

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

Nguyễn Đức Trường

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI
TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN
TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN GIẢI TÍCH

Hà Nội - 2024

Công trình được hoàn thành tại Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2.

Tập thể hướng dẫn khoa học:

1. GS.TS. Phạm Ngọc Anh

2. TS. Hoàng Ngọc Tuấn

Phản biện 1:.....

Phản biện 2:.....

Phản biện 3:.....

Luận án sẽ được bảo vệ tại Hội đồng cấp Trường chấm luận án tiến sĩ
họp tại

vào hồi giờ, ngày, năm 202....

Có thể tìm hiểu luận án tại

- Thư viện Quốc gia Việt Nam

- Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2.

Mục lục

Mở đầu	1
1 Bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động	5
1.1 Một số kiến thức cơ bản	6
1.1.1 Phép chiếu và ánh xạ đơn điệu	6
1.1.2 Bài toán bất đẳng thức biến phân	6
1.1.3 Bài toán điểm bất động	6
1.1.4 Một số bổ đề cơ bản	6
1.2 Bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động	6
1.2.1 Phát biểu bài toán và ví dụ	6
1.2.2 Một số trường hợp đặc biệt	6
1.2.3 Mô hình xử lý ảnh	6
1.2.4 Một vài thuật toán thông dụng giải bài toán $VIF(\Omega, F)$	6
2 Các kỹ thuật quán tính	7
2.1 Kỹ thuật lai ghép co quán tính	7
2.1.1 Thuật toán (<i>HICA</i>)	7
2.1.2 Định lý hội tụ	8
2.1.3 Các ví dụ tính toán	9
2.2 Kỹ thuật xấp xỉ song song quán tính	9
2.2.1 Thuật toán (<i>PIPA</i>)	9
2.2.2 Định lý hội tụ	9
2.2.3 Áp dụng vào mô hình phục hồi ảnh	10
3 Phương pháp ánh xạ nghiệm nối lỏng	11
3.1 Phương pháp chiếu nối lỏng	12

3.1.1	Thuật toán (<i>RLPA</i>)	12
3.1.2	Ánh xạ nghiệm	13
3.1.3	Định lý hội tụ	14
3.1.4	Tính toán minh hoạ	15
3.2	Phương pháp chiếu co	15
3.2.1	Thuật toán (<i>PCA</i>)	15
3.2.2	Định lý hội tụ	16
3.2.3	Sai số tính toán	16
3.2.4	Các ví dụ tính toán	18
	Kết luận	19
	Hướng nghiên cứu tiếp theo	20
	Danh mục công trình khoa học đã công bố	21

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Khi nghiên cứu các bài toán biên cho một lớp phương trình đạo hàm riêng vào năm 1966, lần đầu tiên Hartman, Ph. và Stampacchia, G. đã đề cập đến mô hình bất đẳng thức biến phân. Từ đó, bài toán này được biết đến với những ứng dụng thú vị như mô hình điểm cân bằng kinh tế Nash, mô hình cân bằng mạng giao thông, mô hình định tuyến tối ưu mạng truyền thông, lý thuyết trò chơi bất hợp tác, mô hình xử lý ảnh và nhiều ứng dụng khác được Kinderlehrer, D. và Stampacchia, G. mô tả trong cuốn sách “An Introduction to Variational Inequalities and Their Application” và trong một số tài liệu khác. Bài toán bất đẳng thức biến phân chứa đựng nhiều lớp bài toán quen thuộc, chẳng hạn như lớp bài toán tối ưu lồi khả dưới vi phân, bài toán điểm bất động Kakutani, bài toán bù phi tuyến và một số mô hình khác.

Cho C là một tập cho lồi đóng khác rỗng của một không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ và một ánh xạ $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ (thường được gọi là ánh xạ giá), bài toán bất đẳng thức biến phân với ánh xạ giá F và miền ràng buộc C , ký hiệu $VI(C, F)$, được phát biểu dưới dạng:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C.$$

Bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, F)$ là một đối tượng nghiên cứu phổ biến trong lĩnh vực Giải tích và Lý thuyết tối ưu. Hiện nay, tồn tại hai hướng nghiên cứu chính về bài toán này. *Thứ nhất là*, nghiên cứu định tính về sự tồn tại nghiệm và tính chất của tập nghiệm của bài toán. Các kết quả nổi bật về hướng nghiên cứu này phải được nhắc đến với các nhóm

ngiên cứu trong, ngoài nước của Yen, N.D. và cộng sự, của Khanh, P.Q. và cộng sự, của Mordukhovich, B.S. và cộng sự và của nhiều tác giả khác. *Thứ hai là*, nghiên cứu đề xuất các thuật toán giải và ứng dụng trực tiếp với các mô hình cụ thể. Một trong các phương pháp thông dụng giải bài toán này là phương pháp một phép chiếu, với sơ đồ lặp có dạng:

$$\begin{cases} x^0 \in C, \\ x^{k+1} = \Pi_C[x^k - \lambda F(x^k)], \quad \forall k \geq 0. \end{cases}$$

Dưới giả thiết rằng, ánh xạ giá F là β -đơn điệu mạnh và L -liên tục Lipschitz, $\lambda \in (0, \frac{2\beta}{L^2})$, dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới một nghiệm duy nhất x^* của bài toán $VI(C, F)$.

Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$, $I = \{1, 2, \dots\}$, các ánh xạ $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, ($i \in I$). Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu đề xuất các thuật toán mới giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, ký hiệu là $VIF(\Omega, F)$, được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \Omega \text{ sao cho } \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (1)$$

ở đây $Fix(S_i) := \{x \in \mathbb{H} : x = S_i(x)\}$ và $\Omega = \cap_{i \in I} Fix(S_i)$. Rõ ràng, khi S_i là ánh xạ đồng nhất, bài toán $VIF(\Omega, F)$ được viết dưới dạng bài toán bất đẳng thức biến phân thông thường $VI(C, F)$.

Khi Ω là tập điểm bất động của một ánh xạ không giãn $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, I. Yamada đã đề xuất thuật toán đường dốc gắn kết với dãy lặp khá đơn giản sau:

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{H}, \\ x^{k+1} = S(x^k) - \lambda F(S(x^k)), \quad \forall k \geq 0. \end{cases}$$

Dưới giả thiết β -đơn điệu mạnh và L -liên tục Lipschitz của ánh xạ giá F , và $\lambda \in (0, \frac{2\beta}{L^2})$, dãy lặp $\{x^k\}$ hội tụ mạnh tới một nghiệm duy nhất của bài toán $VIF(\Omega, F)$. Mở rộng kết quả này của Yamada, I., Xu, H.K. đưa ra thuật toán lặp xoay vòng với miền ràng buộc của bài toán thành tập điểm bất động của các ánh xạ không giãn. Tiếp sau đó, Iemoto, S. và Takahashi, W. nghiên cứu mở rộng thuật toán cho miền ràng buộc là

vô hạn các ánh xạ không giãn. Một số kết quả nghiên cứu thú vị với ánh xạ giá đơn điệu tổng quát và miền ràng buộc Ω là giao của các ánh xạ giả co chặt (hoặc các ánh xạ tựa không giãn) được đề xuất bởi nhiều tác giả, chẳng hạn như phương pháp xấp xỉ, phương pháp nói lỏng quán tính, phương pháp chiếu dưới đạo hàm, phương pháp co quán tính và một số phương pháp khác.

Như ta đã biết, một điểm $x^* \in C$ là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, G)$ (ở đây $G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$) khi và chỉ khi nó là một điểm bất động của ánh xạ nghiệm $S : \mathbb{H} \rightarrow C$ như sau:

$$S(x) = \Pi_C[x - \lambda G(x)], \quad \forall x \in \mathbb{H},$$

ở đây $\lambda > 0$. Trong trường hợp này, bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động $VIF(\Omega, F)$ với $\Omega := \text{Fix}(S)$, ký hiệu là $BVI(C, F, G)$, được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } u \in \Omega \text{ sao cho } \langle F(u), x - u \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

ở đây $\Omega = \{x^* \in C : \langle G(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C\}$.

Bài toán $VIF(\Omega, F)$ là một bài toán khó, vì miền ràng buộc Ω là giao của các tập điểm bất động của các ánh xạ và không được cho dưới dạng hiển. Theo hiểu biết của chúng tôi về các thuật toán hiện nay cho việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động $VIF(\Omega, F)$, có một số điểm nổi bật sau:

- Sự hội tụ của các thuật toán đòi hỏi các giả thiết đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz của ánh xạ giá F hoặc một số giả thiết đơn điệu chính quy (khá phức tạp);
- Các thuật toán lặp chưa thực sự hiệu quả trên máy tính, khi miền ràng buộc C phức tạp. Tại mỗi bước lặp trong một số thuật toán, dãy lặp được tính là nghiệm của một bài toán bất đẳng thức biến phân phụ khác. Sự hội tụ của thuật toán đòi hỏi tính chính xác các nghiệm tại mỗi bước lặp, tuy nhiên, tính toán thực tế trên máy tính chỉ được nghiệm xấp xỉ có sai số;

- Thuật toán và tính toán ứng dụng vào các mô hình thực tế còn nhiều hạn chế.

Với các lý do trên, chúng tôi chọn nghiên cứu đề tài luận án "*Một số phương pháp giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động*". Với mục tiêu chính là đề xuất các thuật toán mới để giải bài toán $VIF(\Omega, F)$, chúng tôi đã nghiên cứu mở rộng các phương pháp trong tối ưu và các kỹ thuật lặp điểm bất động, chẳng hạn như kỹ thuật lai ghép, kỹ thuật quán tính, kỹ thuật lặp, kỹ thuật chiếu nối lỏng, Sự hội tụ mạnh và yếu của các thuật toán đề xuất được chứng minh, các ví dụ có tính chất minh họa và so sánh với các kết quả thông dụng khác được lập trình tính toán trên phần mềm Matlab.

Nội dung của luận án được viết dựa trên kết quả của 4 bài báo, trong đó 3 bài báo được xuất bản trên tạp chí SCIE xếp hạng Q2, 1 bài xuất bản trên tạp chí Scopus xếp hạng Q3.

Ngoài các phần mục lục, danh mục các ký hiệu và chữ viết tắt, mở đầu và tài liệu tham khảo, nội dung chính của luận án được chia thành 3 chương như sau:

- Chương 1: Bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động.
- Chương 2: Các kỹ thuật quán tính.
- Chương 3: Phương pháp ánh xạ nghiệm nối lỏng.

Chương 1

Bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động

Trong chương mở đầu của luận án, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm cũng như kiến thức cơ bản trong giải tích hàm và giải tích lồi, làm cơ sở để nghiên cứu ở các chương sau. Bên cạnh đó, các khái niệm về bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, sự tồn tại nghiệm, các bổ đề hỗ trợ, mô hình xử lý ảnh và một vài phương pháp thường gặp để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động như: Phương pháp lặp, phương pháp lai ghép đường dốc, phương pháp chiếu cũng được chúng tôi trình bày trong chương này. Nội dung của chương 1 được viết dựa trên một số kết quả trong các tài liệu tham khảo Phạm Ngọc Anh (2015) Hoàng Tuy (2003), Bauschke, H.H., Combettes, P.L. (2011), Carl, S., Le, V.K. (2021), Ding, X.P., Lin, Y.C., Yao, J.C. (2007),...

1.1 Một số kiến thức cơ bản

1.1.1 Phép chiếu và ánh xạ đơn điệu

1.1.2 Bài toán bất đẳng thức biến phân

1.1.3 Bài toán điểm bất động

1.1.4 Một số bổ đề cơ bản

1.2 Bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động

1.2.1 Phát biểu bài toán và ví dụ

1.2.2 Một số trường hợp đặc biệt

1.2.3 Mô hình xử lý ảnh

1.2.4 Một vài thuật toán thông dụng giải bài toán $VIF(\Omega, F)$

Chương 2

Các kỹ thuật quán tính

Khi nghiên cứu mở rộng bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, F)$, Yamada, I. đã thay thế miền ràng buộc C bằng tập điểm bất động của một ánh xạ, nghiệm của bài toán được tìm thông qua thuật toán lai ghép đường dốc (*HSDA*). Từ phương pháp này, chúng tôi đề xuất thuật toán (*HICA*) giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động $VIF(\Omega, F)$, thuật toán là sự kết hợp giữa kỹ thuật quán tính và phương pháp lai ghép. Kết quả hội tụ mạnh được chứng minh trong một không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$. Thuật toán (*PIPA*) là sự kết hợp giữa kỹ thuật tính toán song song với kỹ thuật quán tính để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động $VIF(\Omega, F)$, ở đây Ω là giao các tập điểm bất động của các ánh xạ nửa co $\Omega = \bigcap_{i \in J} \text{Fix} S_i$, $J = \{1, 2, \dots, m\}$. Phần cuối chỉ ra các tính toán minh họa, các ứng dụng trong mô hình xử lý ảnh và các so sánh với một vài thuật toán thông dụng.

Nội dung chương này được viết dựa trên hai bài báo [CT1] và [CT3] (Danh mục công trình có liên quan đến luận án).

2.1 Kỹ thuật lai ghép co quán tính

2.1.1 Thuật toán (*HICA*)

Cho $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là ánh xạ giá và họ ánh xạ $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $\forall i \in I$ thỏa mãn các giả thiết sau:

(A_1) Ánh xạ F là β -đơn điệu mạnh và L -Liên tục Lipschitz;

(A₂) Với mỗi $i \in I$, S_i là ξ_i -nửa co, thỏa mãn điều kiện (Z) và

$$\Omega := \bigcap_{i \in I} \text{Fix}(S_i) \neq \emptyset;$$

(A₃) Với mọi $k \geq 0$, các tham số dương β_k , γ_k , τ_k , λ_k và μ_k thỏa mãn

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < c_1 \leq \beta_k \leq c_2 < 1, \mu_k \leq \eta, \\ \alpha_k \in (0, 1 - \xi_k], \inf_k \alpha_k > 0, \\ 0 < \gamma_k < 1, \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0, \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k = \infty, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau_k}{\gamma_k} = 0, \lambda_k \in \left(\frac{\beta}{L^2}, \frac{2\beta}{L^2} \right), a \in (0, 1), \\ \sqrt{1 - 2\lambda_k \beta + \lambda_k^2 L^2} < 1 - a. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Thuật toán 2.1. *Thuật toán lai ghép co quán tính (HICA)*

Khởi đầu: Cho $x^0, x^1 \in \mathbb{H}$ bất kỳ. Tại bước lặp thứ k , $k = 1, 2, \dots$

Bước 1. Tính hệ số quán tính

$$\theta_k = \begin{cases} \min \left\{ \mu_k, \frac{\tau_k}{\|x^k - x^{k-1}\|} \right\} & \text{if } \|x^k - x^{k-1}\| \neq 0, \\ \mu_k & \text{trường hợp còn lại,} \end{cases} \quad (2.2)$$

Bước 2. Tính

$$\left\{ \begin{array}{l} w^k = x^k + \theta_k(x^k - x^{k-1}), \\ \bar{S}_k w^k = (1 - \alpha_k)w^k + \alpha_k S_k w^k, \\ z^k = (1 - \gamma_k)\bar{S}_k w^k + \gamma_k [w^k - \lambda_k F(w^k)], \\ \bar{S}_k z^k = (1 - \alpha_k)z^k + \alpha_k S_k z^k, \\ x^{k+1} = (1 - \beta_k)\bar{S}_k w^k + \beta_k \bar{S}_k z^k. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Bước 3. Đặt $k := k + 1$ và quay lại Bước 1.

2.1.2 Định lý hội tụ

Định lý 2.1. *Giả sử rằng các giả thiết (A₁), (A₂) và (A₃) được thỏa mãn. Khi đó, dãy lặp $\{x^k\}$ cho bởi Thuật toán 2.1 hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x^* của bài toán $VIF(\Omega, F)$.*

2.1.3 Các ví dụ tính toán

Trong mục này, chúng tôi trình bày một số thí nghiệm giải số trên máy tính để minh họa cho sự hội tụ của thuật toán (*HICA*) và so sánh với hai thuật toán: Thuật toán chiếu song song (*PPA*) của Anh, P.N. với đồng nghiệp và thuật toán lai ghép đường dốc (*HSDA*) của Yamada, I.

2.2 Kỹ thuật xấp xỉ song song quán tính

2.2.1 Thuật toán (*PIPA*)

Cho $x^0, x^1 \in \mathbb{H}$ và các tham số thỏa mãn điều kiện sau

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in (0, 1), \{\lambda_k\} \subset [\bar{a}, \hat{a}] \subset \left(0, \frac{2\beta}{L^2}\right), \\ \sqrt{1 - 2\lambda_k\beta + \lambda_k^2 L^2} < 1 - a, \\ \zeta_k \in (0, 1), \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_k = 0, \\ 0 \leq \tau_k \leq \zeta_k^2, \mu_k > 0, \\ \gamma_{k,i} \in (\bar{b}, \hat{b}) \subset (0, 1 - \max\{\beta_i : i \in J\}). \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Bước 1: Tính :

$$w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1}), \quad (2.5)$$

với

$$\alpha_k = \begin{cases} \min \left\{ \frac{\tau_k}{\|x^k - x^{k-1}\|}, \mu_k \right\} & \text{nếu } \|x^k - x^{k-1}\| \neq 0, \\ \mu_k & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Bước 2: Tính $u_i^k = (1 - \gamma_{k,i})w^k + \gamma_{k,i}S_i w^k$.

Đặt $t^k = u_{i_0}^k$, ở đây $i_0 \in \arg \max \{\|u_i^k - w^k\|, i \in J\}$.

Bước 3: Tính

$x^{k+1} = (1 - \varsigma_k)t^k + \varsigma_k[t^k - \lambda_k F(t^k)]$. Đặt $k = k + 1$ và quay lại bước 1.

2.2.2 Định lý hội tụ

Định lý 2.2. Cho $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là ánh xạ β -đơn điệu mạnh và L -liên tục Lipschitz và họ $S_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ là các ánh xạ β_i -nửa co và nửa đóng tại 0

với mọi $i \in J$. Dưới điều kiện (2.4) và $\Omega \neq \emptyset$, dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất x^* của bài toán $VIF(\Omega, F)$.

2.2.3 Áp dụng vào mô hình phục hồi ảnh

Trong phần này, chúng tôi áp dụng thuật toán (*PIPA*) để phục hồi các bức ảnh trong không gian Euclidean $\mathbb{H} = \mathbb{R}^s$, thuật toán phục hồi ảnh có dạng sau:

Thuật toán 2.2. Chọn điểm khởi đầu là x^0, x^1 bất kỳ trong $\mathbb{R}^s$.

Bước 1: Tính

$$w^k = x^k + \alpha_k(x^k - x^{k-1}),$$

với

$$\alpha_k = \begin{cases} \min \left\{ \frac{\tau_k}{\|x^k - x^{k-1}\|}, \mu_k \right\} & \text{nếu } \|x^k - x^{k-1}\| \neq 0, \\ \mu_k & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Bước 2: Tính

$$u_i^k = (1 - \gamma_{k,i}) w^k + \text{prox}_{\epsilon_i f_2} (I - \epsilon_i \nabla f_1) (w^k).$$

Đặt $t^k = u_{i_0}^k$, trong đó $i_0 \in \arg \max \{ \|u_i^k - w^k\| : i \in J \}$,

Bước 3: Tính

$$x^{k+1} = (1 - \varsigma_k) t^k + \varsigma_k [t^k - \lambda_k F(t^k)].$$

Đặt $k = k + 1$ và quay lại bước 1.

Chương 3

Phương pháp ánh xạ nghiệm nổi lỏng

Khi nghiên cứu ánh xạ nghiệm cho bài toán bất đẳng thức biến phân, chúng tôi phát triển dựa trên một số kết quả về tính không giãn mà Yamada, I. đã chỉ ra, chúng tôi đề xuất các kết quả mới về tính chất tựa không giãn của các ánh xạ nghiệm nổi lỏng. Ánh xạ nghiệm là một sự mở rộng của phép chiếu trên tập C thành phép chiếu trên một nửa không gian. Khi đó, chúng tôi xây dựng được thuật toán chiếu nổi lỏng ($RLPA$) để giải cho bài toán bất đẳng thức biến phân, ở đây, miền ràng buộc là giao của tập điểm bất động và tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân khác. Kết quả này đã được công bố trong [CT4] (Danh mục các công trình liên quan đến luận án). Hơn nữa, chúng tôi đề xuất thuật toán chiếu co (PCA) để giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ nghiệm $BVI(C, F, G)$ trong $\mathbb{R}^n$. Các kết quả này được công bố trong [CT2]. Ứng dụng của thuật toán ($RLPA$) và (PCA) với các tính toán minh họa và so sánh với các thuật toán khác được chỉ ra trên phần mềm Matlab.

3.1 Phương pháp chiếu nổi lỏng

3.1.1 Thuật toán (RLPA)

Bằng sự kết hợp giữa phép chiếu thông thường và phép chiếu nổi lỏng lên nửa không gian, chúng tôi xây dựng thuật toán (RLPA) để giải bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp, được phát biểu như sau:

Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathbb{H}$ và cho các ánh xạ $F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, $G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ và $\Xi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$.

$$\text{Tìm } u \in \Omega \text{ sao cho } \langle G(u), x - u \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.1)$$

ở đây, tập $\Omega = \text{Fix}(\Xi) \cap \text{Sol}(C, F)$, trong đó tập điểm bất động $\text{Fix}(\Xi) = \{x \in \mathbb{H} : x = \Xi x\}$, còn tập $\text{Sol}(C, F)$ là tập nghiệm của bài toán $VI(C, F)$. Các hàm giá F , G và dãy các tham số thoả mãn một số giả thiết sau:

- (B_1) Tập Ω khác rỗng;
- (B_2) Ánh xạ giá F là giả đơn điệu, L_F –liên tục Lipschitz và liên tục yếu trên C ;
- (B_3) Ánh xạ giá G là β –đơn điệu mạnh và L_G –liên tục Lipschitz;
- (B_4) Ánh xạ Ξ là không giãn và thoả mãn tính chất $I - S$ nửa đóng tại 0;
- (B_5) Với mọi số tự nhiên $k \geq 0$, các tham số dương $\xi_k, \gamma_k, \tau_k, \alpha_k, \tau$ và ν thoả mãn các điều kiện sau:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu \in (0, \min\{1, \frac{1}{L_F}\}), a \in (0, 1 - \nu L_F), \\ b > 0, \xi_k \in \left(b, \min\left\{\frac{1}{L_F}, \sqrt{\frac{\nu}{L_F}}\right\}\right), \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k, \\ \gamma_k \in \left(0, \min\left\{\frac{1 - \xi_k^2 L_F^2}{2}, \frac{1 - \nu L_F - a}{2}\right\}\right), \\ \tau_k \in (c, d) \subset (0, 1), \tau \in (0, \frac{2\beta}{L_G^2}), \\ \alpha_k \in (0, 1), \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty. \end{array} \right.$$

Thuật toán 3.1. (*Thuật toán chiếu nổi lỏng (RLPA)*)

Chọn $x^0 \in \mathbb{H}$, $k = 0$, $\nu > 0$, chọn các dãy số dương $\{\xi_k\}$, $\{\gamma_k\}$, $\{\tau_k\}$ và $\{\alpha_k\}$,

Bước 1. Tìm hình chiếu

$$y^k = \Pi_C[x^k - \xi_k F(x^k)],$$

Bước 2. Tính $w^k = x^k - \nu \xi_k F(y^k)$ và $t^k = \tau_k z^k + (1 - \tau_k) \Xi z^k$, ở đây

$$z^k = \begin{cases} w^k - \frac{d_k}{\|x^k - \xi_k F(x^k) - y^k\|^2} (x^k - \xi_k F(x^k) - y^k) & \text{nếu } d_k > 0, \\ w^k & \text{trường hợp còn lại,} \end{cases}$$

với $d_k = \langle x^k - \xi_k F(x^k) - y^k, w^k - y^k \rangle - \gamma_k \|y^k - x^k\|^2$,

Bước 3. Tính $x^{k+1} = t^k - \alpha_k \tau G(t^k)$. Đặt $k := k + 1$ và quay lại Bước 1.

3.1.2 Ánh xạ nghiệm

Với mỗi $x \in \mathbb{H}$ và $\xi > 0$, ta gọi $S : \mathbb{H} \rightarrow C$ là ánh xạ nghiệm của bài toán $VI(C, F)$, được cho như sau:

$$Sx = \Pi_C[x - \xi F(x)]. \quad (3.2)$$

Ta đã biết $x \in C$ là nghiệm của bài toán $VI(C, F)$ nếu và chỉ nếu nó là điểm bất động của ánh xạ nghiệm S . Cho $\gamma > 0$, ta gọi nửa không gian H_x như sau:

$$H_x = \{w \in \mathbb{H} : \langle x - \xi F(x) - Sx, w - Sx \rangle \leq \gamma \|x - Sx\|^2\}. \quad (3.3)$$

Gọi K là tập nghiệm của bài toán $VI(C, F)$. Từ định nghĩa của phép chiếu Π_C và từ (3.2), ta có:

$$\langle x - \xi F(x) - Sx, y - Sx \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C,$$

do đó:

$$\langle x - \xi F(x) - Sx, y - Sx \rangle \leq \gamma \|x - Sx\|^2, \quad \forall y \in C.$$

Khi đó, $C \subset H_x$ với mọi $x \in \mathbb{H}$. Mặt khác, với mỗi $z \in \mathbb{H}$, thì hình chiếu của z trên H_x được cho dưới dạng hiển như sau:

$$\Pi_{H_x}(z) = \begin{cases} z - \frac{\langle x - \xi F(x) - Sx, z - Sx \rangle - \gamma \|x - Sx\|^2}{\|x - \xi F(x) - Sx\|^2} (x - \xi F(x) - Sx) & \text{nếu } z \notin H_x, \\ z & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Tiếp theo, ta định nghĩa ánh xạ nghiệm $T : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ của bài toán $VI(C, F)$, như sau:

$$Tx = \Pi_{H_x}[x - \nu \xi F(Sx)], \quad (3.5)$$

với tham số $\nu > 0$.

Bổ đề sau chỉ ra một số tính chất quan trọng của ánh xạ nghiệm T và S .

Bổ đề 3.1. *Giả sử tập K khác rỗng, là tập nghiệm của của bài toán $VI(C, F)$. Ta có các khẳng định sau:*

(i) *Nếu F là tựa đơn điệu trên K và L -liên tục Lipschitz, $\xi \in (0, \frac{1}{L})$, $\gamma \in (0, \frac{1-\xi^2 L^2}{2})$ và $\nu \in (\xi^2 L, \min\{\frac{1-2\gamma}{L}, 1\})$, khi đó T là tựa không giãn mạnh trên K . Hơn nữa, với mọi $x \in \mathbb{H}$, $x^* \in K$,*

$$\begin{aligned} \|Tx - x^*\|^2 &\leq \|x - x^*\|^2 - \nu(1 - \nu L - 2\gamma)\|x - Sx\|^2 \\ &\quad - (\nu - \xi^2 L)\|Tx - Sx\|^2 - (1 - \nu)\|Tx - x\|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

(ii) *Nếu F là η -tựa đơn điệu mạnh ngược trên K , thì S là tựa không giãn mạnh trên K với điều kiện $m \in (\frac{\xi}{2\eta}, 1 - 2\gamma)$, $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ và $0 < \xi < 2\eta(1 - 2\gamma)$. Hơn nữa, với mọi $x \in C$,*

$$\begin{aligned} \|Sx - x^*\|^2 &\leq \|x - x^*\|^2 - 2\xi \left(\eta - \frac{\xi}{2m} \right) \|F(x) - F(x^*)\|^2 \\ &\quad - (1 - m - 2\gamma)\|x - Sx\|^2. \end{aligned}$$

(iii) *Nếu F là ζ -tựa đơn điệu mạnh trên K và L -liên tục Lipschitz trên $\mathbb{H}$, thì S là tựa co với hằng số $\delta := \frac{1}{\sqrt{1+2\xi\zeta-\xi^2 L^2}} \in (0, 1)$, với $\xi \in (0, \frac{2\zeta}{L^2})$.*

3.1.3 Định lý hội tụ

Các bổ đề sau được sử dụng để chứng minh sự hội tụ của dãy lặp trong thuật toán (RLPA).

Bổ đề 3.2. *Cho $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ là hai dãy số sinh ra bởi Thuật toán 3.1 và gọi $x^* \in K$. Khi đó, với các giả thiết (B_1) , (B_2) và (B_4) , ta có khẳng định sau:*

$$\begin{aligned} \|z^k - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \nu(1 - \nu L_F - 2\gamma_k)\|x^k - y^k\|^2 \\ &\quad - (\nu - \xi_k^2 L_F)\|z^k - y^k\|^2 - (1 - \nu)\|z^k - x^k\|^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Bổ đề 3.3. Giả sử dãy $\{x^k\}$ được sinh bởi thuật toán (RLPA) là bị chặn và $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ sao cho $x^{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$, thoả mãn $\lim_{j \rightarrow \infty} \|x^{k_j} - y^{k_j}\| = 0$ với $\{y^{k_j}\}$ là dãy con tương ứng. Khi đó, $\bar{x} \in \text{Sol}(C, F)$.

Định lý 3.1. Cho các ánh xạ giá F và G thoả mãn các giả thiết $(B_1), (B_2), (B_3), (B_4)$ và các tham số thoả mãn điều kiện (B_5) , hai dãy số $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ trong thuật toán (RLPA) hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất u của Bài toán 3.1.

3.1.4 Tính toán minh hoạ

3.2 Phương pháp chiếu co

3.2.1 Thuật toán (PCA)

Ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp $BVI(C, F, G)$, như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \text{Sol}(C, F), \text{ sao cho } \langle G(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \forall x \in \text{Sol}(C, F), \quad (3.8)$$

ở đây, ánh xạ giá $F : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ sao cho $F(x) = Qx + q$, ma trận $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ là ma trận phản đối xứng, $q \in \mathbb{R}^n$ là một véc tơ, được chọn sao cho F là giả đơn điệu và miền ràng buộc C được cho như sau

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\},$$

trong đó, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ là một ma trận và véc tơ $b \in \mathbb{R}^m$. Ánh xạ giá $G : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ thoả mãn điều kiện

(C_1) G đơn điệu mạnh với hệ số $\beta > 0$,

$$\langle G(x) - G(y), x - y \rangle \geq \beta \|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C;$$

(C_2) G liên tục Lipschitz với hệ số $\mathbb{L} > 0$,

$$\|G(x) - G(y)\| \leq \mathbb{L} \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C.$$

Thuật toán 3.2. Thuật toán chiếu co (PCA)

Bước 1. Cho $x^0 \in C, \eta > 0$ và

$$\begin{cases} \tau := 1 - \sqrt{1 - \mu(2\beta - \mu\mathbb{L}^2)} \\ \eta > \max \left\{ -6\tau_1(Q), \frac{\mathbb{L}\|Q\|(\mathbb{L} + \sqrt{\mathbb{L}^2 - \beta^2})}{\beta^2}, \frac{-2\tau_1(Q)(\beta^2 + \mathbb{L}^2)}{\beta^2} \right\}, \\ \mu \in \left(0, \frac{2\beta}{\mathbb{L}^2}\right), \alpha_k \in \left(0, \frac{2\mu\beta - 2\tau}{\mu^2\mathbb{L}^2 - \tau^2}\right), \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty. \end{cases} \quad (3.9)$$

Bước 2. ($k = 0, 1, \dots$) Tính y^k

$$\begin{aligned} y^k &= \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle q, x \rangle + \frac{\eta}{2} \|x - x^k\|^2 : x \in C \right\}, \\ x^{k+1} &= \Pi_C [y^k - \mu\alpha_k G(y^k)]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Bước 3. Đặt $k := k + 1$, quay lại Bước 2.

3.2.2 Định lý hội tụ

Định lý sau chỉ ra sự hội tụ của Thuật toán 3.2.

Định lý 3.2. Giả sử các hàm giá F, G thỏa mãn các giả thiết $(C_1), (C_2)$, các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ trong Thuật toán 3.2 hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x^* của bài toán $BVI(C, F, G)$.

3.2.3 Sai số tính toán

Trong mục này, chúng tôi trình bày về sai số tính toán của Thuật toán 3.2, áp dụng giải bài toán $BVI(C, F, G)$. Tại bước lặp thứ $k \geq 0$, từ thuật toán ta tính được các phần tử y^k và x^{k+1} , giả sử

$$\left\| y^k - \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle q, x \rangle + \frac{\eta}{2} \|x - x^k\|^2 : x \in C \right\} \right\| \leq \epsilon, \quad (3.11)$$

$$\|x^{k+1} - \Pi_C[y^k - \mu\alpha_k G(y^k)]\| \leq \epsilon, \quad (3.12)$$

sai số ϵ thường phụ thuộc vào hệ thống máy tính của chúng tôi. Khi tính toán trên máy tính, các dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ chưa hẳn đã hội tụ về nghiệm x^* của bài toán $BVI(C, F, G)$. Với mỗi $\nu > 0$, phần tử x^k tạo ra bởi Thuật toán 3.2 được gọi là ν -nghiệm của bài toán $BVI(C, F, G)$ nếu $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \nu$. Vì thế, với mỗi số $\chi > 0$, ta định nghĩa tập Sol_χ là tập

tất cả các χ -ng nghiệm của bài toán $BVI(C, F, G)$,

$$Sol_\chi = \{\bar{x} \in C : \|x^{k+1} - x^k\| \leq \chi\}.$$

Đặt

$$\begin{cases} \hat{y}^k &= \operatorname{argmin} \left\{ \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \langle q, x \rangle + \frac{\eta}{2} \|x - x^k\|^2 : x \in C \right\}, \\ \hat{x}^{k+1} &= \Pi_C[\hat{y}^k - \mu\alpha_k G(\hat{y}^k)]. \end{cases}$$

Giả sử rằng tồn tại $\sigma > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$C \subseteq B(x^*, \sigma), \langle G(C), C \rangle := \{\langle G(x), y \rangle : x, y \in C\} \subseteq B(0, \delta).$$

Chọn các hệ số thoả mãn điều kiện (3.9) và

$$\begin{cases} 0 < \epsilon < \bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}^2 > 4\mu\alpha_k\delta + \epsilon^2(1 + \tau)^2, \\ \Gamma_\eta := \frac{\eta\bar{\epsilon}^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} + \frac{2\tau_1(Q)\sigma^2}{\eta + 2\tau_1(Q)} - 4\mu\alpha_k\delta - \epsilon^2(1 + \tau)^2 - 2\epsilon(1 + \tau)\sigma. \end{cases} \quad (3.13)$$

Chú ý, $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Gamma_\eta = \bar{\epsilon}^2 - 4\mu\alpha_k\delta - \epsilon^2(1 + \tau)^2 > 0$, khi đó tồn tại các hệ số thoả mãn (3.13).

Định lý 3.3. *Giả sử rằng*

$$(i) \ Sol(C, F) \neq \emptyset;$$

(ii) $2\mu\alpha_k\delta \leq \epsilon^2$, điều kiện (3.9) và (3.13), và các giả thiết $C_1 - C_2$ thoả mãn. Chọn số dương K sao cho

$$K > \frac{4\sigma^2}{\Gamma_\eta};$$

(iii) dãy $\{x^k\}$ và $\{y^k\}$ thu được từ các công thức (3.2)-(3.12).

Khi đó, tồn tại một số tự nhiên $j \in [0, K]$ sao cho

$$(a) \ \|x^j - y^j\| \leq 2\bar{\epsilon};$$

$$(b) \ \|x^k - y^k\| > 2\bar{\epsilon}, \quad \forall k = 0, 1, \dots, j-1;$$

$$(c) \ x^j \in Sol_\epsilon, \text{ ở đây } \epsilon := 2\bar{\epsilon} + 3\epsilon.$$

3.2.4 Các ví dụ tính toán

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số ví dụ tính toán cho thuật toán (*PCA*), các thí nghiệm được lập trình trên phần mềm MATLAB R2014a với máy tính PC, Intel(R) Core(TM) i5-7360U CPU @ 2.30GHz 8.00GB Ram. Bên cạnh đó, chúng tôi so sánh hiệu quả của thuật toán (*PCA*) với các thuật toán dưới đạo hàm xấp xỉ (*PVSA*) của Maingé và thuật toán đạo hàm tăng cường (*Extra*) của Anh, P.N. và cộng sự, trong trường hợp ánh xạ giá F là giả đơn điệu.

Kết luận

Luận án tập trung nghiên cứu các phương pháp giải bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, các thuật toán giải mới được nghiên cứu dựa trên phương pháp lặp, phương pháp chiếu, kỹ thuật quán tính, nguyên lý bài toán phụ và các kỹ thuật trong Lý thuyết tối ưu.

1. Kết quả đạt được của luận án

- (i) Thuật toán lai ghép co quán tính (*HICA*) được chúng tôi phát triển từ kỹ thuật lặp của Yamada, I. kết hợp với kỹ thuật quán tính để giải bài toán $VIF(\Omega, F)$, ở đây miền ràng buộc Ω là tập điểm bất động của vô hạn các ánh xạ nửa co. Ưu điểm của thuật toán là chỉ sử dụng phương pháp tính toán xấp xỉ, không sử dụng phép chiếu, góp phần tăng tốc độ giải số trên máy tính. Kết quả của thuật toán đã được công bố trong công trình [CT1].
- (ii) Thuật toán xấp xỉ song song quán tính (*PIPA*) được xây dựng từ kỹ thuật quán tính và tính toán song song, để giải bài toán $VIF(\Omega, F)$, với ánh xạ giá F đơn điệu mạnh và liên tục Lipschitz, miền ràng buộc Ω là tập điểm bất động của m các ánh xạ nửa co. Chúng tôi đã áp dụng thuật toán (*PIPA*) vào mô hình xử lý ảnh, để phục hồi các bức ảnh đã bị làm mờ bởi kiểu Gaussian hoặc kiểu Motion. Khi đó, chúng tôi đã chỉ ra ưu điểm của thuật toán này khi tính toán so sánh với một số thuật toán phục hồi ảnh khác. Kết quả của thuật toán này được công bố trong [CT3].
- (iii) Thuật toán nối lỏng (*RLPA*) được xây dựng dựa trên sự kết hợp của phép chiếu trực tiếp lên miền ràng buộc C và phép chiếu nối lỏng trên một nửa không gian. Trong thuật toán này, chúng tôi đã áp dụng tìm

nghiệm cho bài toán bất đẳng thức biến phân trên giao của tập điểm bất động của một ánh xạ và tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân khác. Kết quả này được công bố trong [CT4].

- (iv) Xét bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ nghiệm $BVI(C, F, G)$, chúng tôi xây dựng thuật toán chiếu co (PCA) từ phép chiếu trực tiếp lên tập C và một bài toán phụ sử dụng kỹ thuật phân tích DC. Sự hội tụ của các dãy lặp tới một nghiệm tối ưu đã được chỉ ra. Tính hữu hiệu của thuật toán được tính toán thông qua các ví dụ số và các kết quả so sánh với các thuật toán khác. Sự hội tụ và kết quả tính toán của thuật toán (PCA) được công bố trong [CT2].

2. Một số hướng nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh những kết quả đã đạt được trong luận án, chúng tôi có thể nghiên cứu theo các hướng tiếp theo như sau:

- Nghiên cứu các thuật toán giải cho bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động, nhằm cải thiện tốc độ cũng như thời gian tính toán bằng cách kết hợp các phương pháp lặp Mann, lặp Halpern, kỹ thuật tính toán song song,...
- Đánh giá sai số và tốc độ hội tụ của một số thuật toán được đề xuất trong luận án, cách chọn bộ tham số để có được sự hội tụ tốt hơn.
- Nghiên cứu các thuật toán mới nhằm giảm nhẹ các điều kiện đặt lên các ánh xạ giá, đồng thời giảm bớt các phép chiếu trong mỗi bước lặp của thuật toán.
- Mở rộng giải bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp thành các bài toán nhiều cấp hơn hoặc miền ràng buộc phức tạp hơn.

Danh mục công trình có liên quan đến luận án

- [CT1] Truong, N.D., Kim, J.K., Anh, T.H.H. (2021), Hybrid inertial contraction projection methods extended to variational inequality problems, *Nonlinear Functional Analysis and Applications* 25(1), pp. 161 - 174. (ISSN:1229 - 1595, Scopus, Q3)
- [CT2] Thang, T.V., Anh, P.N., Truong, N.D. (2023), Convergence of the projection and contraction methods for solving bilevel variational inequality problems, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 46(9), 10867 - 10885. (ISSN: 1017 - 1398, SCIE, Q2)
- [CT3] Anh, P.N., Gibali, A., Truong, N.D. (2024), Parallel inertial proximal algorithm with applications to image recovery problems, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 25(11), pp. 2913 - 2931. (ISSN: 1345 - 4773, SCIE, Q2)
- [CT4] Anh, P.N., Khanh, P.Q., Truong, N.D. (2024), A relaxed projection method for solving bilevel variational inequality problems, *Optimization*, Doi: 10.1080/02331934.2024.2354456. (ISSN: 0233 - 1934, SCIE, Q2)