\begin{cases} \mu \in \left(0, \frac{2\beta}{L^2}\right), \\ \{\lambda_k\}_{k \geq 1} \subset (0, 1], \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0, \\ \sum_{k \geq 1} \lambda_k = +\infty, \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1}^2} = 0. \end{cases}$$

Thuật toán 1.3. [84, Thuật toán lai ghép đường dốc (HSDA)]

Bước 1. Chọn $x_0 \in \mathbb{H}$ bất kỳ, các tham số μ, λ_k thoả mãn (A3).

Bước 2. Tại bước lặp thứ $k, k = 1, 2, \dots$ tính

$$x_{k+1} = S(x_k) - [\lambda_{k+1}\mu F(S(x_k))].$$

Bước 3. Đặt $k := k + 1$, quay lại Bước 2.

Định lý 1.9. [84, Theorem 3.2] Với các điều kiện (A1), (A2) và (A3) được thoả mãn, dãy lặp $\{x_k\}$ tạo bởi Thuật toán 1.3 hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất x^* của bài toán $VIF(\Omega, F)$.

b) Thuật toán lai ghép độ dốc giảm dần

Phát triển từ kỹ thuật của Yamada, I. năm 2003, Xu, H.K. và cộng sự [82] đã giải bài toán $VIF(\Omega, F)$, trong trường hợp Ω là giao của họ hữu hạn các ánh xạ không giãn, với các giả thiết như sau:

- (B1) $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là một ánh xạ L -liên tục Lipschitz và β -đơn điệu mạnh;
 (B2) $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, i = 1, 2, \dots, N$ là họ N ánh xạ không giãn;
 (B3) Tập điểm bất động $\Omega = \bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(S_i) \neq \emptyset$.

Đặt ánh xạ $S_{[k]}^\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, sao cho

$$S_{[k]}^\lambda x = S_{[k]}x - \lambda\mu F(S_{[k]}x), x \in \mathbb{H},$$

ở đây, $[k] = k \bmod N, \lambda \in [0, 1], \mu > 0$.

Thuật toán 1.4. [82, Thuật toán lai ghép độ dốc giảm dần]

Bước 1. Chọn x_0 bất kỳ thuộc $\mathbb{H}$, các tham số $\lambda_k \in [0, 1], \mu > 0$.

Bước 2. Tại bước lặp thứ $k, k = 1, 2, \dots$ tính

$$x_{k+1} = S_{[k+1]}^{\lambda_{k+1}} x_k = S_{[k+1]} x_k - \lambda_{k+1} \mu F(S_{[k+1]} x_k), \quad k \geq 0. \quad (1.9)$$

Bước 3. Đặt $k := k + 1$, quay lại Bước 2.

Định lý 1.10. [82, Theorem 3.2] Với các giả thiết (B1), (B2), (B3) và dãy các tham số $\lambda_n \in [0, 1]$ thỏa mãn:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0;$$

$$ii) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty;$$

$$iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+N}} = 1 \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lambda_n - \lambda_{n+N})}{\lambda_{n+N}} = 0.$$

Khi đó với $\mu \in \left(0, \frac{2\beta}{L^2}\right)$ thì dãy lặp sinh bởi Thuật toán 1.4 sẽ hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất x^* của bài toán $VIF(\Omega, F)$.

Trong thuật toán này, Xu, H.K. và cộng sự đã mở rộng giải bài toán $VIF(\Omega, F)$ trên tập điểm bất động của một họ hữu hạn ánh xạ, là nghiên cứu tổng quát hơn của Yamada, I., tuy nhiên, các bước lặp phải tính toán xoay vòng và điều kiện đối với hệ tham số tương đối phức tạp, đó cũng là điểm hạn chế của thuật toán.

d) Thuật toán lai ghép độ dốc giảm dần cho họ vô hạn ánh xạ không giãn

Năm 2008, Iemoto, Sh. và cộng sự [45] mở rộng nghiên cứu bài toán $VIF(\Omega, F)$ trên tập $\Omega = \bigcap_{i=1}^{\infty} \text{Fix}(S_i)$ của họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn với các giả thiết như sau:

(C1) Họ ánh xạ $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $i = 1, 2, \dots$, là các ánh xạ không giãn.

(C2) Ánh xạ $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là α -đơn điệu mạnh ngược và L -liên tục Lipschitz.

(C3) Dãy các tham số thỏa mãn:

$$\begin{cases} 0 < a \leq \gamma_i \leq b < 1, \ a, b \in (0, 1), \ \forall i \in \mathbb{N}, \\ \{\lambda_k\} \in (0, 1), \ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = 0, \\ \rho \in \left(0, \frac{2\alpha}{L^2}\right). \end{cases}$$

Định nghĩa ánh xạ W_k như sau:

$$\begin{aligned}
 U_{k,k+1} &= I, \\
 U_{k,k} &= \gamma_k S_k U_{k,k+1} + (1 - \gamma_k) I, \\
 U_{k,k-1} &= \gamma_{k-1} S_{k-1} U_{k,k} + (1 - \gamma_{k-1}) I, \\
 &\dots \\
 U_{k,2} &= \gamma_2 S_2 U_{k,3} + (1 - \gamma_2) I, \\
 W_k &= U_{k,1} = \gamma_1 S_1 U_{k,2} + (1 - \gamma_1) I.
 \end{aligned}$$

Thuật toán 1.5. [45, Thuật toán lai ghép độ dốc giảm dần]

Bước 1. Chọn $x_1 \in \mathbb{H}$ bất kỳ, các tham số thỏa mãn (C3).

Bước 2. Tính $x_{k+1} = (I - \lambda_n \rho F) W_k x_k$.

Bước 3. Đặt $k := k + 1$, quay lại Bước 2.

Định lý 1.11. [45, Theorem 3.1] *Dưới các giả thiết (C1), (C2) và (C3), dãy lặp trong Thuật toán 1.5 hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất x^* của bài toán $VIF(\Omega, F)$.*

Ưu điểm trong thuật toán trên là mở rộng giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của vô hạn ánh xạ, tuy nhiên, điểm hạn chế là việc tính toán W_k là rất phức tạp, các bước lặp chưa thể tính toán song song.

Kết luận Chương 1

Chương 1 nhắc lại các khái niệm, kết quả cần thiết trong Giải tích hàm, Lý thuyết tối ưu trong một không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ như: Phép chiếu, ánh xạ đơn điệu, ... Tiếp sau đó, bài bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động, bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động $VIF(\Omega, F)$, các điều kiện tồn tại nghiệm và một số thuật toán thông dụng được trình bày trong chương này.

Chương 2

Các kỹ thuật quán tính

Khi nghiên cứu mở rộng bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, F)$, Yamada, I. [84] đã thay thế miền ràng buộc C bằng tập điểm bất động của một ánh xạ, nghiệm của bài toán được tìm thông qua thuật toán lai ghép đường dốc (*HSDA*). Từ phương pháp này, chúng tôi đề xuất thuật toán (*HICA*) giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động $VIF(\Omega, F)$, thuật toán là sự kết hợp giữa kỹ thuật quán tính và phương pháp lai ghép. Kết quả hội tụ mạnh được chứng minh trong một không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Thuật toán (*PIPA*) là sự kết hợp giữa kỹ thuật tính toán song song với kỹ thuật quán tính để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động $VIF(\Omega, F)$, ở đây Ω là giao các tập điểm bất động của các ánh xạ nửa co $\Omega = \bigcap_{i \in J} \text{Fix} S_i$, $J = \{1, 2, \dots, m\}$. Phần cuối chỉ ra các tính toán minh họa, các ứng dụng trong mô hình xử lý ảnh và các so sánh với một vài thuật toán thông dụng.

Nội dung chương này được viết dựa trên hai bài báo [CT1] và [CT3] (Danh mục công trình có liên quan đến luận án).

2.1 Kỹ thuật lai ghép co quán tính

2.1.1 Thuật toán (*HICA*)

Cho $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là ánh xạ giá và họ ánh xạ $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $\forall i \in I$ thỏa mãn các giả thiết sau:

(A_1) Ánh xạ F là β -đơn điệu mạnh và L -liên tục Lipschitz;

(A₂) Với mỗi $i \in I$, S_i là ξ_i -nửa co, thỏa mãn điều kiện (Z) và

$$\Omega := \bigcap_{i \in I} \text{Fix}(S_i) \neq \emptyset;$$

(A₃) Với mọi $k \geq 0$, các tham số dương β_k , γ_k , τ_k , λ_k và μ_k thỏa mãn

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < c_1 \leq \beta_k \leq c_2 < 1, \mu_k \leq \eta, \\ \alpha_k \in (0, 1 - \xi_k], \inf_k \alpha_k > 0, \\ 0 < \gamma_k < 1, \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0, \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau_k}{\gamma_k} = 0, \lambda_k \in \left(\frac{\beta}{L^2}, \frac{2\beta}{L^2} \right), a \in (0, 1), \\ \sqrt{1 - 2\lambda_k \beta + \lambda_k^2 L^2} < 1 - a. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Thuật toán 2.1. *Thuật toán lai ghép co quán tính (HICA)*

Khởi đầu: Cho $x^0, x^1 \in \mathbb{H}$ bất kỳ. Tại bước lặp thứ k , $k = 1, 2, \dots$

Bước 1. Tính hệ số quán tính

$$\theta_k = \begin{cases} \min \left\{ \mu_k, \frac{\tau_k}{\|x^k - x^{k-1}\|} \right\} & \text{nếu } \|x^k - x^{k-1}\| \neq 0, \\ \mu_k & \text{trường hợp còn lại,} \end{cases} \quad (2.2)$$

Bước 2. Tính

$$\left\{ \begin{array}{l} w^k = x^k + \theta_k(x^k - x^{k-1}), \\ \bar{S}_k w^k = (1 - \alpha_k)w^k + \alpha_k S_k w^k, \\ z^k = (1 - \gamma_k)\bar{S}_k w^k + \gamma_k [w^k - \lambda_k F(w^k)], \\ \bar{S}_k z^k = (1 - \alpha_k)z^k + \alpha_k S_k z^k, \\ x^{k+1} = (1 - \beta_k)\bar{S}_k w^k + \beta_k \bar{S}_k z^k. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Bước 3. Đặt $k := k + 1$ và quay lại Bước 1.

2.1.2 Định lý hội tụ

Định lý 2.1. *Giả sử rằng các giả thiết (A₁), (A₂) và (A₃) được thỏa mãn. Khi đó, dãy lặp $\{x^k\}$ cho bởi Thuật toán 2.1 hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x^* của bài toán $VIF(\Omega, F)$.*

Chứng minh. Từ giả thiết F là β -đơn điệu mạnh và L -liên tục Lipschitz trên $\mathbb{H}$, với mỗi $\lambda_k > 0$, ta có:

$$\begin{aligned}
& \| [w^k - \lambda_k F(w^k)] - [x^* - \lambda_k F(x^*)] \|^2 \\
&= \|w^k - x^*\|^2 - 2\lambda_k \langle F(w^k) - F(x^*), w^k - x^* \rangle \\
&\quad + \lambda_k^2 \|F(w^k) - F(x^*)\|^2 \\
&\leq \|w^k - x^*\|^2 - 2\lambda_k \beta \|w^k - x^*\|^2 + \lambda_k^2 L^2 \|w^k - x^*\|^2 \\
&= (1 - 2\lambda_k \beta + \lambda_k^2 L^2) \|w^k - x^*\|^2.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Từ giả thiết F là đơn điệu mạnh và $\Omega \neq \emptyset$, nên theo Bổ đề 1.4, bài toán $VIF(\Omega, F)$ có duy nhất nghiệm $x^* \in \Omega$, hiển nhiên, $x^* \in \text{Fix}(S_k)$, kết hợp Bổ đề 1.5, ta có

$$\begin{aligned}
\|\bar{S}_k w^k - x^*\|^2 &\leq \|w^k - x^*\|^2 \\
&\quad - \alpha_k (1 - \xi_k - \alpha_k) \|S_k w^k - w^k\|^2 \\
&\leq \|w^k - x^*\|^2,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

kết hợp với (2.3) và (2.4), ta được

$$\begin{aligned}
\|z^k - x^*\| &= \|(1 - \gamma_k) \bar{S}_k w^k + \gamma_k [w^k - \lambda_k F(w^k)] - x^*\| \\
&\leq \gamma_k \| [w^k - \lambda_k F(w^k)] - x^* \| + (1 - \gamma_k) \|\bar{S}_k w^k - x^*\| \\
&\leq \gamma_k \| [w^k - \lambda_k F(w^k)] - [x^* - \lambda_k F(x^*)] \| \\
&\quad + \gamma_k \lambda_k \|F(x^*)\| + (1 - \gamma_k) \|\bar{S}_k w^k - x^*\| \\
&\leq \gamma_k \sqrt{1 - 2\lambda_k \beta + \lambda_k^2 L^2} \|w^k - x^*\| \\
&\quad + \gamma_k \lambda_k \|F(x^*)\| + (1 - \gamma_k) \|w^k - x^*\| \\
&= [1 - \gamma_k (1 - \delta_k)] \|w^k - x^*\| + \gamma_k \lambda_k \|F(x^*)\|,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

ở đây, $\delta_k := \sqrt{1 - 2\lambda_k \beta + \lambda_k^2 L^2} \in (0, 1 - a)$.

Bằng cách tương tự (2.5), ta có:

$$\begin{aligned}
\|\bar{S}_k z^k - x^*\|^2 &\leq \|z^k - x^*\|^2 \\
&\quad - \alpha_k (1 - \xi_k - \alpha_k) \|S_k z^k - z^k\|^2 \\
&\leq \|z^k - x^*\|^2.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều này với (2.6) và (2.1), ta được:

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\| &= \|(1 - \beta_k)\bar{S}_k w^k + \beta_k \bar{S}_k z^k - x^*\| \\
&\leq (1 - \beta_k)\|\bar{S}_k w^k - x^*\| + \beta_k\|\bar{S}_k z^k - x^*\| \\
&\leq (1 - \beta_k)\|w^k - x^*\| + \beta_k\|z^k - x^*\| \\
&\leq [1 - \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k)]\|w^k - x^*\| + \beta_k \gamma_k \lambda_k \|F(x^*)\| \\
&\leq [1 - \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k)] (\|x^k - x^*\| + \theta_k \|x^k - x^{k-1}\|) \\
&\quad + \beta_k \gamma_k \frac{2\beta \|F(x^*)\|}{L^2} \\
&\leq [1 - \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k)]\|x^k - x^*\| \\
&\quad + \beta_k \gamma_k \left(\frac{\theta_k}{\beta_k \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| + \frac{2\beta \|F(x^*)\|}{L^2} \right) \\
&\leq [1 - \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k)]\|x^k - x^*\| \\
&\quad + \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k) \left(\frac{\theta_k}{a\beta_k \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| + \frac{2\beta \|F(x^*)\|}{aL^2} \right).
\end{aligned}$$

Từ Bước 1 và điều kiện (2.1), ta suy ra

$$0 \leq \frac{\theta_k}{\beta_k \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| \leq \frac{\tau_k}{c_1 \gamma_k} \rightarrow 0 \quad \text{khi } k \rightarrow \infty,$$

suy ra $M := \sup_k \left\{ \frac{\theta_k}{a\beta_k \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| + \frac{2\beta \|F(x^*)\|}{aL^2} \right\} < +\infty$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\| &\leq [1 - \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k)]\|x^k - x^*\| + \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k) M \\
&\leq \max \{ \|x^k - x^*\|, M \}.
\end{aligned}$$

Theo quy nạp, suy ra

$$\|x^k - x^*\| \leq \max \{ \|x^1 - x^*\|, M \}, \quad \forall k \geq 1.$$

Vì vậy, dãy $\{x^k\}$ bị chặn. Từ (2.3), ta được

$$\|w^k - x^k\| = \theta_k \|x^k - x^{k-1}\| < +\infty.$$

Sử dụng (2.6), ta cũng có các dãy $\{z^k\}$ và $\{w^k\}$ cùng bị chặn. Từ (2.4) và bất đẳng thức sau

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x + y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{H},$$

ta có

$$\begin{aligned}
& 2\|z^k - x^*\|^2 \\
&= \|(1 - \gamma_k)(\bar{S}_k w^k - x^*) + \gamma_k[w^k - \lambda_k F(w^k) - (x^* - \lambda_k F(x^*))] - \gamma_k \lambda_k F(x^*)\|^2 \\
&\leq \|(1 - \gamma_k)(\bar{S}_k w^k - x^*) + \gamma_k[w^k - \lambda_k F(w^k) - (x^* - \lambda_k F(x^*))]\|^2 \\
&\quad - 2\gamma_k \lambda_k \langle F(x^*), z^k - x^* \rangle \\
&\leq (1 - \gamma_k)\|\bar{S}_k w^k - x^*\|^2 + \gamma_k\|w^k - \lambda_k F(w^k) - (x^* - \lambda_k F(x^*))\|^2 \\
&\quad - 2\gamma_k \lambda_k \langle F(x^*), z^k - x^* \rangle \\
&\leq (1 - \gamma_k)\|w^k - x^*\|^2 + \gamma_k \delta_k^2 \|w^k - x^*\|^2 - 2\gamma_k \lambda_k \langle F(x^*), z^k - x^* \rangle \\
&\leq [1 - \gamma_k(1 - \delta_k^2)] \|w^k - x^*\|^2 - 2\gamma_k \lambda_k \langle F(x^*), z^k - x^* \rangle. \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Từ $w^k = x^k + \theta_k(x^k - x^{k-1})$, ta biến đổi

$$\begin{aligned}
\|w^k - x^*\|^2 &= \|x^k - x^*\|^2 + \theta_k^2 \|x^k - x^{k-1}\|^2 + 2\theta_k \langle x^k - x^*, x^k - x^{k-1} \rangle \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 + \theta_k^2 \|x^k - x^{k-1}\|^2 + 2\theta_k \|x^k - x^*\| \|x^k - x^{k-1}\|. \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Từ Bổ đề 1.5 với $x^* \in \text{Fix}(S_k)$, (2.7), (2.8) và $x^{k+1} = (1 - \beta_k)\bar{S}_k w^k + \beta_k \bar{S}_k z^k$, ta thu được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|(1 - \beta_k)(\bar{S}_k w^k - x^*) + \beta_k(\bar{S}_k z^k - x^*)\|^2 \\
&= (1 - \beta_k)\|\bar{S}_k w^k - x^*\|^2 + \beta_k\|\bar{S}_k z^k - x^*\|^2 \\
&\quad - \beta_k(1 - \beta_k)\|\bar{S}_k w^k - \bar{S}_k z^k\|^2 \\
&\leq (1 - \beta_k)\|w^k - x^*\|^2 + \beta_k\|z^k - x^*\|^2 \\
&\quad - \beta_k(1 - \beta_k)\|\bar{S}_k w^k - \bar{S}_k z^k\|^2 \\
&\leq (1 - \beta_k)\|w^k - x^*\|^2 + \beta_k[1 - \gamma_k(1 - \delta_k^2)]\|w^k - x^*\|^2 \\
&\quad - 2\beta_k \gamma_k \lambda_k \langle F(x^*), z^k - x^* \rangle - \beta_k(1 - \beta_k)\|\bar{S}_k w^k - \bar{S}_k z^k\|^2 \\
&= [1 - \beta_k \gamma_k(1 - \delta_k^2)]\|w^k - x^*\|^2 - 2\beta_k \gamma_k \lambda_k \langle F(x^*), z^k - x^* \rangle \\
&\quad - \beta_k(1 - \beta_k)\|\bar{S}_k w^k - \bar{S}_k z^k\|^2 \\
&\leq [1 - \beta_k \gamma_k(1 - \delta_k^2)]\|x^k - x^*\|^2 + \theta_k^2 \|x^k - x^{k-1}\|^2 \\
&\quad + 2\theta_k \|x^k - x^*\| \|x^k - x^{k-1}\| \\
&\quad - 2\beta_k \gamma_k \lambda_k \langle F(x^*), z^k - x^* \rangle - \beta_k(1 - \beta_k)\|\bar{S}_k w^k - \bar{S}_k z^k\|^2 \\
&\leq [1 - \beta_k \gamma_k(1 - \delta_k^2)]\|x^k - x^*\|^2 - \beta_k(1 - \beta_k)\|\bar{S}_k w^k - \bar{S}_k z^k\|^2
\end{aligned}$$

$$+ \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k^2) \sigma_k,$$

ở đây

$$\begin{aligned} \sigma_k &:= \frac{1}{1 - \delta_k^2} \left\{ \frac{\theta_k^2}{\beta_k \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\|^2 + \frac{2\theta_k}{\beta_k \gamma_k} \|x^k - x^*\| \|x^k - x^{k-1}\| \right. \\ &\quad \left. - 2\lambda_k \langle F(x^*), z^k - x^* \rangle \right\} \\ &\leq \frac{1}{a(2-a)} \left\{ -2\lambda_k \langle F(x^*), z^k - x^* \rangle + \left(\frac{\theta_k}{c_1 \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| \right) \theta_k \|x^k - x^{k-1}\| \right. \\ &\quad \left. + 2\|x^k - x^*\| \left(\frac{\theta_k}{c_1 \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| \right) \right\}. \end{aligned}$$

Từ $\{x^k\}$ bị chặn, ta có $\sup_k \sigma_k < +\infty$, suy ra

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq [1 - \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k^2)] \|x^k - x^*\|^2 \\ &\quad - \beta_k (1 - \beta_k) \|\bar{S}_k w^k - \bar{S}_k z^k\|^2 + \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k^2) \sigma_k. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Bây giờ áp dụng Bổ đề 1.6 cho dãy $s_k := \|x^k - x^*\|^2$, $\alpha_k := \beta_k \gamma_k (1 - \delta_k^2) \in (0, 1)$ và $p_k := \sigma_k$, theo bất đẳng thức (2.9), ta có

$$s_{k+1} \leq (1 - \alpha_k) s_k + \alpha_k p_k.$$

Giả sử rằng $\{s_{k_i}\}$ là một dãy con bất kỳ của dãy $\{s_k\}$ thỏa mãn

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} (s_{k_i+1} - s_{k_i}) \geq 0.$$

Khi đó, sử dụng điều kiện (2.1) và (2.9), ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq c_1 (1 - c_2) \limsup_{i \rightarrow \infty} \|\bar{S}_{k_i} w^{k_i} - \bar{S}_{k_i} z^{k_i}\|^2 \\ &\leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \beta_{k_i} (1 - \beta_{k_i}) \|\bar{S}_{k_i} w^{k_i} - \bar{S}_{k_i} z^{k_i}\|^2 \\ &\leq \limsup_{i \rightarrow \infty} [s_{k_i} - s_{k_i+1} + \beta_{k_i} \gamma_{k_i} (1 - \delta_{k_i}^2) \sigma_{k_i}] \\ &= \limsup_{i \rightarrow \infty} (s_{k_i} - s_{k_i+1}) \\ &= -\liminf_{i \rightarrow \infty} (s_{k_i+1} - s_{k_i}) \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

do đó,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\bar{S}_{k_i} w^{k_i} - \bar{S}_{k_i} z^{k_i}\| = 0. \quad (2.10)$$

Từ (2.3), ta suy ra

$$\|z^k - \bar{S}_k w^k\| = \gamma_k \|w^k - \lambda_k F(w^k) - \bar{S}_k w^k\|,$$

và ta có

$$\|z^{k_i} - \bar{S}_{k_i} w^{k_i}\| = \gamma_{k_i} \|w^{k_i} - \lambda_{k_i} F(w^{k_i}) - \bar{S}_{k_i} w^{k_i}\|.$$

Từ $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0$, ta có

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|z^{k_i} - \bar{S}_{k_i} w^{k_i}\| = 0. \quad (2.11)$$

Từ $\bar{S}_{k_i} z^{k_i} = (1 - \alpha_{k_i}) z^{k_i} + \alpha_{k_i} S_{k_i} z^{k_i}$, (2.10) và (2.11), ta có

$$\begin{aligned} \alpha_{k_i} \|z^{k_i} - S_{k_i} z^{k_i}\| &= \|z^{k_i} - \bar{S}_{k_i} z^{k_i}\| \\ &\leq \|z^{k_i} - \bar{S}_{k_i} w^{k_i}\| + \|\bar{S}_{k_i} w^{k_i} - \bar{S}_{k_i} z^{k_i}\| \\ &\rightarrow 0, \quad \text{khi } i \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Từ (2.12), giả thiết $\inf_k \alpha_k > 0$ dẫn đến

$$\|z^{k_i} - S_{k_i} z^{k_i}\| \rightarrow 0, \quad \text{khi } i \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

Bây giờ ta chỉ ra $\limsup_{i \rightarrow \infty} p_{k_i} \leq 0$. Từ điều kiện (2.1), ta có

$$p_k = \sigma_k$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{a(2-a)} \left\{ -2\lambda_k \langle F(x^*), z^k - x^* \rangle + \left(\frac{\theta_k}{c_1 \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| \right) \theta_k \|x^k - x^{k-1}\| \right. \\ &\quad \left. + 2\|x^k - x^*\| \left(\frac{\theta_k}{c_1 \gamma_k} \|x^k - x^{k-1}\| \right) \right\} \\ &\leq \frac{1}{a(2-a)} \left\{ -2\lambda_k \langle F(x^*), z^k - x^* \rangle + \frac{\tau_k}{\gamma_k} \left(\frac{\mu_k \|x^k - x^{k-1}\|}{c_1} + \frac{2\|x^k - x^*\|}{c_1} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Từ $\lambda_k \in (\frac{\beta}{L^2}, \frac{2\beta}{L^2})$, tính bị chặn của dãy $\{x^k\}$ và $\{\mu_k\}$, ta suy ra nếu

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^* - z^{k_i} \rangle \leq 0,$$

thì

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} p_{k_i} \leq 0.$$

Từ $\{z^k\}$ bị chặn, không mất tính tổng quát, ta giả sử tồn tại một dãy con $\{\bar{z}^{k_i}\}$ của dãy số $\{z^{k_i}\}$ sao cho $\bar{z}^{k_i} \rightharpoonup \bar{x}$ và

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^* - z^{k_i} \rangle = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^* - \bar{z}^{k_i} \rangle.$$

Sử dụng (2.13) và từ điều kiện (Z) của dãy các ánh xạ $\{S_i\}_{i \in I}$, suy ra $\bar{x} \in \Omega$, do đó,

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^* - z^{k_i} \rangle = \langle F(x^*), x^* - \bar{x} \rangle \leq 0.$$

Theo Bổ đề 1.6, ta kết luận $x^k \rightarrow x^*$ khi $k \rightarrow \infty$. Điều phải chứng minh. $\square$

2.1.3 Các ví dụ tính toán

Bây giờ, chúng tôi trình bày một số ví dụ tính toán trên máy tính để minh họa cho sự hội tụ của thuật toán (*HICA*) và so sánh với hai thuật toán: Thuật toán chiếu song song (*PPA*) [9] và thuật toán lai ghép đường dốc (*HSDA*) [83].

Ví dụ 2.1. Cho $\mathbb{H} = l_2$, họ các ánh xạ $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $i \in I = \{1, 2, \dots\}$ và $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ được cho như sau,

$$\begin{aligned} l_2 &:= \left\{ x = (x_1, x_2, \dots)^\top : \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty \right\}, \\ F(x) &:= (2x_1, x_2, 2x_3, \dots, 2x_{2i-1}, x_{2i}, \dots)^\top \in \mathbb{H}, \\ S_1 x &:= x, \\ S_i x &:= \{y \in \mathbb{H} : y_{2j} = x_{2j}, x_{2j-1} = 0, \quad \forall j \geq 2\}, \quad \forall i \geq 2. \end{aligned}$$

Khi đó, với mỗi $k \in I$, S_k là 0-nửa co, F là 1-đơn điệu mạnh và 2-liên tục Lipschitz. Dễ thấy, tập điểm bất động chung của họ các ánh xạ S_k như sau:

$$\begin{aligned} \Omega &= \bigcap_{k \in I} \text{Fix}(S_k) \\ &= \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{2i-1}, x_{2i}, \dots)^\top \in \mathbb{H} : x_{2i-1} = 0, \quad \forall i \geq 1\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Chọn $\mu_k = 1, \beta_k = \frac{1}{2}, \gamma_k = \tau_k = \frac{1}{k+1}, \lambda_k = \frac{3}{10}, \alpha_k = \frac{1}{2} \in (0, 1 - \xi_k]$ với $\xi_k = 0$, và do đó $\sqrt{1 - 2\lambda_k\beta + \lambda_k^2 L^2} = \frac{\sqrt{19}}{5} \in (0, 1)$. Chọn bất kỳ dãy $\{x^k := (x_1^k, x_2^k, \dots)^\top\}$ sao cho $\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k x^k - x^k\| = 0$, ta có

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k x^k - x^k\| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_1^k, 0, x_3^k, 0, \dots, x_{2i-1}^k, 0, \dots)^\top\| \end{aligned}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(x_1^k)^2 + (x_3^k)^2 + \dots + (x_{2i-1}^k)^2 + \dots}.$$

Từ điều này, dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh đến một điểm trên Ω , do đó, họ ánh xạ $\{S_i\}_{i \in I}$ thỏa mãn điều kiện (Z). Vì vậy, các giả thiết $(A_1), (A_2), (A_3)$ và điều kiện (Z) thỏa mãn. Chọn $x^0, x^1 \in \mathbb{H}$, từ thuật toán (HICA), với mỗi $k \geq 1$, ta có:

$$\theta_k = \min \left\{ 1, \frac{1}{(k+1)\|x^k - x^{k-1}\|} \right\} \text{ nếu } \|x^k - x^{k-1}\| = 0, \text{ ngược lại } \theta_k = 0,$$

$$w^k = x^k + \theta_k(x^k - x^{k-1}),$$

$$z^1 = (1 - \gamma_1)\bar{S}_1 w^1 + \gamma_1[w^1 - \lambda_1 A(w^1)]$$

$$= (1 - \gamma_1)\bar{S}_1 w^1 + \gamma_1[w^1 - \lambda_1 A(w^1)]$$

$$= \frac{1}{2}\bar{S}_1 w^1 + \frac{1}{2} \left[w^1 - \frac{1}{2}A(w^1) \right]$$

$$= \left(\frac{7}{10}w_1^1, \frac{17}{20}w_2^1, \dots, \frac{7}{10}w_{2i-1}^1, \frac{17}{20}w_{2i}^1, \dots \right)^\top,$$

$$z^k = (1 - \gamma_k)\bar{S}_k w^k + \gamma_k[w^k - \lambda_k A(w^k)]$$

$$= \frac{k}{k+1} \left(\frac{1}{2}w_1^k, w_2^k, \frac{1}{2}w_3^k, w_4^k, \dots \right)^\top$$

$$+ \frac{1}{k+1} \left[w^k - \frac{3}{10} (2w_1^k, w_2^k, 2w_3^k, w_4^k, \dots)^\top \right]$$

$$= \left(\frac{4-k}{10(k+1)}w_1^k, \frac{7}{10}w_2^k, \dots, \frac{4-k}{10(k+1)}w_{2i-1}^k, \frac{7}{10}w_{2i}^k, \dots \right)^\top, \quad \forall k \geq 2,$$

và

$$x^2 = (1 - \beta_1)\bar{S}_1 w^1 + \beta_1 \bar{S}_1 z^1$$

$$= \frac{1}{2}z^1 + \frac{1}{2}\bar{S}_1 z^1,$$

$$x^{k+1} = (1 - \beta_k)\bar{S}_k w^k + \beta_k \bar{S}_k z^k$$

$$= \frac{1}{2}z^k + \frac{1}{2}\bar{S}_k z^k$$

$$= \left(\frac{4-k}{20(k+1)}w_1^k, \frac{7}{10}w_2^k, \dots, \frac{4-k}{20(k+1)}w_{2i-1}^k, \frac{7}{10}w_{2i}^k, \dots \right)^\top, \quad \forall k \geq 2.$$

Ví dụ 2.2. Ta chọn $\mathbb{H} = \mathbb{R}^5$, Họ các ánh xạ $S_i : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5 (i = 1, 2, \dots)$

được cho như sau: với mỗi $x = (x_1, x_2, \dots, x_5)^\top \in \mathbb{R}^5$,

$$S_1 x = \left(x_1, \sin x_2, \frac{1}{3}x_3, x_4, \sin^3 x_5 \right)^\top,$$

$$S_k x = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \sin x_3, \sin^2 x_4, \frac{1}{4}x_5 \right)^\top, \quad \forall k \geq 2.$$

Ánh xạ giá $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ được cho như sau $F(x) = sx + Qx + q$, ở đây P là ma trận cỡ 5×5 , H là ma trận đối xứng cỡ 5×5 , K là ma trận đường chéo cỡ 5×5 , $Q = PP^\top + H + K$ sử dụng trong [5, 11] và $\|Q\| < s \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^n$.

Khi đó, dễ thấy A là ánh xạ đơn điệu mạnh với hằng số $\beta := s - \|Q\|$ và liên tục Lipschitz với hằng số $L := \|sE + Q\|$ trong đó E là ma trận đơn vị, họ ánh xạ $S_k (k \geq 1)$ là 0–nửa co. Tập điểm bất động chung của họ các ánh xạ $\{S_k\}$ được tính toán như sau:

$$\Omega = \{(x_1, 0, 0, 0, 0)^\top : x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Giả sử rằng dãy $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^5$ thỏa mãn $\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k(x^k) - x^k\| = 0$. Khi đó,

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|S_k(x^k) - x^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \left(0, \frac{1}{2}x_2^k, x_3^k - \sin x_3^k, x_4^k - \sin^2 x_4^k, \frac{3}{4}x_5^k \right)^\top \right\| = 0,$$

và do đó $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = 0$ với mọi $i = 2, 3, 4, 5$. Vì vậy, họ các ánh xạ $\{S_i\}_{(i=1,2,\dots)}$ thỏa mãn điều kiện (Z).

Thử nghiệm 1. Các ma trận P, H, K và véc tơ q được chọn ngẫu nhiên như sau:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

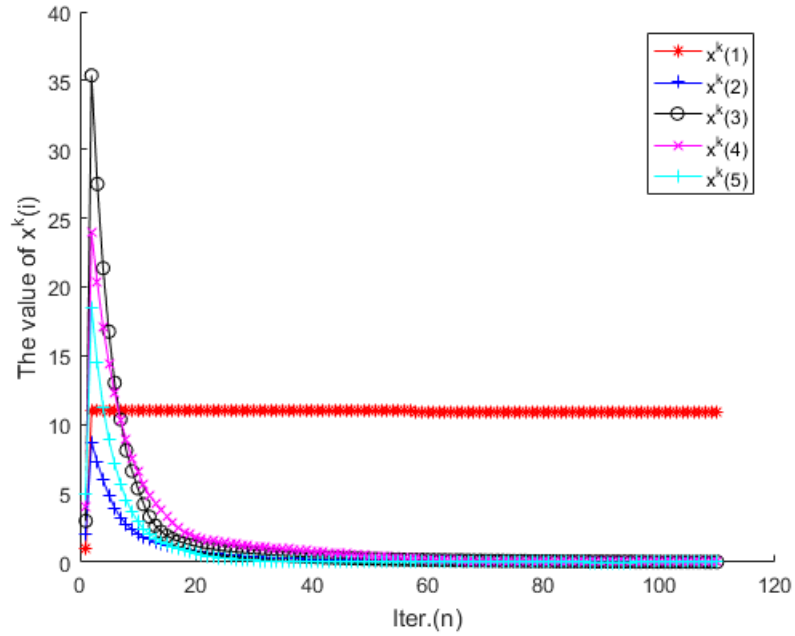
$$K = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Cho $s = 80$, khi đó, chúng ta có $\|Q\| \simeq 78.2072$, F là β -đơn điệu mạnh và L -liên tục Lipschitz, ở đây $\beta = s - \|Q\| \simeq 80 - 78.2072 = 1.7928$, $L = \|sE + Q\| \simeq 158.1860$. Với mỗi $k \geq 1$, chọn các tham số như sau:

$$\mu_k = 10, \gamma_k = \frac{1}{k+3}, \tau_k = \frac{1}{k^2+1}, \alpha_k = 0.1 + \frac{1}{k+10},$$

$$\lambda_k = 0.0001 \in (6.8644e-05, 1.3729e-04) = \left(\frac{\beta}{L^2}, \frac{2\beta}{L^2} \right), \beta_k = 0.5 + \frac{1}{2k+9}.$$

Dãy các tham số thỏa mãn điều kiện (2.1) và kết quả tính toán số của thuật toán (*HICA*) trong Hình 2.1 và Bảng 2.1. Như thường lệ, ta gọi sai số là ϵ -nghiệm, nếu như $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$. Bảng 2.1 trình bày kết quả giải



Hình 2.1: Thuật toán 2.1 với $x^0 = (1, 2, 3, 4, 5)^\top$, $x^1 = (0, 1, -1, 2, 3)^\top$, sai số $\epsilon = 10^{-3}$.

số của thuật toán (*HICA*) với 10 tham số khác nhau.

Bảng 2.2 trình bày kết quả giải số của thuật toán (*HICA*) với các điểm xuất phát khác nhau.

Thử nghiệm 2. So sánh thuật toán (*HICA*) với thuật toán (*PPA*) và thuật toán (*HSDA*). Điều kiện dừng của các thuật toán là $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$. Chọn ngẫu nhiên $x^0 = (1, 2, 3, 4, 5)^\top$, $x^1 = (0, 0, 0, 0, 0)^\top$. Tất cả các ma trận P, H , và K được chọn ngẫu nhiên. Các kết quả so sánh được trình

Case	μ_k	γ_k	τ_k	α_k	λ_k	β_k	No. Iter.	CPU times
1	10	$\frac{1}{k+3}$	$\frac{1}{k^2+1}$	$0.10 + \frac{1}{k+10}$	0.00010	$0.5 + \frac{1}{2k+9}$	109	0.0012
2	15	$\frac{1}{2k+3}$	$\frac{1}{k^2+10}$	$0.15 + \frac{1}{k+10}$	0.00012	$0.5 + \frac{1}{2k+7}$	112	0.0625
3	25	$\frac{1}{3k+10}$	$\frac{1}{k^2+10}$	$0.15 + \frac{1}{k+10}$	0.00012	$0.5 + \frac{1}{2k+7}$	120	0.0313
4	25	$\frac{1}{3k+10}$	$\frac{1}{2k^2+10}$	$0.15 + \frac{1}{3k+10}$	0.00012	$0.5 + \frac{1}{2k+7}$	121	0.0469
5	25	$\frac{1}{3k+10}$	$\frac{1}{2k^2+10}$	$0.16 + \frac{1}{k+1}$	0.00010	$0.7 + \frac{1}{5k+2}$	116	0.0156
6	2	$\frac{1}{10k+1}$	$\frac{1}{2k^2+10}$	$0.16 + \frac{1}{k+1}$	0.00010	$0.7 + \frac{1}{5k+2}$	92	0.0469
7	20	$\frac{1}{10k+1}$	$\frac{1}{2k^2+10}$	$0.16 + \frac{1}{k+1}$	0.00019	$0.7 + \frac{1}{5k+2}$	111	0.0156
8	50	$\frac{1}{10k+1}$	$\frac{1}{2k^2+10}$	$0.10 + \frac{1}{k+100}$	0.00019	$0.7 + \frac{1}{5k+2}$	156	0.0313
9	70	$\frac{1}{k+1}$	$\frac{1}{k^2+10}$	$0.10 + \frac{1}{k+100}$	0.00019	$0.7 + \frac{1}{5k+2}$	206	0.0469
10	100	$\frac{1}{k+10}$	$\frac{1}{2k^2+15}$	$0.17 + \frac{1}{k+16}$	0.00014	$0.3 + \frac{1}{5k+1}$	294	0.0156

Bảng 2.1: Thuật toán 2.1 với các tham số khác nhau và sai số $\epsilon = 10^{-3}$.

Case	Start. point x^0	Start. point x^1	No. Iter.	CPU times
1	$(1, 2, 3, 4, 5)^\top$	$(0, 1, -1, 2, 3)^\top$	17	0.6875
2	$(-1, 2, -3, 4, -5)^\top$	$(0, -1, 1, -2, -3)^\top$	111	0.0156
3	$(0, 2, 0, 4, 0)^\top$	$(1, 1, 1, 1, 1)^\top$	102	0.0469
4	$(2, 4, 6, 8, 10)^\top$	$(3, 5, 7, 9, 11)^\top$	90	0.0469
5	$(1, 2, 0.5, 3, 0)^\top$	$(1, 2, 0.5, 3, 0)^\top$	67	0.0313
6	$(1.2, 2.2, 3.3, 4.4, 5.5)^\top$	$(-2.1, 3.2, -4.3, 5.4, -6.5)^\top$	125	0.0469
7	$(1, 2, 0.5, 3, 0)^\top$	$(-10, 2, -3, 4, -5)^\top$	324	0.0156
8	$(10, 20, 30, 40, 50)^\top$	$(-10, 2, -3, 4, -5)^\top$	604	0.0156
9	$(10, 20, 30, 40, 50)^\top$	$(0, 0, 0, 0, 0)^\top$	318	0.0469
10	$(1.5, 2.7, 0.1, 5.3, 1.9)^\top$	$(-1, -2, -5, -7, 9)^\top$	118	0.0313

Bảng 2.2: Thuật toán 2.1 với các điểm xuất phát khác nhau, và sai số $\epsilon = 10^{-3}$.

Case	Iter.			CPU times		
	<i>HICA</i>	<i>PPA</i>	<i>HSDA</i>	<i>HICA</i>	<i>PPA</i>	<i>HSDA</i>
1	110	24	509	0.0469	0.0156	0.0781
2	111	937	541	0.0337	0.1250	0.0625
3	114	40	520	0.0483	0.0156	0.0625
4	108	30	516	0.0469	0.0313	0.0313
5	117	281	509	0.0905	0.0938	0.0156
6	96	44	500	0.0532	0.0441	0.0313
7	120	30	516	0.0716	0.0074	0.0156
8	114	159	507	0.0550	0.0663	0.0156
9	101	81	502	0.0712	0.0860	0.0469
10	119	28	522	0.0622	0.0052	0.0156

Bảng 2.3: Kết quả so sánh cho thử nghiệm 2 với sai số $\epsilon = 10^{-3}$.

bày trong Bảng 2.3 với $q = (3, 7, 9, 10, -17)^\top$. Dữ liệu cho các thuật toán được chọn như sau:

- (1) (*HICA*): $\mu_k = 15, \gamma_k = \frac{1}{2k+1}, \tau_k = \frac{1}{k^2+5}, \alpha_k = 0.5 + \frac{1}{k+10}, \lambda_k = 0.00012, \beta_k = 0.7 + \frac{1}{2k+100}$;
- (2) (*PPA*): $f(x, y) = \langle F(x), y - x \rangle \forall x, y \in \mathbb{R}^5, \alpha_{k,i} = 0.01 + \frac{1}{2k+19}$ ($i = 1, 2$), $\epsilon_k = 0, \gamma_k = \frac{1}{9k+15}$;
- (3) (*HSDA*): $\mu = 0.1, \lambda_k = \frac{1}{2k+1}$ với mọi $k \in \mathbb{N}$.

Tất cả các thử nghiệm tính toán được lập trình trong MATLAB R2016a, chạy trên máy tính PC với chip Intel® Core™ i7-7800X CPU @ 3.50 GHz 32 GB Ram. Từ kết quả tính toán thuật toán chiếu co quán tính thuật toán (*HICA*), thuật toán chiếu song song (*PPA*) và thuật toán lai ghép dốc nhất (*HSDA*) trình bày trong các bảng số, ta có nhận xét sau:

- (i) Sự hội tụ của thuật toán (*PPA*) là rất nhạy với dãy các tham số $\{\mu_k\}, \{\gamma_k\}, \{\tau_k\}, \{\lambda_k\}$ và $\{\beta_k\}$.
- (ii) Thử nghiệm trong $\mathbb{R}^5$, thời gian tính toán và số bước lặp của thuật toán (*HICA*) nhỏ hơn hai thuật toán (*PPA*) và (*HSDA*).

2.2 Kỹ thuật xấp xỉ song song quán tính

2.2.1 Thuật toán (PIPA)

Cho $x^0, x^1 \in \mathbb{H}$ và các tham số thỏa mãn điều kiện sau

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in (0, 1), \{\lambda_k\} \subset [\bar{a}, \hat{a}] \subset \left(0, \frac{2\beta}{L^2}\right), \\ \sqrt{1 - 2\lambda_k\beta + \lambda_k^2 L^2} < 1 - a, \\ \zeta_k \in (0, 1), \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_k = 0, \\ 0 \leq \tau_k \leq \zeta_k^2, \mu_k > 0, \\ \gamma_{k,i} \in (\bar{b}, \hat{b}) \subset (0, 1 - \max\{\beta_i : i \in J\}). \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Bước 1: Tính :

$$w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1}), \quad (2.16)$$

với

$$\alpha_k = \begin{cases} \min \left\{ \frac{\tau_k}{\|x^k - x^{k-1}\|}, \mu_k \right\} & \text{nếu } \|x^k - x^{k-1}\| \neq 0, \\ \mu_k & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases} \quad (2.17)$$

Bước 2: Tính $u_i^k = (1 - \gamma_{k,i})w^k + \gamma_{k,i}S_i w^k$.

Đặt $t^k = u_{i_0}^k$, ở đây $i_0 \in \arg \max \{\|u_i^k - w^k\|, i \in J\}$.

Bước 3: Tính

$x^{k+1} = (1 - \varsigma_k)t^k + \varsigma_k[t^k - \lambda_k F(t^k)]$. Đặt $k = k + 1$ và quay lại Bước 1.

2.2.2 Định lý hội tụ

Định lý 2.2. Cho $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là ánh xạ β -đơn điệu mạnh và L -liên tục Lipschitz và họ $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là các ánh xạ β_i -nửa co và nửa đóng tại 0 với mọi $i \in J$. Dưới điều kiện (2.15) và $\Omega \neq \emptyset$, dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất x^* của bài toán $VIF(\Omega, F)$.

Chứng minh: Từ giả thiết F là β -đơn điệu mạnh và L -liên tục Lipschitz, ta có

$$\begin{aligned}
\|t^k - \lambda_k F(t^k) - [x^* - \lambda_k F(x^*)]\|^2 &= \|t^k - x^*\|^2 + \lambda_k^2 \|F(t^k) - F(x^*)\|^2 \\
&\quad - 2\lambda_k \langle F(t^k) - F(x^*), t^k - x^* \rangle \\
&\leq (1 - 2\lambda_k \beta + \lambda_k^2 L^2) \|t^k - x^*\|^2.
\end{aligned}$$

Do đó

$$\|t^k - \lambda_k F(t^k) - [x^* - \lambda_k F(x^*)]\| \leq \delta_k \|t^k - x^*\|, \quad (2.18)$$

trong đó $\delta_k = \sqrt{1 - 2\lambda_k \beta + \lambda_k^2 L^2}$. Từ (2.16) và (2.17), với mọi $x \in \mathbb{H}$ ta có

$$\begin{aligned}
\|w^k - x\| &= \|x^k + \alpha_k (x^k - x^{k-1}) - x\| \\
&\leq \|x^k - x\| + \|\alpha_k (x^k - x^{k-1})\| \\
&\leq \|x^k - x\| + \tau_k.
\end{aligned} \quad (2.19)$$

Từ Bước 2 và Bổ đề 1.5, với mỗi $\bar{x} \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\|t^k - \bar{x}\|^2 &= \|u_{i_0}^k - \bar{x}\|^2 \\
&= \|(1 - \gamma_{k,i_0}) w^k + \gamma_{k,i_0} S_{i_0} w^k - \bar{x}\|^2 \\
&\leq \|w^k - \bar{x}\|^2 - \gamma_{k,i_0} (1 - \gamma_{k,i_0} - \beta_{i_0}) \|S_{i_0} w^k - w^k\|^2.
\end{aligned} \quad (2.20)$$

Kết hợp Bước 3 và (2.18), (2.19), (2.20) ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\| &= \|(1 - \varsigma_k) t^k + \varsigma_k [t^k - \lambda_k F(t^k)] - x^*\| \\
&\leq (1 - \varsigma_k) \|t^k - x^*\| + \varsigma_k \|[t^k - \lambda_k F(t^k)] - x^*\| \\
&\leq (1 - \varsigma_k) \|t^k - x^*\| + \varsigma_k \|[t^k - \lambda_k F(t^k)] - [x^* - \lambda_k F(x^*)]\| \\
&\quad + \varsigma_k \lambda_k \|F(x^*)\| \\
&\leq [1 - \varsigma_k (1 - \delta_k)] \|t^k - x^*\| + \varsigma_k \lambda_k \|F(x^*)\| \\
&\leq [1 - \varsigma_k (1 - \delta_k)] \sqrt{\|w^k - x^*\|^2 - \gamma_{k,i_0} (1 - \gamma_{k,i_0} - \beta_{i_0}) \|S_{i_0} w^k - w^k\|^2} \\
&\quad + \varsigma_k \lambda_k \|F(x^*)\| \\
&\leq [1 - \varsigma_k (1 - \delta_k)] \|x^k - x^*\| + \varsigma_k \lambda_k \|F(x^*)\| \\
&\leq [1 - \varsigma_k (1 - \delta_k)] (\|x^k - x^*\| + \tau_k) + \varsigma_k \lambda_k \|F(x^*)\| \\
&= [1 - \varsigma_k (1 - \delta_k)] \|x^k - x^*\| + \tau_k [1 - \varsigma_k (1 - \delta_k)] + \varsigma_k \lambda_k \|F(x^*)\|.
\end{aligned}$$

Sử dụng điều kiện $a \in (0, 1)$, $\delta_k := \sqrt{1 - 2\lambda_k \beta + \lambda_k^2 L^2} < 1 - a$ của (2.15) ta được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\| &\leq [1 - \varsigma_k (1 - \delta_k)] \|x^k - x^*\| + \tau_k [1 - \varsigma_k (1 - \delta_k)] + \varsigma_k \lambda_k \|F(x^*)\| \\
&\leq (1 - a\varsigma_k) \|x^k - x^*\| + \tau_k (1 - a\varsigma_k) + \varsigma_k \lambda_k \|F(x^*)\| \\
&\leq (1 - a\varsigma_k) \|x^k - x^*\| + \varsigma_k [1 - a\varsigma_k + \lambda_k \|F(x^*)\|] \\
&\leq (1 - a\varsigma_k) \|x^k - x^*\| + a\varsigma_k \frac{1 - a\varsigma_k + \lambda_k \|F(x^*)\|}{a} \\
&\leq (1 - a\varsigma_k) \|x^k - x^*\| + a\varsigma_k M \\
&\leq \max \{ \|x^k - x^*\|, M \} \\
&\leq \dots \\
&\leq \max \{ \|x^0 - x^*\|, M \},
\end{aligned}$$

với $M = \sup \left\{ \frac{1 - a\varsigma_k + \lambda_k \|F(x^*)\|}{a} : k = 1, 2, \dots \right\} < +\infty$ được suy ra từ điều kiện (2.15). Vì vậy dãy $\{x^k\}$ bị chặn. Từ điều kiện $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = 0$, (2.19) và (2.20) ta suy ra các dãy $\{w^k\}, \{t^k\}$ đều bị chặn. Áp dụng bất đẳng thức

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2 \langle y, x + y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{H},$$

với $x := [t^k - \lambda_k F(t^k)] - [x^* - \lambda_k F(x^*)]$ và $y = \lambda_k F(x^*)$, ta thu được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|(1 - \varsigma_k)(t^k - x^*) + \varsigma_k [t^k - \lambda_k F(t^k) - x^*]\|^2 \\
&\leq (1 - \varsigma_k) \|t^k - x^*\|^2 + \varsigma_k \|t^k - \lambda_k F(t^k) - x^*\|^2 \\
&= (1 - \varsigma_k) \|t^k - x^*\|^2 \\
&\quad + \varsigma_k \|[t^k - \lambda_k F(t^k) - (x^* - \lambda_k F(x^*))] - \lambda_k F(x^*)\|^2 \\
&\leq (1 - \varsigma_k) \|t^k - x^*\|^2 + \varsigma_k \|[t^k - \lambda_k F(t^k) - (x^* - \lambda_k F(x^*))]\|^2 \\
&\quad - 2\varsigma_k \lambda_k \langle F(x^*), x^{k+1} - x^* \rangle \\
&\leq [1 - \varsigma_k (1 - \delta_k^2)] \|t^k - x^*\|^2 - 2\varsigma_k \lambda_k \langle F(x^*), x^{k+1} - x^* \rangle.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Kết hợp (2.19), (2.20) và (2.21) ta được

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq [1 - \varsigma_k (1 - \delta_k^2)] \|t^k - x^*\|^2 - 2\varsigma_k \lambda_k \langle F(x^*), x^{k+1} - x^* \rangle \\
&\leq [1 - \varsigma_k (1 - \delta_k^2)] \|w^k - \bar{x}\|^2 - \gamma_{k,i_0} (1 - \gamma_{k,i_0} - \beta_{i_0}) \|S_{i_0} w^k - w^k\|^2 \\
&\quad - 2\varsigma_k \lambda_k \langle F(x^*), x^{k+1} - x^* \rangle \\
&\leq [1 - \varsigma_k (2\lambda_k \beta - \lambda_k^2 L^2)] \left[(\|x^k - x^*\| + \alpha_k \|x_k - x_{k-1}\|)^2 \right. \\
&\quad \left. - \gamma_{k,i_0} (1 - \gamma_{k,i_0} - \beta_{i_0}) \|S_{i_0} w^k - w^k\|^2 \right] - 2\varsigma_k \lambda_k \langle F(x^*), x^{k+1} - x^* \rangle \\
&\leq [1 - \varsigma_k (2\lambda_k \beta - \lambda_k^2 L^2)] \left[(\|x^k - x^*\| + \tau_k)^2 \right. \\
&\quad \left. - \gamma_{k,i_0} (1 - \gamma_{k,i_0} - \beta_{i_0}) \|S_{i_0} w^k - w^k\|^2 \right] - 2\varsigma_k \lambda_k \langle F(x^*), x^{k+1} - x^* \rangle \\
&\leq [1 - \varsigma_k (2\lambda_k \beta - \lambda_k^2 L^2)] \left[(\|x^k - x^*\| + \varsigma_k^2)^2 \right. \\
&\quad \left. - \gamma_{k,i_0} (1 - \gamma_{k,i_0} - \beta_{i_0}) \|S_{i_0} w^k - w^k\|^2 \right] - 2\varsigma_k \lambda_k \langle F(x^*), x^{k+1} - x^* \rangle \\
&= [1 - \varsigma_k (2\lambda_k \beta - \lambda_k^2 L^2)] \left[(\|x^k - x^*\|^2 + 2\varsigma_k^2 \|x^k - x^*\| + \varsigma_k^4) \right. \\
&\quad \left. - \gamma_{k,i_0} (1 - \gamma_{k,i_0} - \beta_{i_0}) \|S_{i_0} w^k - w^k\|^2 \right] - 2\varsigma_k \lambda_k \langle F(x^*), x^{k+1} - x^* \rangle \\
&\leq [1 - \varsigma_k (2\lambda_k \beta - \lambda_k^2 L^2)] \|x^k - x^*\|^2 + \varsigma_k (2\lambda_k \beta - \lambda_k^2 L^2) \Gamma_k \\
&\quad - \gamma_{k,i_0} (1 - \gamma_{k,i_0} - \beta_{i_0}) [1 - \varsigma_k (2\lambda_k \beta - \lambda_k^2 L^2)] \|S_{i_0} w^k - w^k\|^2,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

trong đó

$$\Gamma_k := \frac{\varsigma_k [1 - \varsigma_k (2\lambda_k \beta - \lambda_k^2 L^2)] (2\|x^k - x^*\|^2 + \varsigma_k^2)}{\lambda_k (2\beta - \lambda_k L^2)} - \frac{2 \langle F(x^*), x^{k+1} - x^* \rangle}{2\beta - \lambda_k L^2}.$$

Từ dãy $\{x^k\}$ bị chặn và điều kiện (2.15), ta có

$$\Gamma = \sup \{\Gamma_k : k = 1, 2, \dots\} < +\infty.$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq [1 - \varsigma_k (2\lambda_k \beta - \lambda_k^2 L^2)] \|x^k - x^*\|^2 + \varsigma_k (2\lambda_k \beta - \lambda_k^2 L^2) \Gamma \\
&\quad - \gamma_{k,i_0} (1 - \gamma_{k,i_0} - \beta_{i_0}) [1 - \varsigma_k (2\lambda_k \beta - \lambda_k^2 L^2)] \|S_{i_0} w^k - w^k\|^2
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Đặt $a_k = \|x^k - x^*\|^2$. Ta xem xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Tồn tại số k_0 sao cho $a_{k+1} < a_k$ với mọi $k \geq k_0$. Khi đó $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = A < +\infty$. Chuyển qua giới hạn biểu thức (2.23) khi $k \rightarrow \infty$, sử dụng $\lim_{k \rightarrow \infty} \varsigma_k = 0$ và điều kiện (2.15) ta thu được $\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_{i_0} w^k - w^k\| = 0$.

Từ điều kiện $\gamma_{k,i} \in (\bar{b}, \widehat{b}) \subset (0, 1 - \min \{\beta_i : i \in J\})$ với mọi $k \in \mathbb{N}, i \in J$, ta có

$$0 \leq \bar{b} \|w^k - S_i w^k\| \leq \gamma_{k,i} \|w^k - S_i w^k\| \leq \widehat{b} \|w^k - S_{i_0} w^k\| \rightarrow 0,$$

suy ra $\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^k - S_i w^k\| = 0$ với mọi $i \in J$. Chọn dãy $\{x^{k_j}\}$ là dãy con của $\{x^k\}$ sao cho

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^{k+1} - x^* \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^{k_{j_h}+1} - x^* \rangle.$$

Vì dãy $\{x^{k_{j_h}+1}\}$ bị chặn nên tồn tại một dãy con $\{x^{k_{j_h}+1}\} \rightarrow \bar{x}$ khi $h \rightarrow \infty$. Từ S_i là nửa đóng tại 0 với mọi $i \in J$, ta thu được $\bar{x} \in \bigcap_{i \in I} \text{Fix}(S_i)$. Điều này dẫn đến:

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^{k+1} - x^* \rangle &= \lim_{h \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^{k_{j_h}+1} - x^* \rangle \\ &= \langle F(x^*), \bar{x} - x^* \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

hay x^* là nghiệm của bài toán $VI(F, \Omega)$. Từ điều kiện (2.15) và (2.22) ta có:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k \leq 0.$$

Kết hợp với bổ đề 1.4, ta có $x^k \rightarrow x^*$ khi $k \rightarrow \infty$.

Trường hợp 2: Không tồn tại số k_1 sao cho $a_{k+1} < a_k$ với mọi $k \geq k_1$. Do đó, với mọi số tự nhiên m , tồn tại số $p > m$ để $a_p \leq a_{p+1}$. Từ bổ đề 1.10, Maingé sử dụng dãy con $\{a_{\tau(k)}\}$ của $\{a_k\}$ như sau:

$$\tau(k) = \max \{i \in \mathbb{N} : k_0 \leq i \leq k, a_i \leq a_{i+1}\}, \forall k \geq k_0.$$

Khi đó, ta có

$$\tau(k) \nearrow +\infty, 0 \leq a_k \leq a_{\tau(k)+1}, a_{\tau(k)} \leq a_{\tau(k)+1}, \forall k \geq k_0. \quad (2.24)$$

Do $\{a_{\tau(k)}\}$ là dãy tăng và bị chặn, nên tồn tại giới hạn $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\tau(k)} = M < +\infty$. Từ tính chất bị chặn của $\{x^{\tau(k)}\}$, tồn tại dãy con hội tụ yếu đến $\bar{x}$.

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x^{\tau(k)} \rightharpoonup \bar{x}$. Từ (2.23) và (2.24) ta có

$$\begin{aligned} a_{\tau(k)} &\leq a_{\tau(k)+1} \\ &= \|x^{\tau(k)+1} - x^*\|^2 \\ &\leq \left[1 - \varsigma_{\tau(k)} \left(2\lambda_{\tau(k)}\beta - \lambda_{\tau(k)}^2 L^2\right)\right] a_{\tau(k)} + \varsigma_{\tau(k)} \left(2\lambda_{\tau(k)}\beta - \lambda_{\tau(k)}^2 L^2\right) \Gamma \\ &\quad - \gamma_{\tau(k), i_0} \left(1 - \gamma_{\tau(k), i_0} - \beta_{i_0}\right) \left[1 - \varsigma_{\tau(k)} \left(2\lambda_{\tau(k)}\beta - \lambda_{\tau(k)}^2 L^2\right)\right] \\ &\quad \times \|S_{i_0} w^{\tau(k)} - w^{\tau(k)}\|^2. \end{aligned}$$

Cho $k \rightarrow \infty$ và sử dụng $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\tau(k)} = M$, ta được

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_{i_0} w^{\tau(k)} - w^{\tau(k)}\| = 0,$$

do đó

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S_i w^{\tau(k)} - w^{\tau(k)}\| = 0, \forall i \in I.$$

Vì S_i là nửa đóng nên $\bar{x} \in \Omega$. Tương tự trường hợp 1, ta cũng có

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \Gamma_{\tau(k)} \leq 0. \quad (2.25)$$

Từ (2.22) ta có

$$\begin{aligned} a_{\tau(k)} &\leq a_{\tau(k)+1} \\ &= \|x^{\tau(k)+1} - x^*\|^2 \\ &\leq \left[1 - \varsigma_{\tau(k)} \left(2\lambda_{\tau(k)}\beta - \lambda_{\tau(k)}^2 L^2\right)\right] a_{\tau(k)} + \varsigma_{\tau(k)} \left(2\lambda_{\tau(k)}\beta - \lambda_{\tau(k)}^2 L^2\right) \Gamma_{\tau(k)}. \end{aligned}$$

Do đó: $0 \leq a_{\tau(k)} \leq \Gamma_{\tau(k)}$, $\forall k \geq k_0$, kết hợp với (2.25), ta được

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} a_{\tau(k)} = 0,$$

và suy ra $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\tau(k)+1} = 0$. Từ (2.24), $a_k \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$, ta có điều phải chứng minh.

2.2.3 Áp dụng vào mô hình phục hồi ảnh

Xét bài toán cực tiểu lồi (1.6), để phục hồi các bức ảnh trong không gian Euclidean $\mathbb{H} = \mathbb{R}^s$, với hai hàm bất kỳ f_1 và f_2 thỏa mãn các điều kiện sau:

- Hàm $f_1 : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi khả vi sao cho đạo hàm ∇f_1 là L -liên tục Lipschitz, tức là

$$\|\nabla f_1(x) - \nabla f_1(y)\| \leq L\|x - y\| \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}^s;$$

- Hàm $f_2 : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi, nửa liên tục dưới;
- Tập nghiệm của bài toán (1.6) là tập khác rỗng.

Cho $\epsilon_i \in (0, \frac{2}{L})$ và ánh xạ $S_i : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^s$ được xác định bởi

$$S_i(x) = \text{prox}_{\epsilon_i f_2}(E - \epsilon_i \nabla f_1)(x)$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^s$, $i \in J$. Khi đó, S_i là ánh xạ không giãn. Do đó S_i là ánh xạ 0–nửa co trên $\mathbb{R}^s$, đồng thời theo [68, Lemma 2], S_i không giãn cũng là nửa đóng tại 0. Mặt khác, chọn F là ánh xạ β –đơn điệu mạnh và L –liên tục Lipschitz. Áp dụng thuật toán (PIPA) cho trường hợp này, thuật toán giải bài toán (1.6) có dạng:

Thuật toán 2.2. Chọn điểm khởi đầu là x^0, x^1 bất kỳ trong $\mathbb{R}^s$.

Bước 1: Tính

$$w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1}),$$

với

$$\alpha_k = \begin{cases} \min \left\{ \frac{\tau_k}{\|x^k - x^{k-1}\|}, \mu_k \right\} & \text{nếu } \|x^k - x^{k-1}\| \neq 0, \\ \mu_k & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases} \quad (2.26)$$

Bước 2: Tính

$$u_i^k = (1 - \gamma_{k,i}) w^k + \text{prox}_{\epsilon_i f_2}(E - \epsilon_i \nabla f_1)(w^k).$$

Đặt $t^k = u_{i_0}^k$, trong đó $i_0 \in \arg \max \{ \|u_i^k - w^k\| : i \in J \}$,

Bước 3: Tính

$$x^{k+1} = (1 - \varsigma_k) t^k + \varsigma_k [t^k - \lambda_k F(t^k)].$$

Đặt $k = k + 1$ và quay lại Bước 1.

Định lý 2.3. Cho $F : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ là ánh xạ β –đơn điệu mạnh và L –liên tục Lipschitz. Dưới giả thiết (2.15) và $\epsilon_i \in (0, \frac{2}{L})$ với mọi $i \in J$, dãy $\{x^k\}$ tạo bởi Thuật toán (2.2) hội tụ về nghiệm x^* của Bài toán (1.6).

Chọn các hàm số

$$f_1(x) := \frac{1}{2} \|Bx - y\|_2^2, \quad f_2(x) = \lambda \|x\|_1,$$

khi đó, $\nabla f_1(x) = B^T(Bx - y)$ và hệ số Lipschitz của $\nabla f_1(x)$ là $L = \|B\|^2$. Các thuật toán được lập trình trên Matlab R2016a với bộ xử lý PC Intel(R) Core(TM) i9-9900 CPU @4.00GHz 32.0BG Ram. Ta dùng Matlab để tính toán $prox_{\epsilon_i f_2}(I - \epsilon_i \nabla f_1)(w^k)$ qua chương trình con fmincon trong Toolbox. Như thường lệ, điều kiện dừng của các thuật toán là $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$.

Thử nghiệm 1: Áp dụng thuật toán (*PIPA*) cho mô hình phục hồi ảnh, đánh giá sai số qua hai chỉ số *PSNR* (Peak Signal-to-Noise Ratio), đơn vị là decibel (dB) và chỉ số *SSIM* (Structual Similarity Index Metric). Đây là hai chỉ số thường được dùng để đánh giá chất lượng của các bức ảnh được phục hồi [76, 67]. Các tham số $\alpha_k, \tau_k, \mu_k, \gamma_{k,i}$ và ς_k được chọn khác nhau cho mỗi thử nghiệm. Các bức ảnh được làm mờ bởi kiểu Gaussian, với ma trận $B := fspecial('gaussian', [256 \ 256], 4)$. Cho $F(x) := 0.7x$, $\epsilon_1 = 0.1, \epsilon_2 = 0.3$ và $\epsilon_3 = 0.7$. Khi đó, ta có $\beta = L = 0.7$.

Kết quả tính toán được trình bày trong Hình 2.3 và bảng tính toán sau:

Case	μ_k	τ_k	$\gamma_{k,i}$	ς_k	λ_k	PSNR	SSIM	CPU time/s
1	$\frac{k}{100k+1}$	$\frac{10^{15}}{k^2}$	$\frac{1}{50k}$	$\frac{1}{10k+1}$	0.01	28.1825	0.9016	3677.0425
2	0.01	$\frac{10^{15}}{k^2}$	$\frac{1}{50k}$	$\frac{1}{10k+1}$	0.01	31.3307	0.9615	3402.5581
3	$\frac{k}{100k+1}$	$\frac{10^{15}}{k^2}$	$\frac{1}{50k}$	$\frac{1}{10k+1}$	10^{-3}	28.9304	0.9083	3677.7022
4	0.8	$\frac{10^{15}}{k+1^2}$	$\frac{1}{100k}$	$\frac{1}{10k+1}$	0.01	26.9910	0.7048	3633.9307
5	$\frac{k}{10k+300}$	$\frac{10^{15}}{2k+1^2}$	$\frac{1}{100k}$	$\frac{1}{10k+1}$	10^{-3}	32.3016	0.9204	3509.5591

Bảng 1: Kết quả phục chế ảnh bằng thuật toán (*PIPA*) tương ứng với các hệ số khác nhau và sai số là $\epsilon = 10^{-2}$.

Thử nghiệm 2: So sánh thuật toán (*PIPA*) với ba thuật toán phục chế ảnh thông dụng là (*FBSA*) [57], (*FISTA*) [55] và (*FVFA*) [47] (Fast Viscosity Forward-Backward Algorithm), đánh giá bằng hai chỉ số *PSNR* và *SSIM*.

Trước hết, làm mờ bức ảnh (Hình 2.4) kiểu Gaussian với

$$B := fspecial('gaussian', [288 \ 288], 13)$$



Hình 2.2: Một bức ảnh bị làm mờ kiểu Gaussian



Hình 2.3: Kết quả phục hồi bức ảnh 256×256 bằng thuật toán PIPA

cho bức ảnh gốc cỡ 288×288 với độ lệch chuẩn $\sigma = 13$. Tham số trong các thuật toán được chọn như sau:

- (i) Trong thuật toán (*FBSA*): $\lambda_k := \frac{1}{50k+1}$ với mọi $k = 1, 2, \dots$;
- (ii) Trong thuật toán (*FISTA*): $y^0 = x^0$, $t_0 = 1, 5$;
- (iii) Trong thuật toán (*FVFA*): $\tau_k = \frac{10^{15}}{k^2}$, $\mu_k = \frac{k}{100k+1}$, $\gamma_k = \frac{1}{50(k+1)}$,
 $\beta_k = \frac{0.99k}{k+1}$.



Hình 2.4: Ảnh gốc

Thử nghiệm 3: So sánh thuật toán (*PIPA*) với ba thuật toán (*FBFA*), (*FISTA*), (*FVFA*) để phục hồi bức ảnh Original trong Hình 2.6 đã được làm mờ kiểu Motion với $B = f_{special}('motion', len, \theta)$ với độ rộng chuyển



Hình 2.5: Ảnh so sánh các thuật toán

động là 20 pixels ($len = 20$) và góc chuyển động là 45° ($\theta = 45$). Kết quả được mô tả trong các hình ảnh của Hình 2.7.



Hình 2.6: Ảnh gốc



Hình 2.7: Ảnh so sánh các thuật toán

Kết luận chương 2

Chương này đã trình bày một số kết quả chính như sau:

- Xây dựng và chứng minh sự hội tụ của các dãy lặp của thuật toán lai ghép co quán tính (*HICA*), để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của các ánh xạ nửa co trong một không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Thuật toán được viết dựa trên kỹ thuật quán tính và kỹ thuật lai ghép. Bằng cách chọn tham số thích hợp, chúng tôi đã chỉ

ra sự hội tụ mạnh của thuật toán (*HICA*) về nghiệm duy nhất của bài toán $VIF(\Omega, F)$.

- Đề xuất thuật toán mới (*PIPA*) giải bài toán $VIF(\Omega, F)$, ở đây miền ràng buộc Ω là tập điểm bất động của m ánh xạ nửa co. Bằng cách kết hợp giữa kỹ thuật tính toán song song và kỹ thuật quán tính, chúng tôi chỉ ra rằng các dãy lặp của thuật toán hội tụ mạnh về một nghiệm của bài toán $VIF(\Omega, F)$.
- Ứng dụng thuật toán (*PIPA*) vào mô hình phục hồi ảnh. Các kết quả tính toán về phục hồi ảnh được so sánh tính toán hiệu quả với các thuật toán thông dụng khác như (*FBSA*), (*FISTA*) và (*FVFA*). Các kết quả tính toán được đo bằng chỉ số *PSNR* và *SSIM* cho thấy sự hiệu quả của thuật toán (*PIPA*) với các bộ tham số đã được chọn.

Chương 3

Phương pháp ánh xạ nghiệm nối lỏng

Khi nghiên cứu ánh xạ nghiệm cho bài toán bất đẳng thức biến phân, chúng tôi phát triển dựa trên một số kết quả về tính không giãn của Yamada, I. đã chỉ ra trong tài liệu [84], chúng tôi đề xuất các kết quả mới về tính chất tựa không giãn của các ánh xạ nghiệm nối lỏng. Ánh xạ nghiệm là một sự mở rộng của phép chiếu trên tập C thành phép chiếu trên một nửa không gian. Khi đó, chúng tôi xây dựng được thuật toán chiếu nối lỏng ($RLPA$) để giải cho bài toán bất đẳng thức biến phân, ở đây, miền ràng buộc là giao của tập điểm bất động và tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân khác. Kết quả này đã được công bố trong [CT4] (Danh mục các công trình liên quan đến luận án). Hơn nữa, chúng tôi đề xuất thuật toán chiếu co (PCA) để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ nghiệm $BVI(C, F, G)$ trong $\mathbb{R}^n$. Các kết quả này được công bố trong [CT2]. Ứng dụng của thuật toán ($RLPA$) và (PCA) với các tính toán minh họa và so sánh với các thuật toán khác được chỉ ra trên phần mềm Matlab.

3.1 Phương pháp chiếu nổi lỏng

3.1.1 Thuật toán (RLPA)

Bằng sự kết hợp giữa phép chiếu thông thường và phép chiếu nổi lỏng lên nửa không gian, chúng tôi xây dựng thuật toán (RLPA) để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, được phát biểu như sau:

Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của một không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ và cho các ánh xạ $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ và $\Xi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$.

$$\text{Tìm } u \in \Omega \text{ sao cho } \langle G(u), x - u \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.1)$$

ở đây, tập $\Omega = \text{Fix}(\Xi) \cap \text{Sol}(C, F)$, trong đó tập điểm bất động $\text{Fix}(\Xi) = \{x \in \mathbb{H} : x = \Xi x\}$ và tập $\text{Sol}(C, F)$ là tập nghiệm của bài toán $VI(C, F)$. Các hàm giá F , G và dãy các tham số thoả mãn một số giả thiết sau:

- (B_1) Tập Ω khác rỗng;
- (B_2) Ánh xạ giá F là giả đơn điệu, L_F -liên tục Lipschitz và liên tục yếu trên C ;
- (B_3) Ánh xạ giá G là β -đơn điệu mạnh và L_G -liên tục Lipschitz;
- (B_4) Ánh xạ Ξ là không giãn và thoả mãn tính chất $I - S$ nửa đóng tại 0;
- (B_5) Với mọi số tự nhiên $k \geq 0$, các tham số dương $\xi_k, \gamma_k, \tau_k, \alpha_k, \tau$ và ν thoả mãn các điều kiện sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu \in (0, \min\{1, \frac{1}{L_F}\}), a \in (0, 1 - \nu L_F), \\ b > 0, \xi_k \in \left(b, \min\left\{\frac{1}{L_F}, \sqrt{\frac{\nu}{L_F}}\right\}\right), \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k, \\ \gamma_k \in \left(0, \min\left\{\frac{1 - \xi_k^2 L_F^2}{2}, \frac{1 - \nu L_F - a}{2}\right\}\right), \\ \tau_k \in (c, d) \subset (0, 1), \tau \in (0, \frac{2\beta}{L_G^2}), \\ \alpha_k \in (0, 1), \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty. \end{array} \right.$$

Thuật toán 3.1. (*Thuật toán chiếu nổi lỏng (RLPA)*)

Chọn $x^0 \in \mathbb{H}$, $k = 0$, $\nu > 0$, chọn các dãy số dương $\{\xi_k\}$, $\{\gamma_k\}$, $\{\tau_k\}$ và $\{\alpha_k\}$,

Bước 1. Tìm hình chiếu

$$y^k = \Pi_C[x^k - \xi_k F(x^k)].$$

Bước 2. Tính $w^k = x^k - \nu \xi_k F(y^k)$ và $t^k = \tau_k z^k + (1 - \tau_k) \Xi z^k$, ở đây

$$z^k = \begin{cases} w^k - \frac{d_k}{\|x^k - \xi_k F(x^k) - y^k\|^2} (x^k - \xi_k F(x^k) - y^k) & \text{nếu } d_k > 0, \\ w^k & \text{trường hợp còn lại,} \end{cases}$$

với $d_k = \langle x^k - \xi_k F(x^k) - y^k, w^k - y^k \rangle - \gamma_k \|y^k - x^k\|^2$.

Bước 3. Tính $x^{k+1} = t^k - \alpha_k \tau G(t^k)$. Đặt $k := k + 1$ và quay lại Bước 1.

3.1.2 Ánh xạ nghiệm

Với mỗi $x \in \mathbb{H}$ và $\xi > 0$, ta gọi $S : \mathbb{H} \rightarrow C$ là ánh xạ nghiệm của bài toán $VI(C, F)$, được cho như sau:

$$Sx = \Pi_C[x - \xi F(x)]. \quad (3.2)$$

Ta đã biết $x \in C$ là nghiệm của bài toán $VI(C, F)$ nếu và chỉ nếu nó là điểm bất động của ánh xạ nghiệm S . Cho $\gamma > 0$, ta gọi nửa không gian H_x như sau:

$$H_x = \{w \in \mathbb{H} : \langle x - \xi F(x) - Sx, w - Sx \rangle \leq \gamma \|x - Sx\|^2\}. \quad (3.3)$$

Gọi K là tập nghiệm của bài toán $VI(C, F)$. Từ định nghĩa của phép chiếu Π_C và từ (3.2), ta có:

$$\langle x - \xi F(x) - Sx, y - Sx \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C,$$

do đó:

$$\langle x - \xi F(x) - Sx, y - Sx \rangle \leq \gamma \|x - Sx\|^2, \quad \forall y \in C.$$

Khi đó, $C \subset H_x$ với mọi $x \in \mathbb{H}$. Mặt khác, với mỗi $z \in \mathbb{H}$, thì hình chiếu của z trên H_x được cho dưới dạng hiển như sau:

$$\Pi_{H_x}(z) = \begin{cases} z - \frac{\langle x - \xi F(x) - Sx, z - Sx \rangle - \gamma \|x - Sx\|^2}{\|x - \xi F(x) - Sx\|^2} (x - \xi F(x) - Sx) & \text{nếu } z \notin H_x, \\ z & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Tiếp theo, ta định nghĩa ánh xạ nghiệm $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ của bài toán VI(C, F), như sau:

$$Tx = \Pi_{H_x}[x - \nu\xi F(Sx)], \quad (3.5)$$

với tham số $\nu > 0$.

Bổ đề sau chỉ ra một số tính chất quan trọng của ánh xạ nghiệm T và S .

Bổ đề 3.1. *Giả sử tập K khác rỗng, là tập nghiệm của của bài toán VI(C, F). Ta có các khẳng định sau:*

(i) *Nếu F là tựa đơn điệu trên K và L -liên tục Lipschitz, $\xi \in (0, \frac{1}{L})$, $\gamma \in (0, \frac{1-\xi^2 L^2}{2})$ và $\nu \in (\xi^2 L, \min\{\frac{1-2\gamma}{L}, 1\})$, khi đó T là tựa không giãn mạnh trên K . Hơn nữa, với mọi $x \in \mathbb{H}$, $x^* \in K$,*

$$\begin{aligned} \|Tx - x^*\|^2 &\leq \|x - x^*\|^2 - \nu(1 - \nu L - 2\gamma)\|x - Sx\|^2 \\ &\quad - (\nu - \xi^2 L)\|Tx - Sx\|^2 - (1 - \nu)\|Tx - x\|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

(ii) *Nếu F là η -tựa đơn điệu mạnh ngược trên K , thì S là tựa không giãn mạnh trên K với điều kiện $m \in (\frac{\xi}{2\eta}, 1 - 2\gamma)$, $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ và $0 < \xi < 2\eta(1 - 2\gamma)$. Hơn nữa, với mọi $x \in C$,*

$$\begin{aligned} \|Sx - x^*\|^2 &\leq \|x - x^*\|^2 - 2\xi \left(\eta - \frac{\xi}{2m} \right) \|F(x) - F(x^*)\|^2 \\ &\quad - (1 - m - 2\gamma)\|x - Sx\|^2. \end{aligned}$$

(iii) *Nếu F là ζ -tựa đơn điệu mạnh trên K và L - liên tục Lipschitz trên $\mathbb{H}$, thì S là tựa co với hằng số $\delta := \frac{1}{\sqrt{1+2\xi\zeta-\xi^2 L^2}} \in (0, 1)$, với $\xi \in (0, \frac{2\zeta}{L^2})$.*

Chứng minh: (i) Giả sử $x^* \in K$ và F là tựa đơn điệu. Từ $\langle F(x^*), Sx - x^* \rangle \geq 0$ và giả thiết tựa đơn điệu của F , suy ra $\langle F(Sx), Sx - x^* \rangle \geq 0$. Khi đó, sử dụng Mệnh đề 1.2 và (3.5), ta có $x^* \in H_x$ và

$$\begin{aligned} \|Tx - x^*\|^2 &= \|\Pi_{H_x}[x - \nu\xi F(Sx)] - \Pi_{H_x}(x^*)\|^2 \\ &\leq \|x - \nu\xi F(Sx) - x^*\|^2 - \|x - \nu\xi F(Sx) - Tx\|^2 \\ &= \|x - x^*\|^2 - 2\nu\xi \langle F(Sx), Tx - x^* \rangle - \|x - Tx\|^2 \\ &= \|x - x^*\|^2 - 2\nu\xi \langle F(Sx), Sx - x^* \rangle - 2\nu\xi \langle F(Sx), Tx - Sx \rangle \end{aligned}$$

$$- \|x - Tx\|^2 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} &\leq \|x - x^*\|^2 - 2\nu\xi\langle F(Sx), Tx - Sx \rangle - \|x - Tx\|^2 \\ &= \|x - x^*\|^2 + 2\nu\langle x - Sx - \xi F(Sx), Tx - Sx \rangle \\ &\quad + 2\nu\langle Sx - x, Tx - Sx \rangle - \|x - Tx\|^2 \\ &= \|x - x^*\|^2 + 2\nu\langle x - \xi F(x) - Sx, Tx - Sx \rangle - (1 - \nu)\|x - Tx\|^2 \\ &\quad + 2\nu\xi\langle F(x) - F(Sx), Tx - Sx \rangle - \nu\|x - Sx\|^2 - \nu\|Sx - Tx\|^2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

bất đẳng thức cuối cùng được suy ra từ:

$$2\langle Sx - x, Tx - Sx \rangle = \|Tx - x\|^2 - \|Tx - Sx\|^2 - \|Sx - x\|^2.$$

Từ (3.5) và $\nu > 0$, thỏa mãn $Tx \in H_x$ và từ

$$\nu\langle x - \xi F(x) - Sx, Tx - Sx \rangle \leq \nu\gamma\|x - Sx\|^2, \quad (3.9)$$

sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz và điều kiện liên tục Lipschitz của F , ta suy ra

$$\begin{aligned} 2\nu\xi\langle F(x) - F(Sx), Tx - Sx \rangle &\leq 2\nu\xi\|F(x) - F(Sx)\| \|Tx - Sx\| \\ &\leq 2L\nu\xi\|x - Sx\| \|Tx - Sx\| \\ &\leq L(\nu^2\|x - Sx\|^2 + \xi^2\|Tx - Sx\|^2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Kết hợp (3.8), (3.9) và (3.10), ta có

$$\begin{aligned} \|Tx - x^*\|^2 &\leq \|x - x^*\|^2 + 2\nu\langle x - \xi F(x) - Sx, Tx - Sx \rangle - (1 - \nu)\|Tx - x\|^2 \\ &\quad + 2\nu\xi\langle F(x) - F(Sx), Tx - Sx \rangle - \nu\|x - Sx\|^2 - \nu\|Sx - Tx\|^2 \\ &\leq \|x - x^*\|^2 + 2\nu\gamma\|x - Sx\|^2 - (1 - \nu)\|Tx - x\|^2 + \nu^2L\|x - Sx\|^2 \\ &\quad + \xi^2L\|Tx - Sx\|^2 - \nu\|x - Sx\|^2 - \nu\|Sx - Tx\|^2 \\ &= \|x - x^*\|^2 - \nu(1 - \nu L - 2\gamma)\|x - Sx\|^2 - (\nu - \xi^2L)\|Tx - Sx\|^2 \\ &\quad - (1 - \nu)\|Tx - x\|^2. \end{aligned}$$

Khi đó ánh xạ T là $(1 - \nu)$ -tựa không giãn mạnh trên K dưới giả thuyết $\xi \in (0, \frac{1}{L})$, $\gamma \in (0, \frac{1 - \xi^2 L^2}{2})$ và $\nu \in (\xi^2 L, \frac{1 - 2\gamma}{L})$. Hơn nữa,

$$\|Tx - x^*\|^2 \leq \|x - x^*\|^2 - \nu(1 - \nu L - 2\gamma)\|x - Sx\|^2 - (\nu - \xi^2 L)\|Tx - Sx\|^2$$

$$- (1 - \nu) \|Tx - x\|^2.$$

(ii) Giả sử rằng ánh xạ F là η -tựa đơn điệu mạnh ngược trên K . Từ định nghĩa phép chiếu (3.2), ta có

$$\langle x - \xi F(x) - Sx, y - Sx \rangle \leq \gamma \|Sx - x\|^2, \quad \forall y \in C.$$

Thay $y = x^* \in K \subset C$ vào bất đẳng thức trên, ta có

$$\langle x - \xi F(x) - Sx, x^* - Sx \rangle \leq \gamma \|Sx - x\|^2.$$

Suy ra:

$$\gamma \|Sx - x\|^2 + \xi \langle F(x), x^* - Sx \rangle \geq \langle x - Sx, x^* - Sx \rangle. \quad (3.11)$$

Từ F là η -tựa đơn điệu mạnh ngược trên K và $\langle F(x^*), Sx - x^* \rangle \geq 0$ với $Sx \in C$, với mọi $m \in (0, 1)$, ta có:

$$\begin{aligned} \xi \langle F(x), x^* - Sx \rangle &= \xi \langle F(x) - F(x^*), x^* - Sx \rangle + \xi \langle F(x^*), x^* - Sx \rangle \\ &\leq \xi \langle F(x) - F(x^*), x^* - Sx \rangle \\ &= \xi \langle F(x) - F(x^*), x^* - x \rangle + \xi \langle F(x) - F(x^*), x - Sx \rangle \\ &\leq -\eta \xi \|F(x) - F(x^*)\|^2 + \xi \|F(x) - F(x^*)\| \|x - Sx\| \\ &\leq -\eta \xi \|F(x) - F(x^*)\|^2 + \frac{\xi^2}{2m} \|F(x) - F(x^*)\|^2 \\ &\quad + \frac{m}{2} \|x - Sx\|^2 \\ &= -\xi \left(\eta - \frac{\xi}{2m} \right) \|F(x) - F(x^*)\|^2 + \frac{m}{2} \|x - Sx\|^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Áp dụng bất đẳng thức:

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{2} (\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a - b\|^2), \quad \forall a, b \in \mathbb{H},$$

Với $a = x - Sx$ và $b = x^* - Sx$, ta có

$$\|x - Sx\|^2 + \|x^* - Sx\|^2 - \|x - x^*\|^2 = 2 \langle x - Sx, x^* - Sx \rangle.$$

Kết hợp điều này với (3.11) và (3.12), ta có:

$$\|x - Sx\|^2 + \|x^* - Sx\|^2 - \|x - x^*\|^2 \leq -\xi \left(2\eta - \frac{\xi}{m} \right) \|F(x) - F(x^*)\|^2$$

$$+(m+2\gamma)\|x-Sx\|^2.$$

Do đó

$$\|Sx-x^*\|^2 \leq \|x-x^*\|^2 - \xi \left(2\eta - \frac{\xi}{m}\right) \|F(x)-F(x^*)\|^2 - (1-m-2\gamma)\|x-Sx\|^2.$$

Từ điều kiện $m \in (\frac{\xi}{2\eta}, 1-2\gamma)$ và $0 < \xi < 2\eta(1-2\gamma)$, suy ra $2\eta - \frac{\xi}{m} > 0$ và

$$\|Sx-x^*\|^2 \leq \|x-x^*\|^2 - (1-m-2\gamma)\|x-Sx\|^2.$$

Vì vậy, ánh xạ S là $(1-m-2\gamma)$ -tựa không giãn mạnh trên K .

(iii) Giả sử rằng ánh xạ giá F là ζ -tựa đơn điệu mạnh trên K và liên tục Lipschitz trên $\mathbb{H}$. Từ F là ζ -tựa đơn điệu mạnh trên K và $x^* \in K$, $\langle F(x^*), Sx-x^* \rangle \geq 0$, ta có

$$\langle F(Sx), Sx-x^* \rangle \geq \zeta\|Sx-x^*\|^2. \quad (3.13)$$

Từ định nghĩa của Sx trong (3.2) và $x^* \in C$, suy ra

$$\langle x - \xi F(x) - Sx, x^* - Sx \rangle \leq 0.$$

Kết hợp với (3.13), suy ra

$$\begin{aligned} & \|x-Sx\|^2 + \|x^*-Sx\|^2 - \|x-x^*\|^2 \\ &= 2\langle x-Sx, x^*-Sx \rangle \\ &\leq 2\xi\langle F(x), x^*-Sx \rangle \\ &= 2\xi\langle F(x)-F(Sx), x^*-Sx \rangle + 2\xi\langle F(Sx), x^*-Sx \rangle \\ &\leq 2\xi\|F(x)-F(Sx)\|\|x^*-Sx\| - 2\xi\zeta\|x^*-Sx\|^2 \\ &\leq 2\xi L\|x-Sx\|\|x^*-Sx\| - 2\xi\zeta\|x^*-Sx\|^2 \\ &\leq \|x-Sx\|^2 + \xi^2 L^2\|x^*-Sx\|^2 - 2\xi\zeta\|x^*-Sx\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{H}. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\|Sx-x^*\|^2 \leq \frac{1}{1+2\xi\zeta-\xi^2 L^2}\|x-x^*\|^2, \quad \forall x \in \mathbb{H}.$$

Vì vậy, ánh xạ S là tựa co với tham số $\delta := \frac{1}{\sqrt{1+2\xi\zeta-\xi^2 L^2}} \in (0, 1)$ trên K , với $\xi \in (0, \frac{2\zeta}{L^2})$.

3.1.3 Định lý hội tụ

Các bổ đề sau được sử dụng để chứng minh sự hội tụ của dãy lặp trong thuật toán (RLPA).

Bổ đề 3.2. Cho $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ là hai dãy số sinh ra bởi Thuật toán 3.1 và gọi $x^* \in K$. Khi đó, với các giả thiết (B_1) , (B_2) và (B_4) , ta có khẳng định sau:

$$\begin{aligned} \|z^k - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \nu(1 - \nu L_F - 2\gamma_k)\|x^k - y^k\|^2 \\ &\quad - (\nu - \xi_k^2 L_F)\|z^k - y^k\|^2 - (1 - \nu)\|z^k - x^k\|^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Chứng minh. Từ (3.2) và bước 1, ta có $y^k = Sx^k$, với ánh xạ S được cho bởi (3.2). Kết hợp với (3.3), (3.4), (3.5) và Bước 2, suy ra

$$z^k = \Pi_{H_{x^k}}[x^k - \nu \xi_k F(y^k)], \text{ ở đây,}$$

$$H_{x^k} = \{w \in \mathcal{H} : \langle x^k - \xi_k F(x^k) - Sx^k, w - Sx^k \rangle \leq \gamma \|x^k - Sx^k\|^2\}.$$

Tức là

$$z^k = Tx^k.$$

Sử dụng tính chất tựa không giãn mạnh của ánh xạ T trong Bổ đề 3.1(i), giả thiết (B_2) và (B_4) , ta thu được

$$\begin{aligned} \|z^k - x^*\|^2 &= \|Tx^k - x^*\|^2 \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \nu(1 - \nu L_F - 2\gamma_k)\|x^k - Sx^k\|^2 \\ &\quad - (\nu - \xi_k^2 L_F)\|Tx^k - Sx^k\|^2 - (1 - \nu)\|Tx^k - x^k\|^2, \end{aligned}$$

điều phải chứng minh.

Bổ đề 3.3. Giả sử dãy $\{x^k\}$ được sinh bởi thuật toán (RLPA) là bị chặn và $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ sao cho $x^{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$, nếu $\lim_{j \rightarrow \infty} \|x^{k_j} - y^{k_j}\| = 0$ với $\{y^{k_j}\}$ là dãy con tương ứng, thì khi đó, $\bar{x} \in \text{Sol}(C, F)$.

Chứng minh Từ định nghĩa của dãy $y^k = \Pi_C[x^k - \xi_k F(x^k)]$ và $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$, ta có

$$\langle x^{k_j} - \xi_{k_j} F(x^{k_j}) - y^{k_j}, x - y^{k_j} \rangle \leq 0, \quad \forall x \in C.$$

Do đó,

$$\xi_{k_j} \langle F(x^{k_j}), x - x^{k_j} \rangle + \xi_{k_j} \langle F(x^{k_j}), x^{k_j} - y^{k_j} \rangle \geq \langle x^{k_j} - y^{k_j}, x - y^{k_j} \rangle.$$

Từ F là L_F -liên tục Lipschitz và dãy $\{x^k\}$ bị chặn, suy ra dãy $\{F(x^k)\}$ cũng bị chặn. Sử dụng $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \xi > 0$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \|x^{k_j} - y^{k_j}\| = 0$, $x^{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$, và lấy giới hạn khi $j \rightarrow \infty$, ta có

$$y^{k_j} \rightharpoonup \bar{x}, 0 \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \langle F(x^{k_j}), x - x^{k_j} \rangle.$$

Nghĩa là:

$$\begin{aligned} \liminf_{j \rightarrow \infty} \langle F(y^{k_j}), x - y^{k_j} \rangle &= \liminf_{j \rightarrow \infty} [\langle F(y^{k_j}), x^{k_j} - y^{k_j} \rangle + \langle F(x^{k_j}), x - x^{k_j} \rangle \\ &\quad + \langle F(y^{k_j}) - F(x^{k_j}), x - x^{k_j} \rangle] \\ &\geq \liminf_{j \rightarrow \infty} [-\|F(y^{k_j})\| \|x^{k_j} - y^{k_j}\| + \langle F(x^{k_j}), x - x^{k_j} \rangle \\ &\quad - L_F \|y^{k_j} - x^{k_j}\| \|x - x^{k_j}\|] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Mặt khác, từ tính chất nửa liên tục dưới yếu của chuẩn, ta có,

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \|F(y^{k_j})\| \geq \|F(\bar{x})\| \geq 0.$$

Nếu $F(\bar{x}) = 0$ thì $\bar{x}$ là một nghiệm của bài toán $VI(C, F)$. Trong trường hợp $\|F(\bar{x})\| > 0$, khi đó, tồn tại một dãy con dương $\{r_j\}$ và $n_j \nearrow^{+\infty}$ thỏa mãn

$$\lim_{j \rightarrow \infty} r_j = 0, \|F(y^{n_j})\| > 0, \langle F(y^{n_j}), x - y^{n_j} \rangle + r_j \geq 0, \quad \forall i \geq n_j. \quad (3.15)$$

Đặt $q^{n_j} = \frac{1}{\|F(y^{n_j})\|^2} F(y^{n_j})$. Khi đó, $\langle F(y^{n_j}), q^{n_j} \rangle = 1$. Từ (3.15) suy ra

$$0 \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \|r_j q^{n_j}\| \leq \frac{\limsup_{j \rightarrow \infty} r_j}{\liminf_{j \rightarrow \infty} \|F(y^{n_j})\|} \leq \frac{\lim_{j \rightarrow \infty} r_j}{\|F(\bar{x})\|} = 0 \Rightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} \|r_j q^{n_j}\| = 0, \quad (3.16)$$

và

$$\langle F(y^{n_j}), x - y^{n_j} \rangle + r_j \langle F(y^{n_j}), q^{n_j} \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Sử dụng giả thiết giả đơn điệu (A_2) của F , ta được

$$\langle F(x + r_j q^{n_j}), x + r_j q^{n_j} - y^{n_j} \rangle \geq 0.$$

Kết hợp với điều kiện liên tục Lipschitz của F , ta có

$$\begin{aligned}
\langle F(x), x - y^{n_j} \rangle &= \langle F(x) - F(x + r_j q^{n_j}), x - y^{n_j} \rangle + \\
&\quad \langle F(x + r_j q^{n_j}), x + r_j q^{n_j} - y^{n_j} \rangle - \langle F(x + r_j q^{n_j}), r_j q^{n_j} \rangle \\
&\geq \langle F(x) - F(x + r_j q^{n_j}), x - y^{n_j} \rangle - \langle F(x + r_j q^{n_j}), r_j q^{n_j} \rangle \\
&\geq -L_F \|r_j q^{n_j}\| \|x - y^{n_j}\| - \|F(x + r_j q^{n_j})\| \|r_j q^{n_j}\|.
\end{aligned}$$

Lấy giới hạn bất đẳng thức cuối cùng khi $j \rightarrow \infty$ và sử dụng (3.16), ta suy ra

$$\langle F(x), x - \bar{x} \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle F(x), x - y^{n_j} \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Vì vậy, $\bar{x}$ là một nghiệm của bài toán $VI(C, F)$.

Định lý 3.1. Cho các ánh xạ giá F và G thỏa mãn các giả thiết (B_1) , (B_2) , (B_3) , (B_4) và các tham số thỏa mãn điều kiện (B_5) , hai dãy số $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ trong thuật toán (RLPA) hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất u của Bài toán 3.1.

Chứng minh. Giả sử rằng u là nghiệm duy nhất của Bài toán 3.1. Từ Bước 3 và Bổ đề 1.11, ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - u\| &= \|t^k - \alpha_k \tau G(t^k) - u\| \\
&= \|[t^k - \alpha_k \tau G(t^k)] - [u - \alpha_k \tau G(u)] - \alpha_k \tau G(u)\| \\
&\leq \|[t^k - \alpha_k \tau G(t^k)] - [u - \alpha_k \tau G(u)]\| + \alpha_k \tau \|G(u)\| \\
&\leq (1 - \alpha_k \delta) \|t^k - u\| + \alpha_k \tau \|G(u)\|, \\
&= (1 - \alpha_k \delta) \|\tau_k(z^k - u) + (1 - \tau_k)(\Xi z^k - u)\| + \alpha_k \tau \|G(u)\| \\
&\leq (1 - \alpha_k \delta) [\tau_k \|z^k - u\| + (1 - \tau_k) \|\Xi z^k - u\|] + \alpha_k \tau \|G(u)\| \\
&\leq (1 - \alpha_k \delta) \|z^k - u\| + \alpha_k \tau \|G(u)\| \tag{3.17} \\
&\leq (1 - \alpha_k \delta) \|x^k - u\| + \alpha_k \delta \frac{\tau \|G(u)\|}{\delta} \\
&\leq \max \left\{ \|x^k - u\|, \frac{\tau \|G(u)\|}{\delta} \right\} \\
&\leq \dots \\
&\leq \max \left\{ \|x^0 - u\|, \frac{\tau \|G(u)\|}{\delta} \right\},
\end{aligned}$$

với $\delta = 1 - \sqrt{1 - \tau(2\beta - \tau L_G^2)} \in (0, 1)$ và $\tau \in (0, \frac{2\beta}{L_G^2})$. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ bị chặn. Do đó, các dãy $\{y^k\}$, $\{t^k\}$ và $\{z^k\}$ cũng bị chặn.

Sử dụng các Bổ đề 1.11, Bổ đề 3.2 và bất đẳng thức

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x + y \rangle, \quad \forall x, y \in \mathbb{H},$$

ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - u\|^2 &= \|[t^k - \alpha_k \tau G(t^k)] - [u - \alpha_k \tau G(u)] - \alpha_k \tau G(u)\|^2 \\ &\leq \|[t^k - \alpha_k \tau G(t^k)] - [u - \alpha_k \tau G(u)]\|^2 - 2\alpha_k \tau \langle G(u), x^{k+1} - u \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_k \delta)^2 \|t^k - u\|^2 - 2\alpha_k \tau \langle G(u), x^{k+1} - u \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_k \delta) \|\tau_k(z^k - u) + (1 - \tau_k)\Xi(z^k - u)\|^2 \\ &\quad - 2\alpha_k \tau \langle G(u), x^{k+1} - u \rangle \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} &\leq (1 - \alpha_k \delta) \|z^k - u\|^2 - 2\alpha_k \tau \langle G(u), x^{k+1} - u \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_k \delta) \left[\|x^k - u\|^2 - \nu(1 - \nu L_F - 2\gamma_k) \|x^k - y^k\|^2 \right. \\ &\quad \left. - (\nu - \xi_k^2 L_F) \|z^k - y^k\|^2 - (1 - \nu) \|z^k - x^k\|^2 \right] \\ &\quad - 2\alpha_k \tau \langle G(u), x^{k+1} - u \rangle. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Đặt $a_k := \|x^k - u\|^2$ với mọi $k \geq 0$. Ta xét hai trường hợp của dãy a_k như sau:

Trường hợp 1. Tồn tại một số tự nhiên $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_{k+1} \leq a_k$ với mọi $k \geq k_0$. Khi đó, ta lấy giới hạn $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = A \in [0, \infty)$. Chuyển qua giới hạn của (3.19), dưới giả thiết (A_5) của các hệ số, ta được

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - x^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|z^k - x^k\| = 0. \quad (3.20)$$

Sử dụng $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ và $\{G(t^k)\}$ là dãy bị chặn, suy ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - t^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \tau \|G(t^k)\| = 0. \quad (3.21)$$

Từ tính chất bị chặn của dãy $\{x^k\}$, khi đó tồn tại một dãy con $\{x^{k_j}\}$ của $\{x^k\}$ hội tụ yếu về $\bar{x} \in \mathbb{H}$ và

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^k \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^{k_j} \rangle = \langle G(u), u - \bar{x} \rangle. \quad (3.22)$$

Sử dụng Bổ đề 3.3 với hệ thức $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - x^k\| = 0$, ta có $\bar{x} \in \text{Sol}(C, F)$ (tức là một nghiệm của bài toán $VI(C, F)$).

Tiếp theo, ta chứng minh $\bar{x} \in \text{Fix}(\Xi)$. Thật vậy, từ (3.18) và đẳng thức sau

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1-\lambda)\|y\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{H}, \lambda \in \mathbb{R},$$

ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - u\|^2 &\leq (1 - \alpha_k \delta) \|\tau_k(z^k - u) + (1 - \tau_k)\Xi(z^k - u)\|^2 \\ &\quad - 2\alpha_k \tau \langle G(u), x^{k+1} - u \rangle \\ &= (1 - \alpha_k \delta) [\tau_k \|z^k - u\|^2 + (1 - \tau_k) \|\Xi(z^k - u)\|^2 \\ &\quad - \tau_k(1 - \tau_k) \|z^k - \Xi z^k\|^2] - 2\alpha_k \tau \langle G(u), x^{k+1} - u \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_k \delta) \|z^k - u\|^2 - \tau_k(1 - \tau_k)(1 - \alpha_k \delta) \|z^k - \Xi z^k\|^2 \\ &\quad - 2\alpha_k \tau \langle G(u), x^{k+1} - u \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_k \delta) \|z^k - u\|^2 - c(1 - d)(1 - \alpha_k \delta) \|z^k - \Xi z^k\|^2 \\ &\quad - 2\alpha_k \tau \langle G(u), x^{k+1} - u \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_k \delta) \|x^k - u\|^2 - c(1 - d)(1 - \alpha_k \delta) \|z^k - \Xi z^k\|^2 \\ &\quad - 2\alpha_k \tau \langle G(u), x^{k+1} - u \rangle, \end{aligned} \tag{3.23}$$

với bất đẳng thức (3.23) được suy ra từ Bổ đề 3.2. Lấy giới hạn $k \rightarrow \infty$ của (3.23), ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z^k - \Xi z^k\| = 0.$$

Khi đó, từ giới hạn $x^{k_j} \rightarrow \bar{x}$, (3.20) và tính chất nửa đóng tại 0 của ánh xạ $I - S$, ta được $z^{k_j} \rightarrow \bar{x}$ và $\bar{x} \in \text{Fix}(\Xi)$. Như vậy, $\bar{x} \in \Omega$. Hơn nữa,

$$\|t^k - z^k\| = (1 - \tau_k) \|z^k - \Xi z^k\| \leq (1 - c) \|z^k - \Xi z^k\| \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty.$$

Từ (3.21), ta có

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \|x^{k+1} - t^k\| + \|t^k - z^k\| + \|z^k - x^k\| \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty.$$

Kết hợp điều này với (3.22) và $\bar{x} \in \Omega$, ta có

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^{k+1} \rangle &= \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^k \rangle + \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), x^k - x^{k+1} \rangle \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^k \rangle + \limsup_{k \rightarrow \infty} \|G(u)\| \|x^k - x^{k+1}\| \\ &= \langle G(u), u - \bar{x} \rangle \end{aligned}$$

$$\leq 0,$$

ở đây, bất đẳng thức cuối được suy ra từ $\bar{x} \in \Omega$ và nghiệm duy nhất u của Bài toán 3.1. Từ (3.23), kéo theo

$$a_{k+1} \leq (1 - \alpha_k \delta) a_k + 2\alpha_k \tau \langle G(u), u - x^{k+1} \rangle.$$

Áp dụng Bổ đề 1.6, ta suy ra $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Do đó, tất cả các dãy $\{x^k\}$, $\{y^k\}$, $\{z^k\}$ và $\{t^k\}$ hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất u của Bài toán 3.1.

Trường hợp 2. Giả sử rằng không tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ là đơn điệu giảm. Vậy, tồn tại một số tự nhiên $k_1 > k_0$ sao cho $a_{k_1} < a_{k_1+1}$. Sử dụng Bổ đề 1.10, ta chỉ ra một dãy con $\{a_{\zeta(k)}\}$ của $\{a_k\}$ như sau:

$$\zeta(k) = \max\{i : k_1 \leq i \leq k, a_i \leq a_{i+1}\}.$$

Khi đó,

$$\zeta(k) \nearrow \infty, 0 \leq a_k \leq a_{\zeta(k)+1}, a_{\zeta(k)} \leq a_{\zeta(k)+1}, \quad \forall k \geq k_1. \quad (3.24)$$

Từ (3.17), ta có

$$\|x^{\zeta(k)+1} - u\| \leq (1 - \alpha_{\zeta(k)} \delta) \|z^{\zeta(k)} - u\| + \alpha_{\zeta(k)} \tau \|G(u)\|.$$

Sau đó, sử dụng tính bị chặn của $\{z^k\}$ và Bổ đề 3.2, ta được

$$\begin{aligned} \|x^{\zeta(k)} - u\| - \|z^{\zeta(k)} - u\| &\leq \|x^{\zeta(k)} - u\| - \|x^{\zeta(k)+1} - u\| - \alpha_{\zeta(k)} \delta \|z^{\zeta(k)} - u\| \\ &\quad + \alpha_{\zeta(k)} \tau \|G(u)\| \\ &\leq -\alpha_{\zeta(k)} \delta \|z^{\zeta(k)} - u\| + \alpha_{\zeta(k)} \tau \|G(u)\|. \end{aligned}$$

Kết hợp điều này với Bổ đề 3.2 và (A_5) , suy ra

$$\begin{aligned} &\nu(1 - \nu L_F - 2\gamma_{\zeta(k)}) \|x^{\zeta(k)} - y^{\zeta(k)}\|^2 \\ &\leq \|x^{\zeta(k)} - u\|^2 - \|z^{\zeta(k)} - u\|^2 \\ &= (\|x^{\zeta(k)} - u\| - \|z^{\zeta(k)} - u\|)(\|x^{\zeta(k)} - u\| + \|z^{\zeta(k)} - u\|) \\ &\leq [-\alpha_{\zeta(k)} \delta \|z^{\zeta(k)} - u\| + \alpha_{\zeta(k)} \tau \|G(u)\|](\|x^{\zeta(k)} - u\| + \|z^{\zeta(k)} - u\|) \\ &\rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Do đó

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{\zeta(k)} - y^{\zeta(k)}\| = 0.$$

Tương tự, ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{\zeta(k)} - z^{\zeta(k)}\| = 0.$$

Từ $\{x^{\zeta(k)}\}$ bị chặn, khi đó có một dãy con hội tụ yếu. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x^{\zeta(k)} \rightharpoonup \hat{x}$ và

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^{\zeta(k)} \rangle = \langle G(u), u - \hat{x} \rangle.$$

Từ Bổ đề 3.3, suy ra $\hat{x} \in \text{Sol}(C, F)$. Khi đó,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^{\zeta(k)} \rangle = \langle G(u), u - \hat{x} \rangle \leq 0. \quad (3.25)$$

Từ (3.23) và (3.24), với mọi $k \geq k_1$, ta có

$$\begin{aligned} & c(1-d)(1-\alpha_{\zeta(k)}\delta)\|z^{\zeta(k)} - \Xi z^{\zeta(k)}\|^2 \\ & \leq (\|x^{\zeta(k)} - u\|^2 - \|x^{\zeta(k)+1} - u\|^2) - \alpha_{\zeta(k)}\delta\|x^{\zeta(k)} - u\|^2 \\ & \quad - 2\alpha_{\zeta(k)}\tau\langle G(u), x^{\zeta(k)+1} - u \rangle \\ & \leq -\alpha_{\zeta(k)}\delta\|x^{\zeta(k)} - u\|^2 - 2\alpha_{\zeta(k)}\tau\langle G(u), x^{\zeta(k)+1} - u \rangle \\ & \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Khi đó, ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z^{\zeta(k)} - \Xi z^{\zeta(k)}\| = 0.$$

Nhắc lại: $x^{\zeta(k)} \rightharpoonup \hat{x}$, nên $z^{\zeta(k)} \rightharpoonup \hat{x}$, sử dụng tính chất nửa đóng tại 0 của ánh xạ Ξ , suy ra $\hat{x} \in \text{Fix}(\Xi)$ và do đó $\bar{x} \in \Omega$. Tương tự như Trường hợp 1, ta có

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle G(u), u - x^{\zeta(k)+1} \rangle \leq 0.$$

Từ kết quả (3.23), ta rút ra:

$$\begin{aligned} a_{\zeta(k)+1} &= \|x^{\zeta(k)+1} - u\|^2 \\ &\leq (1-\alpha_{\zeta(k)}\delta)\|x^{\zeta(k)} - u\|^2 - c(1-d)(1-\alpha_{\zeta(k)}\delta)\|z^{\zeta(k)} - \Xi z^{\zeta(k)}\|^2 \\ &\quad - 2\alpha_{\zeta(k)}\tau\langle G(u), x^{\zeta(k)+1} - u \rangle \\ &\leq (1-\alpha_{\zeta(k)}\delta)a_{\zeta(k)} + 2\alpha_{\zeta(k)}\tau\langle G(u), u - x^{\zeta(k)+1} \rangle \\ &\leq (1-\alpha_{\zeta(k)}\delta)a_{\zeta(k)+1} + 2\alpha_{\zeta(k)}\tau\langle G(u), u - x^{\zeta(k)+1} \rangle. \end{aligned}$$

Tức là

$$\delta a_{\zeta(k)+1} \leq 2\tau\langle G(u), u - x^{\zeta(k)+1} \rangle,$$

kết hợp với (3.25), ta có $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\zeta(k)+1} = 0$. Từ $0 \leq a_k \leq a_{\zeta(k)+1}$ của (3.24), ta có $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Điều phải chứng minh.

3.1.4 Các ví dụ tính toán

Trong mục này, ta xét ánh xạ giá $G : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$, được tham khảo trong tài liệu [3]:

$$G(x) = Qx + q, \quad (3.26)$$

với $q \in \mathbb{R}^s, Q = AA^\top + B + D$, trong đó, A, B, D là các ma trận cỡ $s \times s$, B là ma trận đối xứng và D là một ma trận đường chéo với các phần tử trên đường chéo không âm, do đó, ma trận Q là nửa xác định dương. Rõ ràng, G là β -đơn điệu mạnh và L_G -liên tục Lipschitz, ở đây, $\beta = \min\{t : t \in \text{eig}(Q)\}$ là giá trị riêng nhỏ nhất của Q và $L_G = \|Q\|$. Tiếp theo, ta cho miền ràng buộc C và ánh xạ giá $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ như sau:

$$C = \{x \in \mathbb{H} : \|x\|^2 \leq R^2, \langle r, x \rangle \leq l\}, \quad (3.27)$$

$$F(x) = [g \sin(p_1 \|x\| + q_1) + h \cos(e \|x\| + f) + m]z, \quad (3.28)$$

ở đây $R, p_1, q_1, e, f \in \mathbb{R}, l > 0, g > 0, h > 0, m \in (g + h, \infty)$, $(z, r) \in \mathbb{H} \times \mathbb{H}$. Khi đó C là miền lồi, đóng, khác rỗng và ánh xạ F có tính chất sau:

Mệnh đề 3.1. *Cho ánh xạ $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ được định nghĩa trong (3.28). Khi đó,*

(i) *Ánh xạ F là giả đơn điệu;*

(ii) *Ánh xạ F là L_F -liên tục Lipschitz với $L_F = (g|p| + h|e|)\|z\|$.*

Chứng minh: Với mỗi $x, y \in \mathbb{H}$, giả sử rằng $\langle F(y), x - y \rangle \geq 0$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle F(y), x - y \rangle \\ &= \langle [g \sin(p_1 \|y\| + q_1) + g \cos(e \|y\| + f) + m]z, x - y \rangle \\ &= [g(\sin(p_1 \|y\| + q_1) + 1) + h(\cos(e \|y\| + f) + 1) + (m - g - h)] \langle z, x - y \rangle. \end{aligned}$$

Từ $m \in (g + h, +\infty)$, suy ra $\langle z, x - y \rangle \geq 0$ và

$$\begin{aligned}
\langle F(x), x - y \rangle &= \langle [g \sin(p_1 \|x\| + q_1) + h \cos(e\|x\| + f) + m]z, x - y \rangle \\
&= [g(1 + \sin(p_1 \|x\| + q_1)) + h(1 + \cos(e\|x\| + f))] \\
&\quad + (m - g - h) \langle z, x - y \rangle \\
&\geq (m - g - h) \langle z, x - y \rangle \\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

do đó, ánh xạ F là giả đơn điệu trên $\mathbb{H}$.

Để chứng minh (ii), ta thấy, với mọi $x, y \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(y)\| &= \|[g \sin(p_1 \|x\| + q_1) + h \cos(e\|x\| + f) + m]z \\
&\quad - [g \sin(p_1 \|y\| + q_1) + h \cos(e\|y\| + f) + m]z\| \\
&= \|z\| |g[\sin(p_1 \|x\| + q_1) - \sin(p_1 \|y\| + q_1)] + h[\cos(e\|x\| + f) \\
&\quad - \cos(e\|y\| + f)]| \\
&= \|z\| |g[\sin(p_1 \|x\| + q_1) - \sin(p_1 \|y\| + q_1)] + h[\cos(e\|x\| + f) \\
&\quad - \cos(e\|y\| + f)]| \\
&\leq \|z\| |g[\sin(p_1 \|x\| + q_1) - \sin(p_1 \|y\| + q_1)]| \\
&\quad + h\|z\| |\cos(e\|x\| + f) - \cos(e\|y\| + f)| \\
&= 2g\|z\| \left| \cos\left(\frac{p_1(\|x\| + \|y\|)}{2} + q_1\right) \right| \left| \sin\left(\frac{p_1(\|x\| - \|y\|)}{2}\right) \right| \\
&\quad + 2h\|z\| \left| \sin\left(\frac{e(\|x\| + \|y\|)}{2} + f\right) \right| \left| \sin\left(\frac{e(\|x\| - \|y\|)}{2}\right) \right| \\
&\leq 2g\|z\| \left| \sin\left(\frac{p_1(\|x\| - \|y\|)}{2}\right) \right| + 2h\|z\| \left| \sin\left(\frac{e(\|x\| - \|y\|)}{2}\right) \right|.
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức:

$$|\sin t| \leq |t|, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

Ta suy ra

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(y)\| &\leq 2g\|z\| \left| \sin\left(\frac{p_1(\|x\| - \|y\|)}{2}\right) \right| + 2h\|z\| \left| \sin\left(\frac{e(\|x\| - \|y\|)}{2}\right) \right| \\
&\leq (g|p_1| + h|e|)\|z\| |\|x\| - \|y\|| \\
&\leq (g|p_1| + h|e|)\|z\| \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{H}.
\end{aligned}$$

Vì vậy, ánh xạ giá F là liên tục Lipschitz với hằng số $L_F = (g|p| + h|e|)\|z\|$ trên $\mathbb{H}$.

Xét Bài toán 3.1, với C, F và G được cho bởi (3.26), (3.27), (3.28). Ta tập trung vào hai vấn đề chính của thuật toán ($RLPA$):

- Cung cấp một số kết quả giải số để mô tả sự hội tụ của thuật toán ($RLPA$), với các điểm xuất phát và bộ tham số khác nhau.
- So sánh thuật toán ($RLPA$) với thuật toán đạo hàm tăng cường kết hợp chiều co quán tính ($IPCEA$) đề xuất bởi Tan và các cộng sự [75], và thuật toán chiếu chính quy (RPA) đề xuất bởi Moudafi và Hieu [41].

Ta chọn các tham số cho các thuật toán như sau:

- Với thuật toán ($RLPA$):

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{1}{2} \min \left\{ 1, \frac{1}{L_F} \right\}, a = \frac{1 - \nu L_F}{2}, b = \frac{1}{100} \min \left\{ \frac{1}{L_F}, \sqrt{\frac{\nu}{L_F}} \right\}, \\ \xi_k &= b + \frac{b}{5k + 10}, \gamma_k = \frac{2}{25} \min \left\{ \frac{1 - \xi_k^2 L_F^2}{2}, \frac{1 - \nu L_F - a}{2} \right\}, \\ \tau_k &= 0.1 + \frac{1}{10k + 15}, \tau = \frac{\beta}{L_G^2}, \alpha_k = \frac{1}{2k + 1}, \quad \forall k \geq 0.\end{aligned}$$

- Với thuật toán đạo hàm tăng cường kết hợp chiều co quán tính ($IPCEA$):

$$\begin{aligned}\theta &= 0.2, \epsilon_n = \frac{100}{(n + 1)^2}, \mu = 0.4, \chi_1 = 0.6, \\ \xi_n &= \frac{1}{(n + 1)^{1.1}}, \phi = 1, \sigma_n = \frac{1}{n + 1}, \gamma = \frac{1.7\beta}{L_F^2}, x^1 = x^0.\end{aligned}$$

- Với thuật toán chiếu chính quy (RPA):

$$\lambda_1 = \lambda_0 = \alpha_0 = 1, \mu = 0.4, \alpha_n = n^{-0.7}, y^0 = x^0.$$

Tất cả các phép chiếu lên tập C được tính toán bởi hàm *quadprog* trong Matlab 2018a Optimization Toolbox. Các hình chiếu lên nửa không gian được tính toán dưới dạng hiển như công thức (3.4). Tất cả các thuật toán được chạy trên máy tính PC Desktop Intel(R) Core(TM) i7-12700F CPU @ 2.10 GHz 2.50 GHz, RAM 32.00 GB.

Thử nghiệm 1. Ta chạy thuật toán (*RLPA*) trong $\mathbb{R}^s$ với $s = 5$ và $\Xi : \mathbb{R}^s \rightarrow C$ được cho bởi $\Xi x = \Pi_C(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^s$. Điểm khởi đầu $x^0 = (1, 0, 1, 0, 0.5)^\top$. Các tham số $R, g, p, q, h, e, f, m, l$ và vector r, z được chọn ngẫu nhiên như sau:

$$R = 5, l = 2, g = 3, p_1 = -5, q_1 = 7, h = 3, e = 8, f = 2, m = g + f + 1, \\ r = (1, -3, 5, 9, 4)^\top, z = (12, 5, 3, -7, 2)^\top.$$

bằng Matlab, ta tính được:

$$L_F = (g|p_1| + h|e|)\|z\| = 592.7487.$$

Ma trận A, B, D của ánh xạ giá G được chọn ngẫu nhiên như sau:

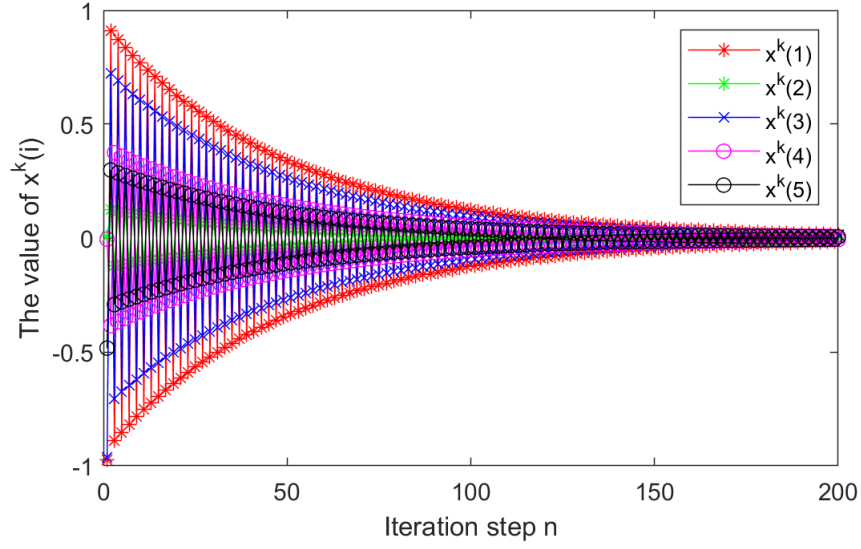
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & 7 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & -5 & 3 \\ -1 & 9 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{(5 \times 5)}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & -5 & 7 & 9 \\ -3 & 5 & 0 & 6 & -8 \\ -4 & -7 & -6 & 0 & 1 \\ -5 & -9 & 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(5 \times 5)}, \\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{(5 \times 5)}, q = (1, 7, -3, 22, 6)^\top.$$

Khi đó, giá trị riêng và chuẩn của Q được tính toán như sau:

$$\text{eig}(Q) = \{221.2357, 144.1649, 3.3983, 24.9611, 22.2399\}, \|Q\| = 222.3145.$$

Điều này thỏa mãn hằng số đơn điệu mạnh của G là $\beta = 3.3983$ và hằng số liên tục Lipschitz của G là $L_G = 222.3145$. Kết quả tính toán của thuật toán (*RLPA*) được trình bày trong Hình 3.1, Bảng 3.1 và Bảng 3.2.

Thử nghiệm 2. Để so sánh hai thuật toán (*RLPA*), (*IPCEA*) và (*RPA*) để giải Bài toán 3.1, ta cho Ξ là ánh xạ đồng nhất và các dữ liệu về tham số, điểm xuất phát giống như trong Thử nghiệm 1. Thực tế, nghiệm chính xác u là chưa biết, ta sử dụng $\Gamma_k = \|x^{k+1} - x^k\|$ để



Hình 3.1: Sự hội tụ của dãy $\{x^k\}$ trong thuật toán (RLPA) với sai số $\epsilon = 10^{-3}$. Nghiệm xấp xỉ là $x^{392} = (0.4162, 0.0703, 0.2792, -0.1549, 0.1304)^\top$.

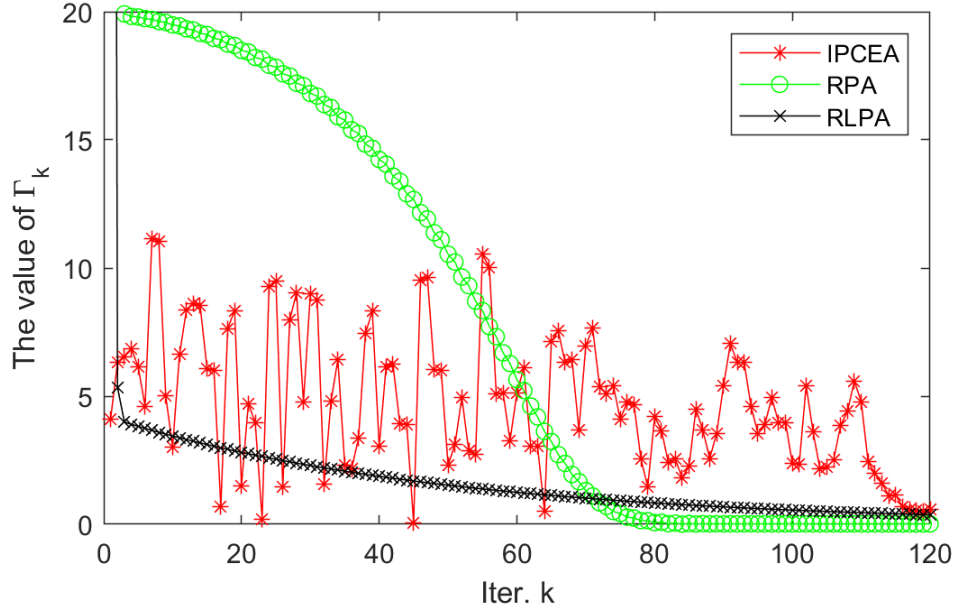
Test	Start. x^0	Iter. k	Times
1	$(1, 0, 1, 0, 0.5)^\top$	392	8.9531
2	$(51, 0, 1, 0, 0.5)^\top$	423	11.8281
3	$(1, 20, 1, 0, 0.5)^\top$	429	10.2656
4	$(1, 0, 31, 0, 0.5)^\top$	420	10.4219
5	$(1, 0, 1, 100, 25)^\top$	386	9.4375

Bảng 3.1: Số bước lặp(Iter.) và thời gian chạy máy (Times) với các điểm xuất phát khác nhau (Start.) x^0 .

Test	ξ_k	γ_k	τ_k	α_k	Iter.	Times
1	$b + \frac{b}{5k+10}$	$\frac{2}{25} \min \left\{ \frac{1-\xi_k^2 L_F^2}{2} \right\}$	$0.1 + \frac{1}{10k+15}$	$\frac{1}{2k+1}$	392	8.9531
2	$b + \frac{b}{15k+100}$	$\frac{2}{25} \min \left\{ \frac{1-\xi_k^2 L_F^2}{2} \right\}$	$0.1 + \frac{1}{10k+15}$	$\frac{1}{2k+1}$	386	19.5156
3	$b + \frac{b}{5k+10}$	$\frac{1}{50} \min \left\{ \frac{1-\xi_k^2 L_F^2}{2} \right\}$	$0.1 + \frac{1}{10k+15}$	$\frac{1}{2k+1}$	1624	41.5938
4	$b + \frac{b}{5k+10}$	$\frac{2}{25} \min \left\{ \frac{1-\xi_k^2 L_F^2}{2} \right\}$	$0.01 + \frac{1}{10k+150}$	$\frac{1}{2k+1}$	389	10.0625
5	$b + \frac{b}{5k+10}$	$\frac{2}{25} \min \left\{ \frac{1-\xi_k^2 L_F^2}{2} \right\}$	$0.1 + \frac{1}{10k+15}$	$\frac{1}{20k+100}$	387	9.6875

Bảng 3.2: Số bước lặp (Iter.) và thời gian chạy máy (Times) với các tham số khác nhau,

với $a = \frac{1-\nu L_F}{2}$, $b = \frac{1}{100} \min \left\{ \frac{1}{L_F}, \sqrt{\frac{\nu}{L_F}} \right\}$ và $\tau = \frac{\beta}{L_G^2}$.



Hình 3.2: Biểu diễn của sai số $\{\Gamma_k\}$ với điểm xuất phát $x^0 = (1, 0, 1, 0, 0.5)^\top$.

đo sai số bước lặp thứ k của thuật toán ($RLPA$) và (RPA), và sử dụng $\Gamma_k = \|u^k - \Pi_C[u^k - \chi_k F(u^k)]\|$ để đo sai số bước lặp thứ k cho thuật toán ($IPCEA$). Các kết quả được cho trong Hình 3.2.

Thử nghiệm 3. Ta tính toán trong không gian Hilbert vô hạn chiều $\mathbb{H} = L^2[0, 1]$ với tích vô hướng

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt, \quad \forall x, y \in \mathbb{H},$$

và chuẩn

$$\|x\| = \sqrt{\int_0^1 x^2(t)dt}, \quad \forall x \in \mathbb{H}.$$

Ràng buộc C và ánh xạ giá F định nghĩa trong (3.27) và (3.28). Ta so sánh thuật toán ($RLPA$) với hai thuật toán ($IPCEA$) và (RPA) với các điểm xuất phát khác nhau x^0 . Kết quả tính toán so sánh được trình bày trong Bảng 3.3.

Từ kết quả thử nghiệm tính toán được cho bởi Hình 3.1 và các Bảng 3.1, Bảng 3.2, kết quả so sánh trong Bảng 3.3 và Hình 3.2 của thuật toán chiếu nổi lờng ($RLPA$) với hai thuật toán: Thuật toán đạo hàm tăng cường kết

Algorithm	$x^0 = 2 \cos t$		$x^0 = 3 \sin t$		$x^0 = 3t^3 + 2t$		$x^0 = 2e^t + t$	
	Γ_k	Times	Γ_k	Times	Γ_k	Times	Γ_k	Times
(IPCEA)	4.9e-10	306.2	7.3e-10	295.9	1.8e-14	255.3	0.6e-9	416.2
(RPA)	2.5e-13	197.6	2.5e-14	209.2	7.3e-15	177.1	9.1e-10	308.1
(RLPA)	7.2e-15	145.9	8.9e-15	199.3	4.0e-17	98.4	8.3e-12	205.1

Bảng 3.3: Kết quả so sánh với xuất phát điểm khác nhau trong không gian $L^2[0, 1]$.

hợp chiếu co quán tính (*IPCEA*) và thuật toán chiếu chính quy (*RPA*), ta có các nhận xét như sau:

- Tốc độ hội tụ của thuật toán (*RLPA*) là rất nhạy với các dãy tham số $\{\xi_k\}, \{\gamma_k\}, \{\tau_k\}$ và $\{\alpha_k\}$;
- Thời gian chạy máy (giây) và số bước lặp của thuật toán (*RLPA*) nhỏ hơn các thuật toán (*IPCEA*) và (*RPA*) khi giải Bài toán 3.1.

3.2 Phương pháp chiếu co

3.2.1 Thuật toán (*PCA*)

Ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động $BVI(C, F, G)$, như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \text{Sol}(C, F), \text{ sao cho } \langle G(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in \text{Sol}(C, F), \quad (3.29)$$

ở đây, ánh xạ giá $F : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ sao cho $F(x) = Qx + q$, ma trận $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận phản đối xứng, $q \in \mathbb{R}^n$ là một véc tơ, được chọn sao cho F là giả đơn điệu và miền ràng buộc C được cho như sau

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\},$$

trong đó, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ là một ma trận và véc tơ $b \in \mathbb{R}^m$. Ánh xạ giá $G : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ thoả mãn các điều kiện sau:

(C_1) G đơn điệu mạnh với hệ số $\beta > 0$,

$$\langle G(x) - G(y), x - y \rangle \geq \beta \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C;$$

(C_2) G liên tục Lipschitz với hệ số $\mathbb{L} > 0$,

$$\|G(x) - G(y)\| \leq \mathbb{L} \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C.$$

Thuật toán 3.2. (*Thuật toán chiếu co (PCA)*)

Bước 1. Cho $x^0 \in C, \eta > 0$ và

$$\begin{cases} \tau := 1 - \sqrt{1 - \mu(2\beta - \mu\mathbb{L}^2)} \\ \eta > \max \left\{ -6\tau_1(Q), \frac{\mathbb{L}\|Q\|(\mathbb{L} + \sqrt{\mathbb{L}^2 - \beta^2})}{\beta^2}, \frac{-2\tau_1(Q)(\beta^2 + \mathbb{L}^2)}{\beta^2} \right\}, \\ \mu \in \left(0, \frac{2\beta}{\mathbb{L}^2}\right), \alpha_k \in \left(0, \frac{2\mu\beta - 2\tau}{\mu^2\mathbb{L}^2 - \tau^2}\right), \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty. \end{cases} \quad (3.30)$$

Bước 2. ($k = 0, 1, \dots$) Tính y^k

$$\begin{aligned} y^k &= \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle q, x \rangle + \frac{\eta}{2} \|x - x^k\|^2 : x \in C \right\}, \\ x^{k+1} &= \Pi_C [y^k - \mu\alpha_k G(y^k)]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Bước 3. Đặt $k := k + 1$, quay lại Bước 2.

Chú ý 3.1. Trong công thức (3.31), ta đã sử dụng kỹ thuật phân tích DC [10] để tính toán cho y^k , như sau:

$$\begin{aligned} y^k &= \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle q, x \rangle + \frac{\eta}{2} \|x - x^k\|^2 : x \in C \right\} \\ &= \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle q, x \rangle + \frac{\eta}{2} (\|x\|^2 - 2\langle x^k, x \rangle + \|x^k\|^2) : x \in C \right\} \\ &= \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \langle (Q + \eta I)x, x \rangle + \langle q, x \rangle - \eta \langle x^k, x \rangle + \frac{\eta}{2} \|x^k\|^2 : x \in C \right\} \\ &= \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \langle (Q + \eta I)x, x \rangle + \langle q, x \rangle + \delta_C(x) - \left[\eta \langle x^k, x - x^k \rangle + \frac{\eta}{2} \|x^k\|^2 \right] \right\} \\ &= \operatorname{argmin} \left\{ g(x) - [\langle w^k, x - x^k \rangle + h(x^k)] \right\}, \end{aligned}$$

ở đây $w^k \in \partial h(x^k)$, $g(x) = \frac{1}{2} \langle (Q + \eta I)x, x \rangle + \langle x, q \rangle + \delta_C(x)$, $h(x) = \frac{1}{2} \eta \|x\|^2$, $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận đơn vị, $\eta \neq 0$ và $\eta \geq -\tau_1(Q)$. Mỗi lần tính toán cho y^k trong (3.31), chúng ta thực hiện một lần bài toán phụ bằng thuật toán DC.

3.2.2 Định lý hội tụ

Định lý sau chỉ ra sự hội tụ của Thuật toán 3.2.

Định lý 3.2. Giả sử các hàm giá F, G thỏa mãn các giả thiết $(C_1), (C_2)$, các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ trong Thuật toán 3.2 hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x^* của bài toán $BVI(C, F, G)$.

Chứng minh. Chúng ta chứng minh từng bước theo các khẳng định sau
Khẳng định 1. ta có

$$\|y^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^k\|^2.$$

Thật vậy, nếu $\eta > -2\tau_1(Q) \geq 0$ thì bài toán quy hoạch toàn phương (3.31) là lồi mạnh, khi đó nghiệm duy nhất y^k thoả mãn bất đẳng thức biến phân đơn điệu mạnh sau

$$\langle Qy^k + q + \eta y^k - \eta x^k, x - y^k \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C. \quad (3.32)$$

Giả sử x^* là nghiệm duy nhất của bài toán (3.29) thì $\langle Qx^* + q, y - x^* \rangle \geq 0$ với mọi $y \in C$ và G là giả đơn điệu trên C , do $y^k \in C$, nên $\langle Qy^k + q, y^k - x^* \rangle \geq 0$. Thay x bởi $x^* \in C$ ở công thức (3.32), ta có

$$\begin{aligned} \eta \langle y^k - x^k, y^k - x^* \rangle &\leq \langle Qy^k + q, x^* - y^k \rangle \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

kết hợp với hằng đẳng thức

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{2}(\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|a - b\|^2), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n,$$

ta được

$$\eta \langle y^k - x^k, y^k - x^* \rangle = \frac{\eta}{2}(\|y^k - x^k\|^2 + \|y^k - x^*\|^2 - \|x^k - x^*\|^2) \leq 0.$$

Từ giả thiết $\eta > 0$, ta có

$$\|y^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^k\|^2.$$

Khẳng định 2. (xem [53]) Cho ánh xạ $S_k : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ như sau

$$S_k(x) := x - \mu\alpha_k G(x), \quad \forall x \in C,$$

khi đó, S_k là ánh xạ co

$$\|S_k(x) - S_k(y)\| \leq (1 - \tau\alpha_k)\|x - y\|, \quad \forall x, y \in C,$$

với hằng số $\tau := 1 - \sqrt{1 - \mu(2\beta - \mu\mathbb{L}^2)}$.

Thật vậy, vì G là β -đơn điệu mạnh L -liên tục Lipschitz C và phép chiếu Π_C không giãn và $\alpha_k \in \left(0, \frac{2\mu\beta - 2\tau}{\mu^2\mathbb{L}^2 - \tau^2}\right)$, nên ta có

$$\|S_k(y) - S_k(x)\|^2 = \|y - \mu\alpha_k G(y) - x + \mu\alpha_k G(x)\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \|y - x\|^2 - 2\mu\alpha_k \langle G(x) - G(y), x - y \rangle \\
&\quad + \mu^2 \alpha_k^2 \|G(x) - G(y)\|^2 \\
&\leq (1 - 2\mu\alpha_k\beta + \mu^2 \alpha_k^2 \mathbb{L}^2) \|y - x\|^2, \quad \forall x, y \in C \\
&\leq (1 - \tau\alpha_k)^2 \|x - y\|^2.
\end{aligned}$$

Vì vậy, $\|S_k(x) - S_k(y)\| \leq (1 - \tau\alpha_k) \|x - y\|$ với mọi $x, y \in C$.

Khẳng định 3.

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq (1 - \tau\alpha_k) [\|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^k\|^2] + \frac{\alpha_k \mu^2}{\tau} \|G(x^*)\|^2.$$

Thật vậy, do Π_C là ánh xạ không giãn kết hợp với *Khẳng định 2* và bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\| &= \|\Pi_C[y^k - \mu\alpha_k G(y^k)] - x^*\| \\
&= \|\Pi_C[y^k - \mu\alpha_k G(y^k)] - \Pi_C(x^*)\| \\
&\leq \|S_k(y^k) - S_k(x^*) - \mu\alpha_k G(x^*)\| \tag{3.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|S_k(y^k) - S_k(x^*)\| + \mu\alpha_k \|G(x^*)\| \\
&\leq (1 - \tau\alpha_k) \|y^k - x^*\| + \mu\alpha_k \|G(x^*)\|, \tag{3.34}
\end{aligned}$$

kết hợp điều này với *Khẳng định 1*, ta suy ra

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq [(1 - \tau\alpha_k) \|y^k - x^*\| + \mu\alpha_k \|G(x^*)\|]^2 \\
&= \left[(1 - \tau\alpha_k) \|y^k - x^*\| + \tau\alpha_k \left(\frac{\mu}{\tau} \|G(x^*)\| \right) \right]^2 \\
&\leq (1 - \tau\alpha_k) \|y^k - x^*\|^2 + \frac{\alpha_k \mu^2}{\tau} \|G(x^*)\|^2 \\
&\leq (1 - \tau\alpha_k) [\|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^k\|^2] + \frac{\alpha_k \mu^2}{\tau} \|G(x^*)\|^2.
\end{aligned}$$

Khẳng định 4. Nếu tồn tại giới hạn $A = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\|^2 < \infty$, thì ta có các điều sau:

$$(4a) \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y^k\| = 0;$$

$$(4b) \text{ Cả hai dãy } \{x^k\} \text{ và } \{y^k\} \text{ hội tụ đến } \bar{x} \in \text{Sol}(C, F).$$

Thật vậy, từ *Khẳng định 3*, suy ra

$$\|y^k - x^k\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2 + \frac{\alpha_k \mu^2}{\tau} \|G(x^*)\|^2.$$

sử dụng giả thiết $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$ và $A = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\|^2 < \infty$, ta có $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$, suy ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y^k\| = 0.$$

Từ (3.32), y^k là nghiệm duy nhất của bài toán bất đẳng thức biến phân với ánh xạ giá: $x \mapsto (Q + \eta I)x + q - \eta x^k$, ở đây, I là ma trận đơn vị. Vậy y^k là điểm bất động duy nhất của phép chiếu $\Pi_C \left\{ x - \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)x + q - \eta x^k] \right\}$. Từ giả thiết $\eta > 0$ và $\eta > -\tau_1(Q)$ với mọi $k \geq 0$, ta có

$$y^k = \Pi_C \left\{ y^k - \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)y^k + q - \eta x^k] \right\}. \quad (3.35)$$

Từ (3.35), suy ra

$$\begin{aligned} \|y^{k+1} - y^k\| &= \left\| \Pi_C \left\{ y^{k+1} - \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)y^{k+1} + q - \eta x^{k+1}] \right\} \right. \\ &\quad \left. - \Pi_C \left\{ y^k - \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)y^k + q - \eta x^k] \right\} \right\| \\ &\leq \left\| y^{k+1} - \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)y^{k+1} + q - \eta x^{k+1}] - y^k \right\| \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} &+ \left\| \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)y^k + q - \eta x^k] \right\| \\ &\leq \frac{\|Q\|}{\eta} \|y^{k+1} - y^k\| + \|x^{k+1} - x^k\|. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Như vậy

$$\|y^{k+1} - y^k\| \leq \frac{\eta}{\eta - \|Q\|} \|x^{k+1} - x^k\|. \quad (3.38)$$

Sử dụng *Khẳng định 2*, $x^k \in C$ và $x^{k+1} = \Pi_C[y^k - \mu\alpha_k G(y^k)]$, ta có $x^k = \Pi_C(x^k)$ và

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^k\| &= \|\Pi_C[y^k - \mu\alpha_k G(y^k)] - \Pi_C(x^k)\| \\ &\leq \|y^k - \mu\alpha_k G(y^k) - x^k\| \\ &\leq \|y^k - x^k\| + \mu\alpha_k \|G(y^k)\|. \end{aligned}$$

Lấy giới hạn khi $k \rightarrow \infty$, sử dụng tính bị chặn của $\{y^k\}$ và (4a), suy ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0.$$

Từ (3.38), ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^{k+1} - y^k\| = 0.$$

Kết hợp với (3.35) và tính không giãn của Π_C ,

$$\begin{aligned}
& \left\| y^k - \Pi_C \left[y^k - \frac{1}{\eta} (Qy^k + q) \right] \right\| \\
&= \left\| \Pi_C \left\{ y^k - \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)y^k + q - \eta x^k] \right\} - \Pi_C \left[y^k - \frac{1}{\eta} (Qy^k + q) \right] \right\| \\
&\leq \left\| y^k - \frac{1}{\eta} [(Q + \eta I)y^k + q - \eta x^k] - y^k + \frac{1}{\eta} (Qy^k + q) \right\| \\
&= \|y^k - x^k\|.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Từ $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - x^k\| = 0$ và (3.39), suy ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| y^k - \Pi_C \left[y^k - \frac{1}{\eta} (Qy^k + q) \right] \right\| = 0.$$

Với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại số tự nhiên $k_0 \in \mathbb{N}^* := \{1, 2, \dots\}$ sao cho

$$\left\| y^k - \Pi_C \left[y^k - \frac{1}{\eta} (Qy^k + q) \right] \right\| \leq \epsilon, \quad \forall k \geq k_0.$$

Từ Bổ đề 1.8, tồn tại số $l > 0$ sao cho

$$\begin{aligned}
d(y^k, \text{Sol}(C, F)) &\leq l \left\| y^k - \Pi_C \left[y^k - \frac{1}{\eta} (Qy^k + q) \right] \right\|, \quad \forall k \geq k_0 \\
&\leq l \|y^k - x^k\| \\
&\rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

bất đẳng thức cuối cùng được suy ra từ (3.39). Do $\text{Sol}(C, F)$ là tập đóng, khác rỗng nên tồn tại $z^k \in \text{Sol}(C, F)$ sao cho $d(y^k, \text{Sol}(C, F)) = \|y^k - z^k\|$. Suy ra $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - z^k\| = 0$. Sử dụng (3.37), ta có

$$\begin{aligned}
\|z^{k+1} - z^k\| &\leq \|z^{k+1} - y^{k+1}\| + \|y^{k+1} - y^k\| + \|y^k - z^k\| \\
&\leq \|z^{k+1} - y^{k+1}\| + \frac{\|Q\|}{\eta} \|y^{k+1} - y^k\| + \|x^{k+1} - x^k\| + \|y^k - z^k\| \\
&\rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

vì các dãy $\{y^k\}$ và $\{x^k\}$ bị chặn, nên $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - x^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - z^k\| = 0$ và $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$. Do F giả đơn điệu, nên tập nghiệm $\text{Sol}(C, F)$ là tập đóng và lồi, và có duy nhất một thành phần liên thông. Theo Bổ đề 1.9 và $\lim_{k \rightarrow \infty} \|z^{k+1} - z^k\| = 0$, tồn tại k_0 và hằng số c sao cho

$$z^k \in \text{Sol}(C, F) \text{ và } f(z^k) = c, \quad \forall k \geq k_0, \tag{3.40}$$

ở đây, hàm số f cho trong mục (1.2). Sử dụng $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - x^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|y^k - z^k\| = 0$ và (3.40), ta có số thực f_* là cực tiểu của bài toán $\min\{f(x) : x \in C\}$ sao cho $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f_*$. Từ sự hội tụ của $\{x^k\}$, tồn tại $\bar{x} \in \text{Sol}(C, F)$ và $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - \bar{x}\| = 0$. Khi đó, các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ cùng hội tụ về $\bar{x} \in \text{Sol}(C, F)$.

Khẳng định 5. Dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ hội tụ về nghiệm duy nhất x^* của bài toán $BVI(C, F, G)$.

Thật vậy, ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 5a. Tồn tại số $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho dãy $\{\|x^k - x^*\|^2\}_{k=k_0}^\infty$ là không tăng, khi đó tồn tại giới hạn $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\|^2 = A < +\infty$. Từ Bước 4, ta có $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y^k\| = 0$, $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ hội tụ về $\bar{x} \in \text{Sol}(C, F)$, khi đó,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \langle y^k - x^*, G(y^k) \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} [\langle y^k - x^*, G(y^k) - G(x^*) \rangle + \langle y^k - x^*, G(x^*) \rangle] \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} [\beta \|y^k - x^*\|^2 + \langle y^k - x^*, G(x^*) \rangle] \\ &= \beta A + \lim_{k \rightarrow \infty} \langle y^k - x^*, G(x^*) \rangle \\ &\geq \beta A \\ &\geq 0. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Để chỉ ra sự mâu thuẫn, ta giả sử $A > 0$, và chọn $\epsilon = \frac{1}{2}\beta A$. Từ (3.41), tồn tại số $k_1 \geq k_0$ sao cho

$$\langle y^k - x^*, G(y^k) \rangle \geq \beta A - \epsilon = \beta A - \frac{1}{2}\beta A = \frac{1}{2}\beta A > 0,$$

luôn đúng với mọi $k \geq k_1$. Khi đó,

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|\Pi_C(y^k - \mu\alpha_k G(y^k)) - \Pi_C(x^*)\|^2 \\ &\leq \|y^k - \mu\alpha_k G(y^k) - x^*\|^2 \\ &= \|y^k - x^*\|^2 - 2\alpha_k \mu \langle G(y^k), y^k - x^* \rangle + \mu^2 \alpha_k^2 \|G(y^k)\|^2 \\ &\leq \|y^k - x^*\|^2 - \mu\alpha_k \beta A + \alpha_k^2 M \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \mu\alpha_k \beta A + \alpha_k^2 M, \end{aligned}$$

ở đây $M := \sup\{\mu^2 \|G(y^k)\|^2 : k = 0, 1, \dots\} < \infty$ và bất đẳng thức cuối cùng được suy ra từ *Khẳng định 4*. Như vậy,

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \mu\alpha_k \beta A + \alpha_k^2 M, \quad \forall k \geq k_1.$$

Vậy suy ra

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 - \|x^{k_1} - x^*\|^2 + \mu\beta A \sum_{j=k_1}^k \alpha_j \leq M \sum_{j=k_1}^k \alpha_j^2.$$

Lấy giới hạn hai vế khi $k \rightarrow \infty$ và sử dụng $\sum_{k=k_1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$, ta có $\sum_{k=k_1}^{\infty} \alpha_k < \infty$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$ của điều kiện (3.30). Như vậy ta có $A = 0$, $x^k \rightarrow x^*$ and $y^k \rightarrow x^*$.

Trường hợp 5b. Giả sử không tồn tại số $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho dãy $\{\|x^k - x^*\|^2\}_{k=k_0}^{\infty}$ là không tăng. Đặt $a_k = \|x^k - x^*\|^2$. Ta chọn dãy con của dãy không âm $\{a_k\}$ theo Bổ đề 1.10 như sau:

$$\text{Đặt } \tau(k) = \max\{i \in \mathbb{N} : i \leq k, a_i \leq a_{i+1}\}.$$

Khi đó,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tau(k) = \infty, \tau(k) \leq \tau(k+1), a_{\tau(k)} \leq a_{\tau(k)+1}, 0 \leq a_k \leq a_{\tau(k)+1}, \quad \forall k \geq k_0. \quad (3.42)$$

Dùng *Khẳng định 3*, ta có

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq (1 - \tau\alpha_k) [\|x^k - x^*\|^2 - \|y^k - x^k\|^2] + \frac{\alpha_k \mu^2}{\tau} \|G(x^*)\|^2 \\ &\leq (1 - \tau\alpha_k) \|x^k - x^*\|^2 + \tau\alpha_k \frac{\mu^2 \|G(x^*)\|^2}{\tau^2} \\ &\leq \max \left\{ \|x^k - x^*\|^2, \frac{\mu^2 \|G(x^*)\|^2}{\tau^2} \right\} \\ &\leq \dots \\ &\leq \max \left\{ \|x^0 - x^*\|^2, \frac{\mu^2 \|G(x^*)\|^2}{\tau^2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Vì vậy, dãy $\{x^k\}$ bị chặn. Từ $\{a_{\tau(k)}\}$ là dãy không giảm, từ tính bị chặn của dãy $\{x^k\}$, tồn tại giới hạn

$$B = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{\tau(k)} < +\infty,$$

kết hợp điều này với (3.42), *Khẳng định 1* và (3.43), ta có

$$a_{\tau(k)} \leq a_{\tau(k)+1}$$

$$\begin{aligned}
&\leq [1 - \tau\alpha_{\tau(k)}] \|y^{\tau(k)} - x^*\|^2 + \frac{\alpha_{\tau(k)}\mu^2}{\tau} \|G(x^*)\|^2 \\
&\leq [1 - \tau\alpha_{\tau(k)}] a_{\tau(k)} + \frac{\alpha_{\tau(k)}\mu^2}{\tau} \|G(x^*)\|^2.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Lấy giới hạn hai vế khi $k \rightarrow \infty$ và từ $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{\tau(k)} = 0$, ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y^{\tau(k)} - x^*\|^2 = B.$$

Từ *Khẳng định 4*, ta lại có $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{\tau(k)} - y^{\tau(k)}\| = 0$ và các dãy con $\{x^{\tau(k)}\}$, $\{y^{\tau(k)}\}$ cùng hội tụ về $\hat{x} \in \text{Sol}(C, F)$. Từ (3.33) và *Khẳng định 2*, ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|S_k(y^k) - S_k(x^*) - \mu\alpha_k G(x^*)\|^2 \\
&= \|S_k(y^k) - S_k(x^*)\|^2 - 2\mu\alpha_k \langle G(x^*), S_k(y^k) - S_k(x^*) \rangle \\
&\quad + \mu^2 \alpha_k^2 \|G(x^*)\|^2 \\
&\leq (1 - \tau\alpha_k) \|y^k - x^*\|^2 + \mu^2 \alpha_k^2 \|G(x^*)\|^2 \\
&\quad - 2\mu\alpha_k \langle G(x^*), y^k - x^* - \mu\alpha_k [G(y^k) - G(x^*)] \rangle \\
&\leq (1 - \tau\alpha_k) \|x^k - x^*\|^2 + \mu^2 \alpha_k^2 \|G(x^*)\|^2 \\
&\quad - 2\mu\alpha_k \langle G(x^*), y^k - x^* - \mu\alpha_k [G(y^k) - G(x^*)] \rangle.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
a_{\tau(k)} &\leq a_{\tau(k)+1} \\
&\leq (1 - \tau\alpha_{\tau(k)}) a_{\tau(k)} + \mu^2 \alpha_{\tau(k)}^2 \|G(x^*)\|^2 \\
&\quad - 2\mu\alpha_{\tau(k)} \langle G(x^*), y^{\tau(k)} - x^* - \mu\alpha_{\tau(k)} [G(y^{\tau(k)}) - G(x^*)] \rangle.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\tau a_{\tau(k)} \leq -2\mu \langle G(x^*), y^{\tau(k)} - x^* - \mu\alpha_{\tau(k)} [G(y^{\tau(k)}) - G(x^*)] \rangle + \mu^2 \alpha_{\tau(k)} \|G(x^*)\|^2.$$

Lưu ý rằng

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle G(x^*), y^{\tau(k)} - x^* - \mu\alpha_{\tau(k)} [G(y^{\tau(k)}) - G(x^*)] \rangle = \langle G(x^*), \hat{x} - x^* \rangle \geq 0$$

với $\hat{x} \in \text{Sol}(C, F)$. Chuyển qua giới hạn hai vế khi $k \rightarrow \infty$, ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\tau(k)} = 0.$$

Từ (3.44) và $a_k \leq a_{\tau(k)+1}$ với mọi k , ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\tau(k)+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0.$$

Vì vậy, các dãy $\{x^k\}$, $\{y^k\}$ cùng hội tụ về nghiệm duy nhất x^* của bài toán $BVI(C, F, G)$.

□

3.2.3 Sai số tính toán

Trong mục này, chúng tôi trình bày về sai số tính toán của Thuật toán 3.2, áp dụng giải bài toán $BVI(C, F, G)$. Tại bước lặp thứ $k \geq 0$, từ thuật toán ta tính được các phần tử y^k và x^{k+1} , giả sử

$$\left\| y^k - \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle q, x \rangle + \frac{\eta}{2} \|x - x^k\|^2 : x \in C \right\} \right\| \leq \epsilon, \quad (3.45)$$

$$\|x^{k+1} - \Pi_C[y^k - \mu\alpha_k G(y^k)]\| \leq \epsilon, \quad (3.46)$$

sai số ϵ thường phụ thuộc vào hệ thống máy tính của chúng tôi. Khi tính toán trên máy tính, các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ chưa hẳn đã hội tụ về nghiệm x^* của bài toán $BVI(C, F, G)$. Với mỗi $\nu > 0$, phần tử x^k tạo ra bởi Thuật toán 3.2 được gọi là ν -nghiệm của bài toán $BVI(C, F, G)$ nếu $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \nu$. Vì thế, với mỗi số $\chi > 0$, ta định nghĩa tập Sol_χ là tập tất cả các χ -nghiệm của bài toán $BVI(C, F, G)$,

$$Sol_\chi = \{\bar{x} \in C : \|x^{k+1} - x^k\| \leq \chi\}.$$

Đặt

$$\begin{cases} \hat{y}^k &= \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle q, x \rangle + \frac{\eta}{2} \|x - x^k\|^2 : x \in C \right\}, \\ \hat{x}^{k+1} &= \Pi_C[\hat{y}^k - \mu\alpha_k G(\hat{y}^k)]. \end{cases}$$

Giả sử rằng tồn tại $\sigma > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$C \subseteq B(x^*, \sigma), \langle G(C), C \rangle := \{\langle G(x), y \rangle : x, y \in C\} \subseteq B(0, \delta).$$

Chọn các hệ số thoả mãn điều kiện (3.30) và

$$\begin{cases} 0 < \epsilon < \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}^2 > 4\mu\alpha_k\delta + \epsilon^2(1 + \tau)^2, \\ \Gamma_\eta := \frac{\eta\bar{\epsilon}^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} + \frac{2\tau_1(Q)\sigma^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} - 4\mu\alpha_k\delta - \epsilon^2(1 + \tau)^2 - 2\epsilon(1 + \tau)\sigma. \end{cases} \quad (3.47)$$

Chú ý, $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Gamma_\eta = \bar{\epsilon}^2 - 4\mu\alpha_k\delta - \epsilon^2(1 + \tau)^2 > 0$, khi đó tồn tại các hệ số thoả mãn (3.47).

Định lý 3.3. *Giả sử rằng*

(i) $Sol(C, F) \neq \emptyset$;

(ii) $2\mu\alpha_k\delta \leq \epsilon^2$, điều kiện (3.30) và (3.47), và các giả thiết $C_1 - C_2$ được thoả mãn. Chọn số dương K sao cho

$$K > \frac{4\sigma^2}{\Gamma_\eta};$$

(iii) dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ thu được từ các công thức (3.2)-(3.46).

Khi đó, tồn tại một số tự nhiên $j \in [0, K]$ sao cho

(a) $\|x^j - y^j\| \leq 2\bar{\epsilon}$;

(b) $\|x^k - y^k\| > 2\bar{\epsilon}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, j-1$;

(c) $x^j \in Sol_{\underline{\epsilon}}$, ở đây $\underline{\epsilon} := 2\bar{\epsilon} + 3\epsilon$.

Chúng minh. Với mỗi $k \geq 0$, đặt

$$\bar{x}^{k+1} = \Pi_C[y^k - \mu\alpha_k F(y^k)].$$

Từ Khẳng định 2 của Định lý 3.2, ta có

$$\|\hat{x}^{k+1} - \bar{x}^{k+1}\| \leq \tau \|\hat{y}^k - y^k\| \leq \tau\epsilon,$$

kết hợp với (3.46), ta có

$$\|x^{k+1} - \hat{x}^{k+1}\| \leq \|x^{k+1} - \bar{x}^{k+1}\| + \|\bar{x}^{k+1} - \hat{x}^{k+1}\| \leq \epsilon(1 + \tau). \quad (3.48)$$

Thay x bởi $x^* \in C$ trong (3.32) và áp dụng với $y^k := \hat{y}^k \in C$, ta có

$$\langle Q(\hat{y}^k - x^*), x^* - \hat{y}^k \rangle + \langle Qx^* + q, x^* - \hat{y}^k \rangle + \eta \langle \hat{y}^k - x^k, x^* - \hat{y}^k \rangle \geq 0,$$

và do đó

$$\langle (Q + \eta I)(\hat{y}^k - x^*), x^* - \hat{y}^k \rangle + \eta \|\hat{y}^k - x^*\|^2 + \eta \langle \hat{y}^k - x^k, x^* - \hat{y}^k \rangle \geq 0.$$

Chú ý rằng $(Q + \eta I)$ là ma trận xác định dương với $\eta > -2\tau_1(Q)$, $\langle (Q + \eta I)x, x \rangle \geq \lambda \|x\|^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Dễ thấy, $\lambda = \eta + \tau_1(Q)$, kết hợp điều này với hằng đẳng thức

$$\langle a, b \rangle = \frac{1}{2} (\|a + b\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n, \quad (3.49)$$

ta có

$$2(\eta - \lambda)\|\hat{y}^k - x^*\|^2 + \eta (\|x^k - x^*\|^2 - \|\hat{y}^k - x^k\|^2 - \|\hat{y}^k - x^*\|^2) \geq 0.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \|\hat{y}^k - x^*\|^2 &\leq \frac{\eta}{2\lambda - \eta} \|x^k - x^*\|^2 - \frac{\eta}{2\lambda - \eta} \|\hat{y}^k - x^k\|^2 \\ &= \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)} \|x^k - x^*\|^2 - \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)} \|\hat{y}^k - x^k\|^2. \end{aligned}$$

Vì vậy

$$\|\hat{y}^k - x^*\|^2 \leq \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)} \|x^k - x^*\|^2 - \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)} \|x^k - \hat{y}^k\|^2.$$

Ngược lại, từ tính không giãn của Π_C ,

$$\|\Pi_C(x) - \Pi_C(y)\|^2 \leq \langle \Pi_C(x) - \Pi_C(y), x - y \rangle,$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$, ta có

$$\begin{aligned} \|\hat{x}^{k+1} - x^*\|^2 &= \|\Pi_C[\hat{y}^k - \mu\alpha_k G(\hat{y}^k)] - \Pi_C(x^*)\|^2 \\ &\leq \langle \Pi_C[\hat{y}^k - \mu\alpha_k G(\hat{y}^k)] - \Pi_C(x^*), \hat{y}^k - \mu\alpha_k G(\hat{y}^k) - x^* \rangle \\ &= \langle \hat{x}^{k+1} - x^*, (\hat{y}^k - x^*) - \mu\alpha_k G(\hat{y}^k) \rangle \\ &= \langle \hat{x}^{k+1} - x^*, \hat{y}^k - x^* \rangle - \mu\alpha_k \langle G(\hat{y}^k), \hat{x}^{k+1} - x^* \rangle \\ &\leq \frac{1}{2} \|x^{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{2} \|\hat{y}^k - x^*\|^2 - \mu\alpha_k \langle G(\hat{y}^k), \hat{x}^{k+1} - x^* \rangle. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\|\hat{x}^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|\hat{y}^k - x^*\|^2 - 2\mu\alpha_k \langle G(\hat{y}^k), \hat{x}^{k+1} - x^* \rangle.$$

Vì các phần tử $x^k, \hat{y}^k, \hat{x}^{k+1}$ thuộc tập $C \subseteq B(x^*, \sigma)$ nên

$$\begin{aligned} \|\hat{x}^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|\hat{y}^k - x^*\|^2 - 2\mu\alpha_k \langle G(\hat{y}^k), \hat{x}^{k+1} - x^* \rangle \\ &\leq \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)} \|x^k - x^*\|^2 - \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)} \|x^k - \hat{y}^k\|^2 \\ &\quad - 2\mu\alpha_k \langle G(\hat{y}^k), \hat{x}^{k+1} - x^* \rangle \\ &= \|x^k - x^*\|^2 + \frac{-2\tau_1(Q)}{\eta + 2\tau_1(Q)} \|x^k - x^*\|^2 - \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)} \|x^k - \hat{y}^k\|^2 \\ &\quad + 2\mu\alpha_k \langle G(\hat{y}^k), x^* - \hat{x}^{k+1} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|x^k - x^*\|^2 + \frac{-2\tau_1(Q)\sigma^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} - \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)} \|x^k - \hat{y}^k\|^2 \\
&\quad + 2\mu\alpha_k [|\langle G(\hat{y}^k), x^* \rangle| + |\langle G(\hat{y}^k), \hat{x}^{k+1} \rangle|] \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 + \frac{-2\tau_1(Q)\sigma^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} - \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)} \|x^k - \hat{y}^k\|^2 + 4\mu\alpha_k\delta.
\end{aligned}$$

Kết hợp điều này và (3.48), ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^{k+1} - \hat{x}^{k+1}\|^2 + 2\|x^{k+1} - \hat{x}^{k+1}\| \|\hat{x}^{k+1} - x^*\| + \|\hat{x}^{k+1} - x^*\|^2 \\
&\leq \epsilon^2(1 + \tau)^2 + 2\epsilon(1 + \tau)\sigma + \|\hat{x}^{k+1} - x^*\|^2 \\
&\leq \|x^k - x^*\|^2 + \frac{-2\tau_1(Q)\sigma^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} - \frac{\eta}{\eta + 2\tau_1(Q)} \|x^k - \hat{y}^k\|^2 + 4\mu\alpha_k\delta \\
&\quad + \epsilon^2(1 + \tau)^2 + 2\epsilon(1 + \tau)\sigma.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Giả sử phản chứng rằng

$$\|x^k - y^k\| > 2\bar{\epsilon}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, K.$$

Từ (3.47), ta có

$$\bar{\epsilon} < 2\bar{\epsilon} - \epsilon < \|x^k - y^k\| - \|\hat{y}^k - y^k\| \leq \|\hat{y}^k - x^k\|$$

Khi đó, từ (3.50) suy ra

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 + \frac{-2\tau_1(Q)\sigma^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} - \frac{\eta\bar{\epsilon}^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} + 4\mu\alpha_k\delta + \epsilon^2(1 + \tau)^2 \\
&\quad + 2\epsilon(1 + \tau)\sigma \\
&= \|x^k - x^*\|^2 - \Gamma_\eta.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Nếu như $x^i \in C \subseteq B(x^*, \sigma)$, từ (3.51) ta được

$$\begin{aligned}
4\sigma^2 &\geq (\|x^0 - x^*\| + \|x^K - x^*\|)^2 \\
&\geq (\|x^0 - x^*\| + \|x^K - x^*\|)(\|x^0 - x^*\| - \|x^K - x^*\|) \\
&= \|x^0 - x^*\|^2 - \|x^K - x^*\|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{K-1} (\|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2) \\
&\geq K\Gamma_\eta.
\end{aligned}$$

Suy ra $K \leq \frac{4\sigma^2}{\Gamma_\eta}$, trái với giả sử (ii). Vì thế, tồn tại số tự nhiên $j \in [0, K]$ sao cho các khẳng định (a) và (b) là đúng. Bằng cách chứng minh tương tự như *Khẳng định 1*, ta có

$$\mu\alpha_j \langle G(\hat{y}^j), \hat{x}^{j+1} - x \rangle \leq \langle \hat{y}^j - \hat{x}^{j+1}, \hat{x}^{j+1} - x \rangle, \quad \forall x \in C.$$

Thay thế $x := \hat{y}^j \in C$, ta có

$$\|\hat{y}^j - \hat{x}^{j+1}\|^2 \leq \mu\alpha_j \langle G(\hat{y}^j), \hat{y}^j - \hat{x}^{j+1} \rangle \leq 2\mu\alpha_j \delta \leq \epsilon^2.$$

Từ (3.45) và (a), ta có

$$\|\hat{y}^j - x^j\| \leq \|\hat{y}^j - y^j\| + \|y^j - x^j\| \leq \epsilon + 2\bar{\epsilon},$$

và từ đó

$$\begin{aligned} \|x^{j+1} - x^j\| &\leq \|\hat{x}^{j+1} - x^j\| + \|\hat{x}^{j+1} - x^{j+1}\| \\ &\leq \|\hat{x}^{j+1} - \hat{y}^j\| + \|\hat{y}^j - x^j\| + \|\hat{x}^{j+1} - x^{j+1}\| \\ &\leq 3\epsilon + 2\bar{\epsilon}. \end{aligned}$$

Vì vậy, x^j là một ϵ -ng nghiệm của bài toán $BVI(C, F, G)$. Khẳng định (c) được chứng minh.

3.2.4 Các ví dụ tính toán

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số ví dụ tính toán cho thuật toán (PCA), các thử nghiệm được lập trình trên phần mềm MATLAB R2014a với máy tính PC, Intel(R) Core(TM) i5-7360U CPU @ 2.30GHz 8.00GB Ram. Bên cạnh đó, chúng tôi so sánh hiệu quả của thuật toán (PCA) với các thuật toán dưới đạo hàm xấp xỉ (PVSA) của Maingé [59, Algorithm 1] và thuật toán đạo hàm tăng cường (ExtrA) của P. N. Anh và cộng sự [3, Algorithm 2.1], trong trường hợp ánh xạ giá F là giả đơn điệu.

Ví dụ 3.1. Chúng ta xét bài toán $BVI(C, F, G)$ trong không gian véc tơ có số chiều $n = 10$, ở đây ánh xạ $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ được lấy trong Ví dụ 3 của tài liệu [81],

$$G(x) = (\arctan(x_1), \arctan(x_2), \dots, \arctan(x_n))^T + Ex + e,$$

ở đây,

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n \times n}, e = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n}{2} \\ 2 - \frac{n}{2} \\ 3 - \frac{n}{2} \\ \vdots \\ \frac{n}{2} - 1 \\ \frac{n}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Cho tập $C = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq x \leq b\}$ và ánh xạ $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ được cho bởi $F(x) = Qx + q$, với các véc tơ

$$a = (2.5, 4.2, 8.0, 3.7, 4.8, 12.7, 6.9, 8.2, 7.0, 10.2)^\top \in \mathbb{R}^n,$$

$$b = (5.6, 8.5, 11.4, 7.0, 5.5, 15.0, 8.8, 9.0, 10.2, 16.7)^\top \in \mathbb{R}^n,$$

và ma trận Q , véc tơ q được chọn ngẫu nhiên như sau:

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 & \dots & 0 & -10 \\ 1 & -5 & 4 & 0 & \dots & 0 & -7 \\ -2 & 4 & 6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & 3 \\ -10 & -7 & 0 & 0 & \dots & 3 & -9 \end{pmatrix}_{n \times n}, q = \begin{pmatrix} \frac{n}{2} \\ \frac{n}{3} \\ \frac{n}{4} \\ \vdots \\ \frac{n}{10} \\ \frac{n}{11} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Ta tính được các giá trị riêng nhỏ nhất, lớn nhất của Q và E như sau: $\tau_1(Q) = -17.6513, \tau_2(Q) = 10.6287, \tau_1(E) = 0.0810, \tau_2(E) = 3.9190$. Ta thấy, $\nabla \arctan(t) = \frac{1}{1+t^2}$, với mọi $t \in \mathbb{R}$, nên G là ánh xạ đơn điệu mạnh trên C với hệ số $\beta = 0.0810 + \frac{1}{\min\{b(i): i=1,2,\dots,n\}} = 0.2061$. Áp dụng định lý giá trị trung bình và công thức $\nabla \arctan(t) = \frac{1}{1+t^2}$, với mọi $t \in \mathbb{R}$, khi đó tồn tại số thực $c_i \in (x_i, y_i) \subseteq (a(i), b(i))$, sao cho

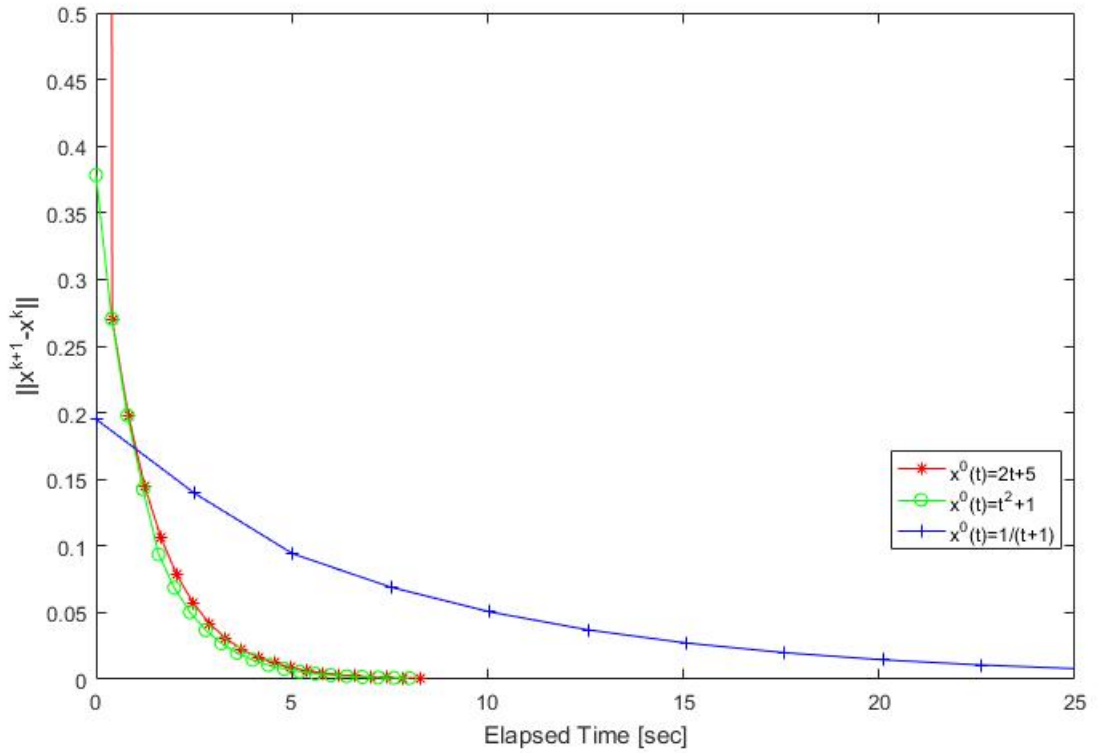
$$|\arctan(x_i) - \arctan(y_i)| = \frac{1}{1+c_i^2} |x_i - y_i| \quad (3.52)$$

$$\leq \frac{1}{1 + \min\{a^2(i) : i = 1, 2, \dots, n\}} \|x_i - y_i\|. \quad (3.53)$$

Từ đó suy ra G liên tục Lipschitz với hệ số $L = \|E\| + \frac{1}{1+16.7^2} = 3.9226$. Ta chọn $\alpha_k = \frac{1}{10+k}, \eta = 210, \mu = \frac{\beta}{\mathbb{L}^2}$, khi đó, các tham số thoả mãn điều kiện

(3.30). Ta gọi x^{k+1} sinh bởi thuật toán (PCA) là một ϵ -nghiệm của bài toán $BVI(C, F, G)$, nếu $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \epsilon$. Với sai số $\epsilon = 10^{-3}$ và điểm khởi đầu $x^0 = (3.5, 5.2, 9.0, 4.7, 5.8, 13.7, 7.9, 9.2, 8.0, 11.2)^\top$, kết quả tính toán được trình bày trong Hình 3.3 và Bảng 3.4, Bảng 3.5. Nghiệm xấp xỉ sau 138 bước lặp như sau,

$$x^{138} = (4.9454, 7.2573, 8.0000, 6.5383, 5.5000, 12.7000, 8.7190, 8.2000, 7.0000, 10.2000)^\top. \quad (3.54)$$



Hình 3.3: Sự hội tụ của dãy $\{x^k\}$ trong ví dụ 3.1

Ví dụ 3.2. Ta xét bài toán $BVI(C, F, G)$ trong không gian $\mathbb{R}^n$, với ánh xạ giá G như Ví dụ 3.1. Cho $C = [a, b]$, $a = (0, 0, \dots, 0)^\top$, $b = (1, 2, \dots, n)^\top$ và

Test Prob.	η	α_k	No. Iter.	CPU-Times/sec
1	200	$\frac{1}{k+10}$	25	2.7031
2	200	$\frac{1}{2k+10}$	27	2.9688
3	250	$\frac{1}{k+100}$	24	2.7031
4	250	$\frac{1}{3k+10}$	29	3.0313
5	350	$\frac{1}{4k+50}$	40	4.4063
6	400	$\frac{1}{5k+100}$	39	3.6563
7	500	$\frac{1}{k+100}$	55	5.5313
8	600	$\frac{1}{k+1000}$	67	7.3594
9	700	$\frac{1}{2k+10}$	60	5.7344
10	750	$\frac{1}{3k+50}$	80	8.2031

Bảng 3.4: Ví dụ 3.1 với các tham số khác nhau, $\mu = \frac{\beta}{\mathbb{L}^2}$.

Test Prob.	1	2	3	4	5	6	7
λ	0	1	0.5	0.2	0.35	0.4	0.75
CPU-Times/sec	19.5625	17.1719	19.5938	19.0469	19.2031	18.2500	17.8125

Bảng 3.5: Ví dụ 3.1 với xuất phát điểm $x^0 = \lambda a + (1 - \lambda)b$.

ma trận Q , véc tơ q được chọn như sau:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + (-1)^n \end{pmatrix}_{n \times n}, q = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n+2} \\ \frac{n+2}{n+3} \\ \vdots \\ \frac{2n}{2n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Khi đó, G là đơn điệu mạnh với hệ số $\beta = \tau_1(E) + \frac{1}{n}$ và liên tục Lipschitz với hệ số $\mathbb{L} = \|E\| + \frac{1}{1+n^2}$. Từ $\tau_1(Q) = 0$ và $\tau_2(Q) = 2$, ta có F là đơn điệu trên $\mathbb{R}^n$. Kết quả so sánh thuật toán (PCA) với hai thuật toán ($ExtraA$), ($PVSA$) được trình bày trong Bảng 3.6, với các tham số được chọn như sau:

- Thuật toán (PCA): $\eta = 200, \alpha_k = \frac{1}{15+2k}, \mu = \frac{\beta}{\mathbb{L}^2}$ và sai số được chọn như Ví dụ 3.1.
- Thuật toán ($PVSA$): $\Theta = 0, \mu = 1, \epsilon_k = 0, \lambda_k = \frac{1}{k^{\nu_1}}, \alpha_k = \frac{1}{k^{\nu_2}}$, với $\nu_1 = \frac{3}{4} \in (\frac{1}{2}, 1)$ và $\nu_2 = \frac{1}{5} \in (0, 1 - \nu_1)$. Như thông lệ, ta chọn điều kiện

Số chiều n	$Iter.$			$CPU - Time/sec$		
n	Thuật toán (PCA)	($PVSA$)	($Extra$)	Thuật toán (PCA)	($PVSA$)	($Extra$)
5	12	63	27	2.7813	6.0469	15.4531
10	17	402	38	5.4063	45.3281	29.0195
15	20	435	47	7.3594	61.5000	35.7027
20	32	549	55	13.8125	83.3906	55.0176
25	57	553	89	27.8125	85.5938	66.9275
30	63	671	102	33.4844	117.3125	92.0937
35	83	709	191	44.2188	137.0625	177.0951
40	127	733	280	73.4531	164.0938	203.9951
50	181	969	401	103.0469	243.1719	339.0401
60	741	1173	738	315.8281	399.4688	502.9437

Bảng 3.6: So sánh các thuật toán (PCA), ($PVSA$), ($Extra$) với điểm khởi đầu

$x^0 = (1, 1, \dots, 1)^\top \in C \subset \mathbb{R}^n$ và $\epsilon = 10^{-3}$.

dừng $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \epsilon$.

- Thuật toán ($Extra$): $\delta_k = \frac{1}{2}k + 7$, $\bar{\epsilon}_k = \frac{1}{2k^2+5}$, $\beta_k = \frac{1}{7k+9}$, $\alpha_k = \frac{3}{4k+5}$, $\gamma_k = 1 - \alpha_k - \beta_k$ và $\lambda_k = \frac{1}{250k+100}$. Suy ra $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{\epsilon}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ và $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k = \eta \in (0, \frac{1}{2}]$.

Từ kết quả so sánh tính toán, chúng ta có một số nhận xét sau.

- Thuật toán (PCA) rất nhạy với các tham số λ_k, μ và α_k , điều này được trình bày trong Bảng 3.4;
- Điểm khởi đầu x^0 và tham số λ_k ảnh hưởng rất nhiều đến tốc độ hội tụ của thuật toán (PCA), được trình bày trong Bảng 3.4 và Bảng 3.5;
- Khi số chiều tăng lên, ta thấy cả ba thuật toán đều tăng đáng kể thời gian chạy máy, chẳng hạn như n tăng từ 5 lên 60, thời gian chạy máy của thuật toán (PCA) từ 2.7813 tăng lên 315.8281 giây (Bảng 3.6);
- Trong tất cả các thử nghiệm, ta thấy thuật toán (PCA) đều nhanh hơn ($PVSA$) [59, Thuật toán 1] và $Extra$ [3, Thuật toán 2.1].

Kết luận Chương 3

Trong Chương 3, các kết quả chính đạt được như sau:

- Xây dựng thuật toán chiếu nối lỏng (*RLPA*) thông qua phương pháp nghiên cứu ánh xạ nghiệm để giải bài toán bất đẳng thức biến phân với ánh xạ giá G trên giao tập điểm bất động của một ánh xạ Ξ và tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân với ánh xạ giá F .
- Đề xuất thuật toán chiếu co mới (*PCA*), để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ nghiệm $BVI(C, F, G)$. Các định lý hội tụ được chỉ ra. Thuật toán này được viết dựa trên kỹ thuật phân tích DC và phép chiếu trên miền ràng buộc C . Các kết quả hội tụ và tính toán thực nghiệm được xét trong không gian $\mathbb{R}^n$.
- Lấy các ví dụ số cho các thuật toán (*RLPA*), (*PCA*), và so sánh hiệu quả với các thuật toán đã có khác, kết quả được trình bày trong các Hình 3.2, Bảng 3.3 và Bảng 3.6.

Kết luận

Luận án tập trung nghiên cứu các phương pháp giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, các thuật toán giải mới được nghiên cứu dựa trên phương pháp lặp, phương pháp chiếu, kỹ thuật quán tính, nguyên lý bài toán phụ và các kỹ thuật trong Lý thuyết tối ưu.

1. Kết quả đạt được của luận án

- (i) Thuật toán lai ghép co quán tính (*HICA*) được chúng tôi phát triển từ kỹ thuật lặp của Yamada, I. [83], kết hợp với kỹ thuật quán tính để giải bài toán $VIF(\Omega, F)$, ở đây miền ràng buộc Ω là tập điểm bất động của họ của họ vô hạn các ánh xạ nửa co. Ưu điểm của thuật toán là chỉ sử dụng phương pháp tính toán xấp xỉ, không sử dụng phép chiếu, góp phần tăng tốc độ giải số trên máy tính. Kết quả của thuật toán đã được công bố trong công trình [CT1].
- (ii) Thuật toán xấp xỉ song song quán tính (*PIPA*) được xây dựng từ kỹ thuật quán tính và tính toán song song, để giải bài toán $VIF(\Omega, F)$, với ánh xạ giá F đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz, miền ràng buộc Ω là tập điểm bất động của m các ánh xạ nửa co. Chúng tôi đã áp dụng thuật toán (*PIPA*) vào mô hình xử lý ảnh, để phục hồi các bức ảnh đã bị làm mờ bởi kiểu Gaussian hoặc kiểu Motion. Khi đó, chúng tôi đã chỉ ra ưu điểm của thuật toán này khi tính toán so sánh với một số thuật toán phục hồi ảnh khác. Kết quả của thuật toán này được công bố trong [CT3].
- (iii) Thuật toán nối lỏng (*RLPA*) được xây dựng dựa trên sự kết hợp của phép chiếu trực tiếp lên miền ràng buộc C và phép chiếu nối lỏng trên một nửa không gian. Trong thuật toán này, chúng tôi đã áp dụng tìm

nghiệm cho bài toán bất đẳng thức biến phân trên giao của tập điểm bất động của một ánh xạ và tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân khác. Kết quả này được công bố trong [CT4].

- (iv) Xét bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ nghiệm $BVI(C, F, G)$, chúng tôi xây dựng thuật toán chiếu co (PCA) từ phép chiếu trực tiếp lên tập C và một bài toán phụ sử dụng kỹ thuật phân tích DC. Sự hội tụ của các dãy lặp tới một nghiệm tối ưu đã được chỉ ra. Tính hữu hiệu của thuật toán được tính toán thông qua các ví dụ số và các kết quả so sánh với các thuật toán khác. Sự hội tụ và kết quả tính toán của thuật toán (PCA) được công bố trong [CT2].

2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh những kết quả đã đạt được trong luận án, chúng tôi có thể nghiên cứu theo các hướng tiếp theo như sau:

- Nghiên cứu các thuật toán giải cho bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, nhằm cải thiện tốc độ cũng như thời gian tính toán bằng cách kết hợp các phương pháp lặp Mann, lặp Halpern, kỹ thuật tính toán song song,...
- Đánh giá sai số và tốc độ hội tụ của một số thuật toán được đề xuất trong luận án, cách chọn bộ tham số để có được sự hội tụ tốt hơn.
- Nghiên cứu các thuật toán mới nhằm giảm nhẹ các điều kiện đặt lên các ánh xạ giá, đồng thời giảm bớt các phép chiếu trong mỗi bước lặp của thuật toán.
- Mở rộng giải bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp thành các bài toán nhiều cấp hơn hoặc miền ràng buộc phức tạp hơn.

Danh mục công trình có liên quan đến luận án

- [CT1] Truong, N.D., Kim, J.K., Anh, T.H.H. (2021), Hybrid inertial contraction projection methods extended to variational inequality problems, *Nonlinear Functional Analysis and Applications* 25(1), pp. 161 - 174. (ISSN:1229 - 1595, Scopus, Q3)
- [CT2] Thang, T.V., Anh, P.N., Truong, N.D. (2023), Convergence of the projection and contraction methods for solving bilevel variational inequality problems, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 46(9), 10867 - 10885. (ISSN: 1017 - 1398, SCIE, Q2)
- [CT3] Anh, P.N., Gibali, A., Truong, N.D. (2024), Parallel inertial proximal algorithm with applications to image recovery problems, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 25(11), pp. 2913 - 2931. (ISSN: 1345 - 4773, SCIE, Q2)
- [CT4] Anh, P.N., Khanh, P.Q., Truong, N.D. (2024), A relaxed projection method for solving bilevel variational inequality problems, *Optimization*, Doi: 10.1080/02331934.2024.2354456. (ISSN: 0233 - 1934, SCIE, Q2)

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

- [1] Phạm Ngọc Anh (2015), *Các phương pháp tối ưu và ứng dụng*, NXB Thông tin và Truyền thông, Hà Nội.
- [2] Hoàng Tụy (2003), *Hàm thực và giải tích hàm*, Viện toán học, Hà Nội.

Tiếng Anh

- [3] Anh, P.N. (2013), A hybrid extragradient method extended to fixed point problems and equilibrium problems, *Optimization* 62(2), pp. 271 - 283.
- [4] Anh, P.N. (2012), A new extragradient iteration algorithm for bilevel variational inequalities, *Acta Mathematica Vietnamica* 37, pp. 95 - 107.
- [5] Anh, P.N., Ansari, Q.H. (2021), Auxiliary problem technique for Hierarchical equilibrium problems, *Journal of Optimization Theory and Applications* 188(3), pp. 882 - 912.
- [6] Anh, P.N., Hien, N.D., Phuong, N.X., Ngoc, V.T. (2020), A parallel subgradient method extended to variational inequalities involving nonexpansive mappings, *Applicable Analysis* 99(16), pp. 2776 - 2792.
- [7] Anh, P.N., Phuong, N.X. (2018), A parallel extragradient-like projection method for unrelated variational inequalities and fixed point

- problems, *Journal of Fixed Point Theory Applications* 20(2), pp. 1 - 17.
- [8] Anh, P.N., Kim, J.K., Muu, L.D. (2012), An extragradient algorithm for solving bilevel pseudomonotone variational inequalities, *Journal of Global Optimization* 52, pp. 627 - 639.
 - [9] Anh, P.N., Hong, N.V. (2021), New projection methods for equilibrium problems over fixed point sets, *Optimization Letters* 15(2), pp. 627 - 648.
 - [10] Anh, P.N., An, L.T.H. (2015), The subgradient extragradient method extended to equilibrium problems, *Optimization* 64, pp. 225 - 248.
 - [11] Anh, P.N., Thang, T.V., Thach, H.T.C. (2020), Halpern projection methods for solving pseudomonotone multivalued variational inequalities in Hilbert spaces, *Numerical Algorithms* 87(2), pp. 1 - 29.
 - [12] Anh, P.N. (2022), Hybrid inertial contraction algorithms for solving variational inequalities with fixed point constraints in Hilbert spaces, *Acta Mathematica Vietnamica* 47, pp. 743 - 753.
 - [13] Aoyama, K., Kimura, Y. (2011), Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences, *Applied Mathematics and Computation* 217, pp. 7537 - 7545.
 - [14] Baiocchi, C., Capelo, A. (1984), *Variational and quasivariational inequalities: Applications to free-boundary problems*, John Wiley, Chichester.
 - [15] Balakrishnan, A.V. (1981), *Applied functional analysis*, Springer, New York.
 - [16] Bauschke, H.H., Combettes, P.L. (2011), *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*, Springer, New York.
 - [17] Beck, A. (2017), *First-order methods in optimization*, MOS-SIAM Series on Optimization.

- [18] Beck, A., Teboulle, M. (2009), A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems, *SIAM Journal on Imaging Sciences* 2, pp. 183 - 202.
- [19] Bruck, R.E. (1975), An iterative solution of a variational inequality for certain monotone operators in Hilbert space, *Bulletin of the American Mathematical Society* 81, pp. 890 - 892.
- [20] Bruck, R.E. (1977), On the weak convergence of an ergodic iteration for the solution of variational inequalities for monotone operators in Hilbert space, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 61(1), pp. 159 - 164.
- [21] Carl, S., Le, V.K. (2021), *Multi-Valued Variational Inequalities and Inclusions*, Springer International Publishing.
- [22] Cegielski, A., Gibali, A., Reich, S., Zalas, R. (2019), Outer Approximation Methods for Solving Variational Inequalities Defined over the Solution Set of a Split Convex Feasibility Problem, *Numerical Functional Analysis And Optimization* 41, pp. 1089 - 1108.
- [23] Censor, Y., Gibali, A., Reich, S. (2011), The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space, *Journal of Optimization Theory and Applications* 148, pp. 318 - 335.
- [24] Cohen, G. (1980), Auxiliary problem principle and decomposition of optimization problems, *Journal of Optimization Theory and Applications* 32, pp. 227 - 305.
- [25] Combettes, P.L., Wajs, V.R. (2005), Signal recovery by proximal forward-backward splitting, *Multiscale Modeling and Simulation* 4, pp. 1168 - 1200.
- [26] Cottle, R.W., Yao, J.C. (1992), Pseudo-Monotone Complementarity Problems in Hilbert Space, *Journal of Optimization Theory and Applications* 75, pp. 281 - 295.

- [27] Dempe, S., Zemkoho, A.B. (2013), The bilevel programming problem: reformulations, constraint qualifications and optimality conditions, *Mathematical Programming* 138, pp. 447 - 473.
- [28] Ding, X.P., Lin, Y.C., Yao, J.C. (2007), Three-step relaxed hybrid steepest-descent methods for variational inequalities, *Applied Mathematics and Mechanics* 28, pp. 1029 - 1036.
- [29] Dong, Q.L, Lu, Y.Y, Yang, J. (2016), The extragradient algorithm with inertial effects for solving the variational inequality, *Optimization* 65(12), pp. 2217 – 2226.
- [30] Facchinei, F., Pang, J.S. (2003), *Finite-dimensional variational inequalities and complementary problems*, Springer, NewYork.
- [31] Fan, K. (1972), Aminimax inequality and applications, *Shisha Education, Inequalities III, Academic, New York* 3, pp. 103 - 113.
- [32] Fan, X., Yan, Q. (2010), An Interior Point Algorithm for Variational Inequality Problems, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences* 5(52), pp. 2595 - 2604.
- [33] Figueiredo, M.A.T., Nowak, R.D. (2003), An EM algorithm for wavelet-based image restoration, *IEEE Transactions on Image Processing* 12, pp. 906 - 916.
- [34] Gibali, A., Reich, S., Zalas, R. (2016), Outer Approximation Methods for Solving Variational Inequalities in Hilbert Space, *Optimization* 66, pp. 417 - 437.
- [35] Glowinski, R., Lions, J.-L., Tremolier'es, R. (1981), *Numerical Analysis of Variational Inequalities*, North - Holland, Amsterdam.
- [36] Godwin, E.C., Alakoya, T., Mewomo, O., Yao, J.C. (2022), Relaxed inertial Tseng extragradient method for variational inequality and fixed point problems, *Applicable Analysis* 102(2), pp. 4253 - 4278.
- [37] Gowda, M.S., Pang, J.S. (1994), Stability analysis of variational inequalities and nonlinear complementarity problems, via the mixed lin-

- ear complementarity problem and degree theory, *Mathematics of Operations Research* 19(4), pp. 831 - 879.
- [38] Hansen, P.C., Nagy, J. G., O’Leary, D.P. (2006), *Deblurring Images: Matrices, Spectra, and Filtering*, Fundamentals of Algorithms 3, SIAM, Philadelphia.
 - [39] Hartman, P., Stampacchia, G. (1966), On some non linear elliptic differential functional equations, *Acta Mathematica* 115, pp. 271 - 310.
 - [40] Hieu, D.V., Strodiot, J.J, Muu, L.D (2020), An Explicit Extragradient Algorithm for Solving Variational Inequalities, *Journal of Optimization Theory and Applications* 185, pp. 476 - 503.
 - [41] Hieu, D.V., Moudafi, A. (2021), Regularization projection method for solving bilevel variational inequality problem, *Optimization Letters* 15, pp. 205 - 229.
 - [42] Hieu, D.V., Anh, P.K., Muu, L.D. (2019), Modified extragradient-like algorithms with new stepsizes for variational inequalities, *Computational Optimization and Applications* 73, pp. 913 - 932.
 - [43] Heinz, Bauschke, H., Patrick, L., Combettes (2017), *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Canadian Mathematical Society, Springer.
 - [44] Iiduka, H. (2012), Fixed point optimization algorithm and its application to power control in CDMA data networks, *Mathematical Programming* 133, pp. 227 - 242.
 - [45] Iemoto, S., Takahashi, W. (2008), Strong convergence theorems by a hybrid steepest descent method for countable nonexpansive mappings in Hilbert spaces, *Scientiae Mathematicae Japonicae* 21, pp. 555 - 570.
 - [46] Isac, G., Zhao, Y.B. (2000), Exceptional Family of Elements and the Solvability of Variational Inequalities for Unbounded Sets in Infinite

- Dimensional Hilbert Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 246(2), pp. 544-556.
- [47] Jailoka, Pachara, Suantai, S, Hanjing, A. (2021), A Fast Viscosity Forward-Backward Algorithm for Convex Minimization Problems with an Application in Image Recovery, *Carpathian Journal of Mathematics* 37(3), pp. 449 - 461.
 - [48] Kinderlehrer, D., Stampacchia, G. (1980), *An introduction to variational inequalities and their applications*, New York, Academic Press.
 - [49] Kien, B.T., Yao, J.C., Yen, N.D. (2008), On the solution existence of pseudomonotone variational inequalities, *Journal of Global Optimization* 41, pp. 135 - 145.
 - [50] Khanh, P.Q., Luu, L.M (2005), Upper semicontinuity of the solution set to parametric vector quasivariational inequalities, *Journal of Global Optimization* 32, pp. 569 - 580.
 - [51] Khanh, P.Q, Luu, L.M. (2005), Some existence results for vector quasivariational inequalities involving multifunctions and applications to traffic equilibrium problems, *Journal of Global Optimization* 32, pp. 551 - 568.
 - [52] Korpelevich, G.M. (1976), The extragradient method for finding saddle points and other problems, *Ekonomika i Matematicheskie Metody* 12, pp. 747 - 756.
 - [53] Konnov, I.V. (2000), *Combined relaxation methods for variational inequalities*, Springer - Verlag, Berlin.
 - [54] Levy, A.B. (1999), Sensitivity of solutions to variational inequalities on Banach spaces, *SIAM Journal on Control and Optimization* 38, pp. 50 - 60.
 - [55] Liang, Jingwei, Luo, Tao, Schönlieb, Bibiane, C. (2022), Improving “Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm”: Faster, Smarter,

- and Greedier, *SIAM Journal on Scientific Computing* 44(3), pp. A1069 - A1091.
- [56] Lions, J.L., Stampacchia, G. (1967), Variational inequalities, *Communications on Pure and Applied Mathematics* 20, pp. 493 - 519.
 - [57] Lions, J.L., Mercier, B. (1979), Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 16(6), pp. 964 - 979.
 - [58] Luo, Z.Q., Tseng, P. (1992), Error bound and convergence analysis of matrix splitting algorithms for the affine variational inequality problem. *SIAM Journal on Optimization* 2(1), pp. 43 - 54.
 - [59] Maingé, P.E. (2010), Projected subgradient techniques and viscosity methods for optimization with variational inequality constraints, *European Journal of Operational Research* 205, pp. 501 - 506.
 - [60] Maingé, P.E. (2008), A hybrid extragradient-viscosity method for monotone operators and fixed point problems, *SIAM Journal on Control and Optimization* 47, pp. 1499 - 1515.
 - [61] Martinet, B. (1970), Régularisation d'inéquations variationnelles par approximation successives, *Rev. Française Informat. Recherche opérationnelle* 4, pp. 154 - 158.
 - [62] Marino, G., Xu, H.K. (2007), Weak and strong convergence theorems for strict pseudo-contractions in Hilbert spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 329, pp. 336 - 346.
 - [63] Mordukhovich, B.S. (1994), Stability theory for parametric generalized equations and variational inequalities via nonsmooth analysis, *Transactions of the AMS - American Mathematical Society* 343, pp. 609 - 658.
 - [64] Mordukhovich, B.S., Outrata, J.V. (2001), On second-order subdifferentials and their applications, *SIAM Journal on Optimization* 12, pp. 139 - 169.

- [65] Muu, L.D. (1984), Stability property of a class of variational inequalities, *Optimization* 15, pp. 347 - 351.
- [66] Nakajo, K., Shimoji, K., Takahashi, W. (2009), On strong convergence by the hybrid method for families of mappings in Hilbert spaces, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications* 71(1 - 2), pp. 112 - 119.
- [67] Wang, Z., Bovik, A.C., Sheikh, H.R., Simoncelli, E.P. (2004), Image quality assessment: from error visibility to structural similarity, *IEEE transactions on image processing* 13(4), pp. 600 - 612.
- [68] Opial, Z. (1967), Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, *Bulletin of the American Mathematical Society* 73, pp. 591 - 597.
- [69] Pata, V. (2019), *Fixed Point Theorems and Applications*, Springer International Publishing.
- [70] Saejung, S., Yotkaew, P. (2012), Approximation of zeros of inverse strongly monotone operators in Banach spaces, *Nonlinear Analysis* 75, pp. 724 - 750.
- [71] Shehu Y, Li X-H, Dong Q-L. (2020), An efficient projection-type method for monotone variational inequalities in Hilbert spaces, *Numerical Algorithms* 84, pp. 365 - 388.
- [72] Sibony, M. (1971), Sur l'approximation d'équation et inéquations aux dérivées partielles nonlinéaires de type monotone, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 34, pp. 502 - 564.
- [73] Solodov, M. (2007), An explicit descent method for bilevel convex optimization, *Journal of Convex Analysis* 14, pp. 227 - 237.
- [74] Starck, J.L., Donoho, D.L., Candès, E.J. (2003), Astronomical image representation by the curvelet transform, *Astronomy and Astrophysics* 398, pp. 785 - 800.

- [75] Takahashi, S., Takahashi, W. (2008), Strong convergence theorem for a generalized equilibrium problem and a nonexpansive mapping in a Hilbert space, *Nonlinear Analysis* 69, pp. 1025 - 1033.
- [76] Thung, K., Raveendran, P. (2009), A survey of image quality measures, *Proceedings of the International Conference for Technical Postgraduates (TECHPOS), Kuala Lumpur, Malaysia*.
- [77] Tibshirani, R. (1996), Regression shrinkage and selection via the lasso, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodology)* 58, pp. 267 - 288.
- [78] Tikhonov, A.N. (1963), On the solution of ill-posed problems and the method of regularization, *Doklady Akademii nauk SSSR* 151, pp. 501 - 504.
- [79] Trujillo-Cortez, R., Zlobec, S. (2009), Bilevel convex programming models, *Optimization* 58, pp. 1009 - 1028.
- [80] Vuong, P.T., Strodiot, J.J., Nguyen V.H. (2014), Projected viscosity subgradient methods for variational inequalities with equilibrium problem constraints in Hilbert spaces, *Journal of Global Optimization* 59(1), pp. 173 - 190.
- [81] Xu, M.H., Li, M., Yang, C.C. (2009), Neural networks for a class of bi-level variational inequalities, *Journal of Global Optimization* 44, pp. 535 - 552.
- [82] Xu, M.H., Kim, T.H. (2003), Convergence of hybrid steepest-descent methods for variational inequalities, *Journal of Optimization Theory and Applications* 119, pp. 185 - 201.
- [83] Yamada, I., Ogura, N. (2005), Hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the fixed point set of certain quasi-nonexpansive mappings, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 25, pp. 619 - 655.

- [84] Yamada, I. (2001), The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings, *Studies in Computational Mathematic* 8, pp. 473 - 504.
- [85] Yao, Y., Marino, G., Muglia, L. (2014), A modified Korpelevich's method convergent to the minimum-norm solution of a variational inequality, *Optimization* 63, pp. 559 - 569.
- [86] Yao, Y., Postolache, M., Liou, Y.C. (2013), Coupling Ishikawa algorithms with hybrid techniques for pseudocontractive mappings, *Fixed Point Theory and Applications* 211, pp. 1 - 25.
- [87] Yen-Cherng, L. (2008), Finite-step relaxed hybrid steepest-descent methods for variational inequalities. *Journal of Inequalities and Applications* 2008, pp. 598 - 632.
- [88] Yen, N.D., Lee, G.M (1997), Solution sensitivity of a class of variational inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 215, pp. 48 - 55.
- [89] Zeidler, E. (1985), *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, III- Variational Methods and Optimization*, Springer - Verlag.
- [90] Zeng, L.C., Yao, J.C.(2006), Strong convergence theorem by an extragradient method for fixed point problems and variational inequality problems, *Taiwanese Journal of Mathematics* 10, pp. 1293 - 1303.