BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU, ĐỐI NGẪU VÀ TÍNH ỔN ĐỊNH VI PHÂN CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐA MỤC TIÊU

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Toán giải tích**
Mã số: **9 46 01 01**

HÀ NỘI, 2024

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2

Người hướng dẫn khoa học :

Phản biện: ....
....

Phản biện: ....
....

Phản biện: ....
....

Luận án sẽ được bảo vệ tại Hội đồng cấp Trường chấm luận án tiến sĩ họp tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 vào hồi ... giờ ... ngày... tháng ... năm 20....

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2

Mở đầu

Luận án trình bày một số kết quả mới về điều kiện tối ưu, quan hệ đối ngẫu và tính ổn định vi phân cho một số lớp bài toán tối ưu đa mục tiêu.

Luận án gồm 4 chương. Chương 1 trình bày các kiến thức cơ bản về Giải tích biến phân, Giải tích lồi và một số phép tính trong Giải tích khoảng. Chương 2 nghiên cứu về các điều kiện tối ưu và quan hệ đối ngẫu cho nghiệm tựa hữu hiệu (Pareto) xấp xỉ của bài toán tối ưu đa mục tiêu không trơn nửa vô hạn giá trị khoảng. Chương 3 trình bày về các điều kiện tối ưu và quan hệ đối ngẫu cho nghiệm hữu hiệu (Pareto) của bài toán tối ưu đa mục tiêu phân thức giá trị khoảng với dữ liệu Lipschitz. Chương 4 khảo sát tính ổn định vi phân cho bài toán tối ưu đa mục tiêu lồi phụ thuộc tham số trong các không gian hữu hạn chiều.

Các kết quả chính của luận án bao gồm:

1) Thiết lập các điều kiện cần và điều kiện đủ tối ưu kiểu Karush-Kuhn-Tucker (viết tắt là KKT) cho các nghiệm tựa hữu hiệu xấp xỉ của bài toán tối ưu đa mục tiêu không trơn nửa vô hạn giá trị khoảng.

2) Thiết lập các quan hệ đối ngẫu (đối ngẫu yếu, đối ngẫu mạnh, đối ngẫu ngược) kiểu Mond-Weir cho các nghiệm tựa hữu hiệu xấp xỉ của bài toán tối ưu đa mục tiêu không trơn nửa vô hạn giá trị khoảng.

3) Thiết lập các điều kiện cần và điều kiện đủ tối ưu kiểu KKT cho các nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu phân thức giá trị khoảng với dữ liệu Lipschitz.

4) Thiết lập các quan hệ đối ngẫu (đối ngẫu yếu, đối ngẫu mạnh, đối ngẫu ngược) kiểu Mond-Weir cho các nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu phân thức giá trị khoảng.

5) Thiết lập các công thức tính toán dưới vi phân và đối đạo hàm của ánh xạ điểm hữu hiệu của các bài toán tối ưu đa mục tiêu lồi có tham số trong không gian hữu hạn chiều.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng ta sẽ trình bày một số kiến thức cơ bản về Giải tích biến phân, Giải tích lồi và một số phép tính trong Giải tích khoảng để sử dụng cho các chương sau.

1.1 Nón pháp tuyến cơ bản

Trong mục này, ta trình bày lại khái niệm nón pháp tuyến Fréchet/chính quy, nón pháp tuyến cơ bản/qua giới hạn/Mordukhovich; kết quả về tính nón pháp tuyến chính quy, nón pháp tuyến cơ bản của tích Descartes của hai tập hợp, của giao các tập hợp; tính nón phá tuyến cơ bản thông qua tập chân hình chiếu.

1.2 Dưới vi phân

Phần này dùng để nhắc lại khái niệm dưới vi phân Fréchet/chính quy, dưới vi phân cơ bản/qua giới hạn/Mordukhovich và dưới vi phân suy biến; các kết quả tính toán dưới vi phân của hàm chỉ, của hàm khả vi chặt, dưới vi phân của một tổng/max của một họ hữu hạn hàm Lipschitz địa phương, dưới vi phân của thương hai hàm Lipschitz địa phương.

1.3 Đối đạo hàm

Mục này dùng để trình bày khái niệm đối đạo hàm Fréchet, đối đạo hàm cơ bản/qua giới hạn/Mordukhovich (theo hướng) của ánh xạ đa trị và các quy tắc tính toán đối đạo hàm của các ánh xạ đa trị.

1.4 Khoảng và quan hệ thứ tự

Trong mục này, chúng ta nhắc lại một số định nghĩa và tính chất trong giải tích khoảng.

Chương 2

Điều kiện tối ưu và quan hệ đối ngẫu cho nghiệm xấp xỉ của bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn giá trị khoảng

Trong chương này, chúng tôi trình bày các kết quả mới về điều kiện tối ưu và quan hệ đối ngẫu cho các nghiệm xấp xỉ của bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn giá trị khoảng có dạng sau:

$$\begin{aligned} &LU\text{−Min}\, f(x) := (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \qquad \text{(SIVP)}\\ &\text{với ràng buộc } \; x \in \mathcal{F} := \{x \in \Omega \,:\, g_t(x) \le 0, t \in T\}, \end{aligned}$$

ở đó $f_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{K}_c$, $i \in I := \{1, \ldots, m\}$, là các hàm giá trị khoảng được xác định bởi $f_i(x) = [f_i^L(x), f_i^U(x)]$, với f_i^L, $f_i^U \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm Lipschitz địa phương thoả mãn $f_i^L(x) \le f_i^U(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ và $i \in I$, $\mathcal{K}_c$ là lớp các khoảng đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}$, $g_t \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $t \in T$, là các hàm Lipschitz địa phương, T là một tập bất kỳ (có thể vô hạn), và Ω là một tập con đóng khác rỗng của $\mathbb{R}^n$.

Các kết quả của chương này được viết dựa trên bài báo [CT1].

2.1 Nghiệm tựa hữu hiệu xấp xỉ

Cho $\epsilon_i^L, \epsilon_i^U$, $i \in I$, là các số thực thoả mãn $0 \le \epsilon_i^L \le \epsilon_i^U$ với tất cả $i \in I$ và đặt $\mathcal{E} := (\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m)$, ở đó $\mathcal{E}_i := [\epsilon_i^L, \epsilon_i^U]$.

Định nghĩa 2.1. Cho $\bar{x} \in \mathcal{F}$. Ta nói rằng

(i) $\bar{x}$ là một nghiệm *$\mathcal{E}$-tựa hữu hiệu (Pareto) kiểu-1* của (SIVP), ký hiệu bởi $\bar{x} \in \mathcal{E}\text{-}\mathcal{S}_1^q$(SIVP), nếu không tồn tại $x \in \mathcal{F}$ sao cho

$$\begin{cases} f_i(x) \le_{LU} f_i(\bar{x}) - \mathcal{E}_i\|x - \bar{x}\|, & \forall i \in I,\\ f_k(x) <_{LU} f_k(\bar{x}) - \mathcal{E}_k\|x - \bar{x}\|, & \text{với ít nhất một } \; k \in I. \end{cases}$$

(ii) $\bar{x}$ là một nghiệm *$\mathcal{E}$-tựa hữu hiệu (Pareto) kiểu-2* của (SIVP) và ký hiệu bởi $\bar{x} \in \mathcal{E}\text{-}\mathcal{S}_2^q(\text{SIVP})$, nếu không tồn tại $x \in \mathcal{F}$ sao cho

$$\begin{cases} f_i(x) \leq_{LU} f_i(\bar{x}) - \mathcal{E}_i \|x - \bar{x}\|, & \forall i \in I, \\ f_k(x) <_{LU}^s f_k(\bar{x}) - \mathcal{E}_k \|x - \bar{x}\|, & \text{với ít nhất một } \ k \in I. \end{cases}$$

(iii) $\bar{x}$ là một nghiệm *$\mathcal{E}$-tựa hữu hiệu (Pareto) yếu kiểu-1* của (SIVP), ký hiệu bởi

$$\bar{x} \in \ \mathcal{E}\text{-}\mathcal{S}_1^{qw}(\text{SIVP}),$$

nếu không tồn tại $x \in \mathcal{F}$ sao cho $f_i(x) <_{LU} f_i(\bar{x}) - \mathcal{E}_i \|x - \bar{x}\|, \ \forall i \in I.$

(iv) $\bar{x}$ là một nghiệm *$\mathcal{E}$-tựa hữu hiệu (Pareto) yếu kiểu-2* của (SIVP), ký hiệu bởi

$$\bar{x} \in \mathcal{E}\text{-}\mathcal{S}_2^{qw}(\text{SIVP}),$$

nếu không tồn tại $x \in \mathcal{F}$ sao cho $f_i(x) <_{LU}^s f_i(\bar{x}) - \mathcal{E}_i \|x - \bar{x}\|, \ \forall i \in I.$

Lưu ý rằng, nếu $\mathcal{E} = 0$, tức là, $\epsilon_i^L = \epsilon_i^U = 0$, $i \in I$ thì khái niệm của một nghiệm $\mathcal{E}$-tựa hữu hiệu kiểu-1 (tương ứng, nghiệm $\mathcal{E}$-tựa hữu hiệu kiểu-2, $\mathcal{E}$-tựa hữu hiệu yếu kiểu-1, $\mathcal{E}$-tựa hữu hiệu yếu kiểu-2) định nghĩa ở trên trùng với khái niệm một nghiệm *hữu hiệu kiểu-1* (tương ứng, *nghiệm hữu hiệu kiểu-2*, *nghiệm hữu hiệu yếu kiểu-1*, *nghiệm hữu hiệu yếu kiểu-2*).

2.2 Điều kiện tối ưu

2.2.1 Điều kiện cần

Cho $\mathbb{R}_+^{|T|}$ là tập các hàm số $\mu\colon T \to \mathbb{R}_+$ lấy giá trị $\mu_t := \mu(t) = 0$ với tất cả $t \in T$ trừ một số hữu hạn điểm. Tập nhân tử ràng buộc hoạt tại $\bar{x} \in \Omega$ được ký hiệu bởi

$$A(\bar{x}) := \left\{ \mu \in \mathbb{R}_+^{|T|} \ : \ \mu_t g_t(\bar{x}) = 0, \ \ \forall t \in T \right\}.$$

Với mỗi $\mu \in A(\bar{x})$, đặt $T(\mu) := \{t \in T \ : \ \mu_t \neq 0\}$.

Để nhận được các điều kiện cần tối ưu kiểu KKT cho các nghiệm tựa hữu hiệu xấp xỉ của (SIVP), ta xét điều kiện chính quy sau:

Định nghĩa 2.2. Cho $\bar{x} \in \mathcal{F}$. Ta nói rằng $\bar{x}$ mãn điều kiện *chuẩn hóa ràng buộc qua giới hạn* nếu điều kiện sau thỏa mãn

$$N(\bar{x}; \mathcal{F}) \subseteq \bigcup_{\mu \in A(\bar{x})} \left[\sum_{t \in T} \mu_t \partial g_t(\bar{x}) \right] + N(\bar{x}; \Omega). \tag{LCQ}$$

Chú ý rằng điều kiện (LCQ) đã được sử dụng rộng rãi trong nhiều tài liệu và nó tổng quát các điều kiện chuẩn hóa ràng buộc quen thuộc như điều kiện Mangasarian–Fromovitz và điều kiện chuẩn hóa kiểu Farkas–Minkowski (xem, chẳng hạn, B.S. Mordukhovich, Variational Analysis and Generalized Differentiation, Vol. 1: Basic Theory, Springer, Berlin, 2006; T.D. Chuong, D.S. Kim, J. Optim. Theory Appl. 160 (2014), 748–762; L.G. Jiao, D.S. Kim, Y. Zhou, Optim. Lett. 15 (2021), 1759–1772).

Định lí 2.1. *Cho $\bar{x} \in \mathcal{F}$ và giả sử rằng $\bar{x}$ thỏa mãn* (LCQ). *Nếu $\bar{x} \in \mathcal{E}\text{-}\mathcal{S}_2^{qw}$*(SIVP)*, thì tồn tại $\lambda^L, \lambda^U \in \mathbb{R}^m_+$ với $\sum_{i\in I}(\lambda_i^L + \lambda_i^U) = 1$, và $\mu \in A(\bar{x})$ sao cho*

$$0 \in \sum_{i\in I} \left[\lambda_i^L \partial f_i^L(\bar{x}) + \lambda_i^U \partial f_i^U(\bar{x})\right] + \sum_{t\in T} \mu_t \partial g_t(\bar{x}) + \sum_{i\in I} \left(\lambda_i^L \epsilon_i^U + \lambda_i^U \epsilon_i^L\right) \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n} + N(\bar{x};\Omega). \tag{2.1}$$

2.2.2 Điều kiện đủ

Trong phần tiếp theo, chúng ta trình bày các điều kiện đủ cho các nghiệm tựa hữu hiệu xấp xỉ của (SIVP). Ta nhắc lại khái niệm lồi suy rộng và lồi suy rộng chặt trong bài báo của T.D. Chuong, D.S. Kim, J. Optim. Theory Appl. 160 (2014), 748–762

Định nghĩa 2.3. (i) Ta nói rằng (f, g_T) là *lồi suy rộng trên* Ω tại $\bar{x} \in \Omega$ nếu với bất kỳ $x \in \Omega$, $z_i^{*L} \in \partial f_i^L(\bar{x})$, $z_i^{*U} \in \partial f_i^U(\bar{x})$, $i \in I$, và $x_t^* \in \partial g_t(\bar{x})$, $t \in T$, tồn tại $\nu \in [N(\bar{x};\Omega)]^\circ$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} &f_i^L(x) - f_i^L(\bar{x}) \geq \langle z_i^{*L}, \nu\rangle, \quad \forall i \in I,\\ &f_i^U(x) - f_i^U(\bar{x}) \geq \langle z_i^{*U}, \nu\rangle, \quad \forall i \in I,\\ &g_t(x) - g_t(\bar{x}) \geq \langle x_t^*, \nu\rangle, \quad \forall t \in T,\\ &\text{và} \ \ \langle b^*, \nu\rangle \leq \|x - \bar{x}\|, \quad \forall b^* \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

(ii) Ta nói rằng (f, g_T) là *lồi suy rộng chặt trên* Ω tại $\bar{x} \in \Omega$ nếu với bất kỳ $x \in \Omega \setminus \{\bar{x}\}$, $z_i^{*L} \in \partial f_i^L(\bar{x})$, $z_i^{*U} \in \partial f_i^U(\bar{x})$, $i \in I$, và $x_t^* \in \partial g_t(\bar{x})$, $t \in T$, tồn tại $\nu \in [N(\bar{x};\Omega)]^\circ$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} &f_i^L(x) - f_i^L(\bar{x}) > \langle z_i^{*L}, \nu\rangle, \quad \forall i \in I,\\ &f_i^U(x) - f_i^U(\bar{x}) > \langle z_i^{*U}, \nu\rangle, \quad \forall i \in I,\\ &g_t(x) - g_t(\bar{x}) \geq \langle x_t^*, \nu\rangle, \quad \forall t \in T,\\ &\text{và} \ \ \langle b^*, \nu\rangle \leq \|x - \bar{x}\|, \quad \forall b^* \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

Nhận xét 2.1. Ta thấy rằng nếu Ω là lồi và f_i^L, f_i^U, $i \in I$, và g_t, $t \in T$, là lồi (tương ứng, lồi chặt), thì (f, g_T) là lồi suy rộng (tương ứng, lồi suy rộng chặt) trên Ω tại bất kỳ $\bar{x} \in \Omega$ với $\nu = x - \bar{x}$. Hơn nữa, tồn tại những ví dụ chỉ ra rằng lớp các hàm lồi thực sự chứa trong lớp các hàm lồi suy rộng (xem, chẳng hạn, T.D. Chuong, D.S. Kim, J. Optim. Theory Appl. 160 (2014), 748–762, Example 3.2 và T.D. Chuong, D.S. Kim, Positivity 20 (2016), 187–207, Example 3.12).

Định nghĩa 2.4. (i) Ta nói rằng (f, g_T) là $\mathcal{E}$-*giả tựa lồi suy rộng trên* Ω tại $\bar{x} \in \Omega$ nếu với bất kỳ $x \in \Omega$, $z_i^{*L} \in \partial f_i^L(\bar{x})$, $z_i^{*U} \in \partial f_i^U(\bar{x})$, $i \in I$, và $x_t^* \in \partial g_t(\bar{x})$, $t \in T$, tồn tại $\nu \in [N(\bar{x}; \Omega)]^\circ$ thoả mãn

$$\begin{aligned}
&\langle z_i^{*L}, \nu\rangle + \epsilon_i^U \|x - \bar{x}\| \geq 0 \Rightarrow f_i^L(x) \geq f_i^L(\bar{x}) - \epsilon_i^U \|x - \bar{x}\|, \forall i \in I,\\
&\langle z_i^{*U}, \nu\rangle + \epsilon_i^L \|x - \bar{x}\| \geq 0 \Rightarrow f_i^U(x) \geq f_i^U(\bar{x}) - \epsilon_i^L \|x - \bar{x}\|, \forall i \in I,\\
&g_t(x) \leq g_t(\bar{x}) \Rightarrow \langle x_t^*, \nu\rangle \leq 0, \forall t \in T,\\
&\text{và } \ \langle b^*, \nu\rangle \leq \|x - \bar{x}\|, \quad \forall b^* \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

(ii) Ta nói rằng (f, g_T) là $\mathcal{E}$-*giả tựa lồi suy rộng chặt trên* Ω tại $\bar{x} \in \Omega$ nếu với bất kỳ $x \in \Omega \setminus \{\bar{x}\}$, $z_i^{*L} \in \partial f_i^L(\bar{x})$, $z_i^{*U} \in \partial f_i^U(\bar{x})$, $i \in I$, và $x_t^* \in \partial g_t(\bar{x})$, $t \in T$, tồn tại $\nu \in [N(\bar{x}; \Omega)]^\circ$ thoả mãn

$$\begin{aligned}
&\langle z_i^{*L}, \nu\rangle + \epsilon_i^U \|x - \bar{x}\| \geq 0 \Rightarrow f_i^L(x) > f_i^L(\bar{x}) - \epsilon_i^U \|x - \bar{x}\|, \forall i \in I,\\
&\langle z_i^{*U}, \nu\rangle + \epsilon_i^L \|x - \bar{x}\| \geq 0 \Rightarrow f_i^U(x) > f_i^U(\bar{x}) - \epsilon_i^L \|x - \bar{x}\|, \forall i \in I,\\
&g_t(x) \leq g_t(\bar{x}) \Rightarrow \langle x_t^*, \nu\rangle \leq 0, \forall t \in T,\\
&\text{và } \ \langle b^*, \nu\rangle \leq \|x - \bar{x}\|, \forall b^* \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Nhận xét 2.2. Từ định nghĩa, ta dễ thấy rằng nếu (f, g_T) là lồi suy rộng (tương ứng, chặt) trên Ω tại $\bar{x} \in \Omega$, thì với bất kỳ $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m)$, ở đó $\mathcal{E}_i = [\epsilon_i^L, \epsilon_i^u]$, $0 \leq \epsilon_i^L \leq \epsilon_i^U$, $i \in I$, (f, g_T) là $\mathcal{E}$-giả tựa lồi suy rộng (tương ứng, chặt) trên Ω tại $\bar{x} \in \Omega$. Hơn nữa, lớp các hàm lồi suy rộng (chặt) thực sự chứa trong lớp các hàm $\mathcal{E}$-giả tựa lồi suy rộng (chặt).

Định lí 2.2. *Cho* $\bar{x} \in \mathcal{F}$ *và giả sử rằng tồn tại* $\lambda^L, \lambda^U \in \mathbb{R}_+^m$ *với* $\sum_{i \in I}(\lambda_i^L + \lambda_i^U) = 1$, *và* $\mu \in A(\bar{x})$ *thoả mãn* (2.1).

(i) *Nếu* (f, g_T) *là* $\mathcal{E}$-*giả tựa lồi suy rộng trên* Ω *tại* $\bar{x}$, *thì* $\bar{x} \in \mathcal{E}$-$\mathcal{S}_2^{qw}$(SIVP).

(ii) *Nếu* (f, g_T) *là* $\mathcal{E}$-*giả tựa lồi suy rộng chặt trên* Ω *tại* $\bar{x}$, *thì* $\bar{x} \in \mathcal{E}$-$\mathcal{S}_1^q$(SIVP) *và do đó ta có* $\bar{x} \in \mathcal{E}$-$\mathcal{S}_2^q$(SIVP) *và* $\bar{x} \in \mathcal{E}$-$\mathcal{S}_1^{qw}$(SIVP).

Nhận xét 2.3. (i) Theo Nhận xét 2.2 và T.Q. Son, N.V. Tuyen, C.-F. Wen, Acta. Math. Vietnam 45 (2020), 435–448, Example 3.2, ta thấy rằng một mình điều kiện (2.1) không đủ để đảm bảo $\bar{x}$ là một nghiệm $\mathcal{E}$-tựa hữu hiệu (yếu) của (SIVP) nếu tính $\mathcal{E}$-giả tựa lồi suy rộng (chặt) (f, g_T) trên Ω tại $\bar{x}$ bị vi phạm.

(ii) Nếu (f, g_T) là $\mathcal{E}$-giả tựa lồi suy rộng trên Ω tại $\bar{x} \in \mathcal{F}$ và tồn tại $\lambda^L, \lambda^U \in \mathbb{R}_+^m$ với $\lambda_i^L > 0, \lambda_i^U > 0$, $\forall i \in I$, $\sum_{i \in I}(\lambda_i^L + \lambda_i^U) = 1$, và $\mu \in A(\bar{x})$ thoả mãn (2.1), thì $\bar{x} \in \mathcal{E}$-$\mathcal{S}_1^q$(SIVP).

(iii) Vì lớp các hàm $\mathcal{E}$-giả tựa lồi suy rộng (chặt) là thực sự rộng hơn lớp các hàm lồi suy rộng (chặt), các kết quả trên của chúng tôi trong Định lý 2.1 tổng quát hóa và cải tiến các kết quả tương ứng trong T.D. Chuong, D.S. Kim, Positivity 20 (2016), 187–207; L.G. Jiao, D.S. Kim, Y. Zhou, Optim. Lett. 15 (2021), 1759–1772; T.Q. Son, N.V. Tuyen, C.-F. Wen, Acta. Math. Vietnam 45 (2020), 435–448; N.V. Tuyen, Investigación Oper. 42 (2021), 223–237.

2.3 Quan hệ đối ngẫu

2.3.1 Đối ngẫu yếu

Với $y \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda^L, \lambda^U) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^m_+ \setminus \{(0,0)\}$, và $\mu \in \mathbb{R}^{|T|}_+$, đặt

$$\mathcal{L}(y, \lambda^L, \lambda^U, \mu) := f(y) = \big([f_1^L(y), f_1^U(y)], \dots, [f_m^L(y), f_m^U(y)]\big).$$

Với bài toán gốc (SIVP), ta xét bài toán đối ngẫu sau theo nghĩa của Mond–Weir (được phát biểu dưới dạng xấp xỉ):

$$\begin{aligned} &\max \quad \mathcal{L}(y, \lambda^L, \lambda^U, \mu) \\ &\text{với ràng buộc} \quad (y, \lambda^L, \lambda^U, \mu) \in \mathcal{F}_{MW}, \end{aligned} \tag{SIVD$_{MW}$}$$

ở đó, tập chấp nhận được được định nghĩa bởi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{MW} := \Big\{&(y, \lambda^L, \lambda^U, \mu) \in \Omega \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^{|T|}_+ : \\ &0 \in \sum_{i \in I} [\lambda_i^L \partial f_i^L(y) + \lambda_i^U \partial f_i^U(y)] + \sum_{t \in T} \mu_t \partial g_t(y) + \sum_{i \in I} (\lambda_i^L \epsilon_i^U \\ &+ \lambda_i^U \epsilon_i^L) \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n} + N(y; \Omega), \mu_t g_t(y) \geq 0, t \in T, \sum_{i \in I} (\lambda_i^L + \lambda_i^U) = 1 \Big\}. \end{aligned}$$

Định lý sau mô tả các quan hệ đối ngẫu yếu cho các nghiệm tựa hữu hiệu xấp xỉ giữa bài toán gốc (SIVP) và bài toán đối ngẫu (SIVD$_{MW}$).

Định lí 2.3 (Tính $\mathcal{E}$-đối ngẫu yếu)**.** *Cho $x \in \mathcal{F}$ và $(y, \lambda^L, \lambda^U, \mu) \in \mathcal{F}_{MW}$.*

(i) *Nếu (f, g_T) là $\mathcal{E}$-giả tựa lồi suy rộng trên Ω tại y, thì*

$$f(x) \not<^s_{LU} \mathcal{L}(y, \lambda^L, \lambda^U, \mu) - \mathcal{E}\|x - y\|.$$

(ii) *Nếu (f, g_T) là $\mathcal{E}$-giả tựa lồi suy rộng chặt trên Ω tại y, thế thì*

$$f(x) \not\leq_{LU} \mathcal{L}(y, \lambda^L, \lambda^U, \mu) - \mathcal{E}\|x - y\|.$$

Ta có thể chỉ ra rằng tính tựa giả lồi suy rộng xấp xỉ của (f, g_T) trên Ω được sử dụng trong Định lý 2.3 không thể bỏ được.

2.3.2 Đối ngẫu mạnh

Trong mục này, chúng ta trình bày một định lý về mối quan hệ đối ngẫu mạnh giữa bài toán gốc (SIVP) và bài toán đối ngẫu (SIVD$_{MW}$).

Định lí 2.4 (Tính $\mathcal{E}$-đối ngẫu mạnh)**.** *Cho $\bar{x}$ là một nghiệm $\mathcal{E}$-tựa hữu hiệu yếu kiểu-2 của* (SIVP) *và giả sử rằng điều kiện* (LCQ) *thỏa mãn tại điểm này. Khi đó, tồn tại $\bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U \in \mathbb{R}^m_+$, và $\bar{\mu} \in A(\bar{x})$ sao cho $(\bar{x}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu}) \in \mathcal{F}_{MW}$, $f(\bar{x}) = \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu})$. Hơn nữa,*

(i) *nếu* (f, g_T) *là* $\mathcal{E}$*-tựa giả lồi suy rộng trên* Ω *tại* $\bar{x}$*, thì* $(\bar{x}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu})$ *là một nghiệm* $\mathcal{E}$*-tựa hữu hiệu yếu kiểu-2 của* (SIVD$_{MW}$)*.*

(ii) *nếu* (f, g_T) *là* $\mathcal{E}$*-tựa giả lồi suy rộng chặt trên* Ω *tại* $\bar{x}$*, thì* $(\bar{x}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu})$ *là một nghiệm* $\mathcal{E}$*-tựa hữu hiệu kiểu-1 của* (SIVD$_{MW}$)*.*

2.3.3 Đối ngẫu ngược

Phần này dành để trình bày quan hệ đối ngẫu ngược của các nghiệm tựa hữu hiệu xấp xỉ giữa bài toán gốc (SIVP) và bài toán đối ngẫu (SIVD$_{MW}$).

Định lí 2.5 (Tính đối ngẫu ngược)**.** *Cho* $(\bar{x}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu}) \in \mathcal{F}_{MW}$*.*

(i) *Nếu* $\bar{x} \in \mathcal{F}$ *và* (f, g_T) *là* $\mathcal{E}$*-tựa giả lồi suy rộng trên* Ω *tại* $\bar{x}$*, thì* $\bar{x}$ *là một nghiệm* $\mathcal{E}$*-tựa hữu hiệu yếu kiểu-2 của* (SIVP)*.*

(ii) *Nếu* $\bar{x} \in \mathcal{F}$ *và* (f, g_T) *là* $\mathcal{E}$*-tựa giả lồi suy rộng chặt trên* Ω *tại* $\bar{x}$*, thì* $\bar{x}$ *là một nghiệm* $\mathcal{E}$*-tựa hữu hiệu kiểu-1 của* (SIVP)*.*

Chương 3

Điều kiện tối ưu và quan hệ đối ngẫu trong tối ưu đa mục tiêu phân thức giá trị khoảng

Trong chương này, chúng tôi sẽ trình bày về các điều kiện tối ưu và quan hệ đối ngẫu cho các nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu phân thức với các hàm nhận giá trị khoảng:

$$LU\text{-}\mathrm{Min}\ F(x) := \left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \ldots, \frac{f_m(x)}{g_m(x)}\right) \tag{FIMP}$$
$$\text{với ràng buộc}\ \ x \in \Omega := \{x \in S \,:\, h_j(x) \le 0, j = 1, \ldots, p\},$$

ở đó $f_i, g_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{K}_c$, $i \in I := \{1, \ldots, m\}$, là các hàm giá trị khoảng được định nghĩa tương ứng bởi $f_i(x) = [f_i^L(x), f_i^U(x)]$, $g_i(x) = [g_i^L(x), g_i^U(x)]$, ở đó, f_i^L, f_i^U, g_i^L,$g_i^U \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm Lipschitz địa phương và thoả mãn $f_i^L(x) \le f_i^U(x)$ và

$$0 < g_i^L(x) \le g_i^U(x)$$

với mọi $x \in S$ và $i \in I$, $\mathcal{K}_c$ là lớp các khoảng đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}$, $h_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j \in J := \{1, \ldots, p\}$, là các hàm Lipschitz địa phương, và S là một tập con đóng khác rỗng trong $\mathbb{R}^n$.

Các kết quả của chương này được viết dựa trên bài báo [CT2].

3.1 Nghiệm tối ưu

Để cho các phát biểu được đơn giản, sau đây, *chúng ta luôn giả thiết rằng* $f_i^L(x) \ge 0$, $\forall x \in S$ và $i \in I$. Với mỗi $i \in I$ và $x \in \mathbb{R}^n$, đặt $F_i(x) := \frac{f_i(x)}{g_i(x)}$. Theo định nghĩa, ta có

$$F_i(x) := \frac{f_i(x)}{g_i(x)} = \left[\frac{f_i^L(x)}{g_i^U(x)}, \frac{f_i^U(x)}{g_i^L(x)}\right].$$

Định nghĩa 3.1. Cho $\bar{x} \in \Omega$. Ta nói rằng

(i) $\bar{x}$ là một *nghiệm hữu hiệu kiểu-1* của (FIMP), ký hiệu bởi $\bar{x} \in \mathcal{S}_1$(FIMP), nếu không tồn tại $x \in \Omega$ sao cho

$$\begin{cases} F_i(x) \leq_{LU} F_i(\bar{x}), & \forall i \in I, \\ F_k(x) <_{LU} F_k(\bar{x}), & \text{với ít nhất một } \ k \in I. \end{cases}$$

(ii) $\bar{x}$ là một *nghiệm hữu hiệu kiểu-2* của (FIMP), ký hiệu bởi $\bar{x} \in \mathcal{S}_2$(FIMP), nếu không tồn tại $x \in \Omega$ sao cho

$$\begin{cases} F_i(x) \leq_{LU} F_i(\bar{x}), & \forall i \in I, \\ F_k(x) <^s_{LU} F_k(\bar{x}), & \text{với ít nhất một } \ k \in I. \end{cases}$$

(iii) $\bar{x}$ là một *nghiệm hữu hiệu yếu kiểu-1* của (FIMP), kí hiệu bởi $\bar{x} \in \mathcal{S}^w_1$(FIMP), nếu không tồn tại $x \in \Omega$ sao cho $F_i(x) <_{LU} F_i(\bar{x}), \ \ \forall i \in I$.

(iv) $\bar{x}$ là một *nghiệm hữu hiệu yếu kiểu-2* của (FIMP), ký hiệu bởi $\bar{x} \in \mathcal{S}^w_2$(FIMP), nếu không tồn tại $x \in \Omega$ sao cho $F_i(x) <^s_{LU} F_i(\bar{x}), \ \ \forall i \in I$.

3.2 Điều kiện tối ưu

3.2.1 Điều kiện cần

Chúng ta bắt đầu với một kết quả về điều kiện cần tối ưu dạng Fritz-John cho các nghiệm hữu hiệu yếu kiểu-2 của bài toán (FIMP).

Định lí 3.1. *Nếu $\bar{x} \in \mathcal{S}^w_2$(FIMP), thì tồn tại $\lambda^L_i \geq 0$, $\lambda^U_i \geq 0$, $i \in I$, và $\mu_j \geq 0$, $j \in J$ với $\sum_{i\in I}(\lambda^L_i + \lambda^U_i) + \sum_{j\in J}\mu_j = 1$, sao cho*

$$\begin{aligned} 0 \in \sum_{i\in I} \frac{\lambda^L_i}{g^U_i(\bar{x})} & \left[\partial f^L_i(\bar{x}) - \frac{f^L_i(\bar{x})}{g^U_i(\bar{x})}\partial^+ g^U_i(\bar{x})\right] \\ & + \sum_{i\in I} \frac{\lambda^U_i}{g^L_i(\bar{x})} \left[\partial f^U_i(\bar{x}) - \frac{f^U_i(\bar{x})}{g^L_i(\bar{x})}\partial^+ g^L_i(\bar{x})\right] \\ & + \sum_{j\in J}\mu_j \partial h_j(\bar{x}) + N(\bar{x}; S), \quad \mu_j h_j(\bar{x}) = 0, \quad j \in J. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Quan hệ nhận được trong (3.1) gợi ý cho chúng tôi định nghĩa một điều kiện kiểu Karush–Kuhn–Tucker (KKT) khi liên hệ với các nghiệm hữu hiệu của bài toán (FIMP).

Định nghĩa 3.2. Cho $\bar{x} \in \Omega$. Ta nói rằng $\bar{x}$ thoả mãn *điều kiện tối ưu KKT* nếu (3.1) thoả mãn với $\lambda^L_i \geq 0$, $\lambda^U_i \geq 0$, $i \in I$, và $\mu_j \geq 0$, $j \in J$ sao cho $\sum_{i\in I}(\lambda^L_i + \lambda^U_i) + \sum_{j\in J}\mu_j = 1$ và $(\lambda^L, \lambda^U) \neq (0, 0)$, ở đó $\lambda^L := (\lambda^L_1, \ldots, \lambda^L_m)$ và $\lambda^U := (\lambda^U_1, \ldots, \lambda^U_m)$.

Để nhận được các điều kiện tối ưu kiểu KKT cho các nghiệm hữu hiệu của bài toán (FIMP), chúng ta cần điều kiện chuẩn hóa ràng buộc quen thuộc sau.

Định nghĩa 3.3. Cho $\bar{x} \in \Omega$. Ta nói rằng $\bar{x}$ thỏa mãn *điều kiện chuẩn hóa ràng buộc* (CQ) nếu không tồn tại $\mu_j \geq 0$, $j \in J(\bar{x})$ không đồng thời bằng không sao cho

$$0 \in \sum_{j \in J(\bar{x})} \mu_j \partial h_j(\bar{x}) + N(\bar{x}; S), \tag{CQ}$$

ở đó $J(\bar{x}) := \{j \in J \ : \ g_j(\bar{x}) = 0\}$.

Chú ý rằng điều kiện chuẩn hóa ràng buộc (CQ) ở trên kéo theo điều kiện chuẩn hóa ràng buộc Mangasarian–Fromovitz cổ điển khi các hàm $h_1, \ldots, h_p$ là khả vi chặt tại $\bar{x}$ và $S = \mathbb{R}^n$; xem, chẳng hạn, B.S. Mordukhovich, Variational Analysis and Generalized Differentiation, Vol.2: Applications, Springer, Berlin, 2006; T.D. Chuong, N.Q. Huy, J.-C. Yao, SIAM J. Optim. 20 (2009), 1462–1477.

Định lí 3.2. *Nếu* $\bar{x} \in \mathcal{S}_2^w$(FIMP) *và điều kiện chuẩn hóa ràng buộc* (CQ) *thoả mãn tại* $\bar{x}$*, thì* $\bar{x}$ *thoả mãn điều kiện tối ưu KKT.*

Ta có thể chỉ ra rằng kết luận của Định lý 3.2 có thể không còn đúng nữa nếu điều kiện chuẩn hóa ràng buộc (CQ) không thoả mãn.

3.2.2 Điều kiện đủ

Trong phần này, ta trình bày các điều kiện đủ cho các nghiệm hữu hiệu của (FIMP). Để nhận được các điều kiện đủ này, chúng ta cần giới thiệu các khái niệm về tính lồi suy rộng (chặt) tại một điểm cho trước đối với một họ các hàm Lipschitz địa phương. Định nghĩa sau được lấy ý tưởng từ bài báo của T.D. Chuong, D.S. Kim, Positivity 20 (2016), 187–207.

Định nghĩa 3.4. (i) Ta nói rằng (F, h) là *lồi suy rộng trên* S tại $\bar{x} \in S$ nếu với bất kỳ $x \in S$, $x_i^{*L} \in \partial f_i^L(\bar{x})$, $x_i^{*U} \in \partial f_i^U(\bar{x})$, $y_i^{*L} \in \partial^+ g_i^L(\bar{x})$, $y_i^{*U} \in \partial^+ g_i^U(\bar{x})$, $i \in I$, và $z_j^* \in \partial h_j(\bar{x})$, $j \in J$, tồn tại $\nu \in [N(\bar{x}; S)]^\circ$ thoả mãn

$$\begin{aligned}
f_i^L(x) - f_i^L(\bar{x}) &\geq \langle x_i^{*L}, \nu \rangle, \quad \forall i \in I,\\
f_i^U(x) - f_i^U(\bar{x}) &\geq \langle x_i^{*U}, \nu \rangle, \quad \forall i \in I,\\
g_i^L(x) - g_i^L(\bar{x}) &\leq \langle y_i^{*L}, \nu \rangle, \quad \forall i \in I,\\
g_i^U(x) - g_i^U(\bar{x}) &\leq \langle y_i^{*U}, \nu \rangle, \quad \forall i \in I,\\
h_j(x) - h_j(\bar{x}) &\geq \langle z_j^*, \nu \rangle, \quad \forall j \in J.
\end{aligned}$$

(ii) Ta nói rằng (F, h) là *lồi suy rộng chặt trên* S tại $\bar{x} \in S$ nếu với bất kỳ $x \in S \setminus \{\bar{x}\}$, $x_i^{*L} \in \partial f_i^L(\bar{x})$, $x_i^{*U} \in \partial f_i^U(\bar{x})$, $y_i^{*L} \in \partial^+ g_i^L(\bar{x})$, $y_i^{*U} \in \partial^+ g_i^U(\bar{x})$, $i \in I$, và $z_j^* \in \partial h_j(\bar{x})$, $j \in J$, tồn tại $\nu \in [N(\bar{x}; S)]^\circ$ thoả mãn

$$\begin{aligned}
&f_i^L(x) - f_i^L(\bar{x}) > \langle x_i^{*L}, \nu\rangle, \quad \forall i \in I,\\
&f_i^U(x) - f_i^U(\bar{x}) > \langle x_i^{*U}, \nu\rangle, \quad \forall i \in I,\\
&g_i^L(x) - g_i^L(\bar{x}) \le \langle y_i^{*L}, \nu\rangle, \quad \forall i \in I,\\
&g_i^U(x) - g_i^U(\bar{x}) \le \langle y_i^{*U}, \nu\rangle, \quad \forall i \in I,\\
&h_j(x) - h_j(\bar{x}) \ge \langle z_j^{*}, \nu\rangle, \quad \forall j \in J.
\end{aligned}$$

Nhận xét 3.1. Ta thấy rằng nếu S là lồi và f_i^L, f_i^U, $-g_i^L$, $-g_i^U$, $i \in I$, và h_j, $j \in J$, là các hàm lồi, thì (F, h) là lồi suy rộng trên S tại bất kỳ $\bar{x} \in S$ với $\nu = x - \bar{x}$. Hơn nữa, lớp các hàm lồi suy rộng là thực sự chứa lớp các hàm lồi; xem, chẳng hạn, T.D. Chuong, D.S. Kim, J. Optim. Theory Appl. 160 (2014), 748–762, Example 3.2 và T.D. Chuong, D.S. Kim, Positivity 20 (2016), 187–207, Example 3.12.

Định lí 3.3. *Cho $\bar{x} \in \Omega$ thoả mãn điều kiện tối ưu KKT .*

(i) *Nếu (F, h) là lồi suy rộng trên S tại $\bar{x}$ thì $\bar{x} \in \mathcal{S}_2^w$(FIMP).*

(ii) *Nếu (F, h) là lồi suy rộng chặt trên S tại $\bar{x}$ thì $\bar{x} \in \mathcal{S}_1$(FIMP) và do đó $\bar{x} \in \mathcal{S}_2$(FIMP) và $\bar{x} \in \mathcal{S}_1^w$(FIMP).*

Nhận xét 3.2. Điều kiện (3.1) không đủ đảm bảo cho một điểm chấp nhận được là nghiệm tối ưu hữu hiệu của (FIMP) nếu tính lồi suy rộng (chặt) của (F, h) tại điểm đang xét không được thỏa mãn.

3.3 Quan hệ đối ngẫu

Với $y \in \mathbb{R}^n$, $(\lambda^L, \lambda^U) \in (\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^m)_+ \setminus \{(0,0)\}$ và $\mu \in \mathbb{R}_+^p$, ta đặt

$$\mathcal{L}(y, \lambda^L, \lambda^U, \mu) := F(y) = (F_1(y), \ldots, F_m(y)),$$

ở đó

$$F_i(y) := \frac{f_i(y)}{g_i(y)} = \left[\frac{f_i^L(y)}{g_i^U(y)}, \frac{f_i^U(y)}{g_i^L(y)}\right], \quad i \in I.$$

Bài toán đối ngẫu sau theo nghĩa của Mond–Weir của bài toán (FIMP) có dạng sau:

$$LU-\max \quad \mathcal{L}(y, \lambda^L, \lambda^U, \mu) \qquad (\mathrm{FIMD}_{MW})$$
$$\text{với ràng buộc} \quad (y, \lambda^L, \lambda^U, \mu) \in \Omega_{MW},$$

ở đó tập chấp nhận được Ω_{MW} được xác định bởi

$$\Omega_{MW} := \Big\{(y, \lambda^L, \lambda^U, \mu) \in S \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^p \; :$$

$$
\begin{aligned}
0 \in \sum_{i\in I} \frac{\lambda_i^L}{g_i^U(y)} &\left[\partial f_i^L(y) - \frac{f_i^L(y)}{g_i^U(y)} \partial^+ g_i^U(y)\right] \\
&+ \sum_{i\in I} \frac{\lambda_i^U}{g_i^L(y)} \left[\partial f_i^U(y) - \frac{f_i^U(y)}{g_i^L(y)} \partial^+ g_i^L(y)\right] + \sum_{j\in J} \mu_j \partial h_j(y) + N(y; S), \\
&\sum_{j\in J} \mu_j h_j(y) \geq 0, \quad \sum_{i\in I} (\lambda_i^L + \lambda_i^U) + \sum_{j\in J} \mu_j = 1, (\lambda^L, \lambda^U) \neq (0,0) \Big\}.
\end{aligned}
$$

Định nghĩa 3.5. Cho $(\bar{y}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu}) \in \Omega_{MW}$. Ta nói rằng

(i) $(\bar{y}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu})$ là một *nghiệm hữu hiệu kiểu-1* của (FIMD_{MW}), ký hiệu bởi

$$(\bar{y}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu}) \in \mathcal{S}_1(\text{FIMD}_{MW}),$$

nếu $\nexists\ (y, \lambda^L, \lambda^U, \mu) \in \Omega_{MW}$ sao cho

$$\mathcal{L}(\bar{y}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu}) \preceq_{LU} \mathcal{L}(y, \lambda^L, \lambda^U, \mu).$$

(ii) $(\bar{y}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu})$ là một *nghiệm hữu hiệu yếu kiểu-2* của (FIMD_{MW}), ký hiệu bởi

$$(\bar{y}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu}) \in \mathcal{S}_2^w(\text{FIMD}_{MW}),$$

nếu $\nexists\ (y, \lambda^L, \lambda^U, \mu) \in \Omega_{MW}$ sao cho

$$\mathcal{L}(\bar{y}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu}) \preceq_{LU}^s \mathcal{L}(y, \lambda^L, \lambda^U, \mu).$$

3.3.1 Đối ngẫu yếu

Định lý sau mô tả các mối quan hệ đối ngẫu yếu giữa bài toán gốc (FIMP) và bài toán đối ngẫu (FIMD_{MW}).

Định lí 3.4 (Tính đối ngẫu yếu)**.** *Cho $x \in \Omega$ và $(y, \lambda^L, \lambda^U, \mu) \in \Omega_{MW}$.*

(i) *Nếu (F, h) là lồi suy rộng trên S tại y thì*

$$F(x) \not\prec_{LU}^s \mathcal{L}(y, \lambda^L, \lambda^U, \mu).$$

(ii) *Nếu (F, h) là lồi suy rộng chặt trên S tại y thì*

$$F(x) \npreceq_{LU} \mathcal{L}(y, \lambda^L, \lambda^U, \mu).$$

Lưu ý rằng, nếu tính lồi suy rộng của (F, h) trên S không được thỏa mãn thì kết luận của Định lý 3.4 có thể không đúng.

3.3.2 Đối ngẫu mạnh

Trong mục này, chúng ta trình bày một định lý mô tả quan hệ đối ngẫu mạnh giữa bài toán gốc (FIMP) và bài toán đối ngẫu (FIMD_{MW}).

Định lí 3.5 (Tính đối ngẫu mạnh)**.** *Giả sử rằng* $\bar{x} \in \mathcal{S}_2^w(\text{FIMP})$ *và điều kiện chuẩn hóa ràng buộc* (CQ) *được thoả mãn tại điểm này. Khi đó, tồn tại* $(\bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U) \in (\mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^m) \setminus \{(0,0)\}$*, và* $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_+^p$ *sao cho* $(\bar{x}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu}) \in \Omega_{MW}$ *và* $F(\bar{x}) = \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu})$*. Hơn nữa,*

(i) *Nếu* (F, h) *là lồi suy rộng trên* S *tại* $\bar{x}$ *thì* $(\bar{x}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu})$ *là nghiệm hữu hiệu yếu kiểu-2 của* (FIMD_{MW})*.*

(ii) *Nếu* (F, h) *là lồi suy rộng chặt trên* S *tại* $\bar{x}$ *thì* $(\bar{x}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu})$ *là một nghiệm hữu hiệu kiểu-1 của* (FIMD_{MW})*.*

Nhận xét 3.3. Điều kiện chuẩn hóa ràng buộc (CQ) đóng vai trò quan trọng trong thiết lập các kết quả đối ngẫu ở Định lý 3.5. Nếu điều kiện (CQ) không thoả mãn tại một nghiệm hữu hiệu yếu kiểu-2 của (FIMP), thì các quan hệ đối ngẫu mạnh trong Định lý 3.5 có thể không còn đúng nữa.

3.3.3 Đối ngẫu ngược

Trong mục cuối của chương này, chúng tôi sẽ thiết lập các quan hệ đối ngẫu ngược cho các nghiệm hữu hiệu của bài toán gốc (FIMP) và bài toán đối ngẫu (FIMD_{MW}).

Định lí 3.6 (Tính đối ngẫu ngược)**.** *Cho* $(\bar{x}, \bar{\lambda}^L, \bar{\lambda}^U, \bar{\mu}) \in \Omega_{MW}$*.*

(i) *Nếu* $\bar{x} \in \Omega$ *và* (F, h) *là lồi suy rộng trên* S *tại* $\bar{x}$*, thì* $\bar{x}$ *là một nghiệm hữu hiệu yếu kiểu-2 của* (FIMP)*.*

(ii) *Nếu* $\bar{x} \in \Omega$ *và* (F, h) *là lồi suy rộng chặt trên* S *tại* $\bar{x}$*, thì* $\bar{x}$ *là một nghiệm hữu hiệu kiểu-1 của* (FIMP)*.*

Chương 4

Tính ổn định vi phân của bài toán tối ưu đa mục tiêu lồi phụ thuộc tham số

Trong chương này, chúng tôi trình bày các kết quả về tính ổn định vi phân của bài toán tối ưu đa mục tiêu lồi phụ thuộc tham số trong các không gian hữu hạn chiều. Cụ thể, chúng ta nhận được công thức chính xác để tính toán dưới vi phân cơ bản của ánh xạ điểm hữu hiệu $\mathcal{F}$ của bài toán được xét mà chỉ đòi hỏi giả thiết về tính trội. Từ các kết quả đạt được, ta đưa ra một đặc trưng cho tính tựa K-Lipschitz của ánh xạ điểm hữu hiệu. Hơn nữa, chúng ta đạt được các công thức để ước lượng/tính toán đối đạo hàm cơ bản của $\mathcal{F}$ mà không cần đến các giả thiết liên quan đến ánh xạ S được định nghĩa trong (4.14). Phần cuối cùng đưa ra một số ứng dụng của các kết quả thu được cho các lớp bài toán tối ưu phụ thuộc tham số với ràng buộc toán tử và ràng buộc cân bằng.

Các kết quả của chương này được trình bày dựa trên bài báo [CT3].

4.1 Một số quy tắc tính toán đối đạo hàm của các ánh xạ đa trị lồi

Cho $H(x) := H_1(x) \times H_2(x)$, ở đó $H_1 : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m, H_2 : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^s$ là các ánh xạ đa trị. Ta có công thức tính cho đối đạo hàm của ánh xạ H.

Mệnh đề 4.1. *Cho $H_1 : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m, H_2 : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^s$ là các ánh xạ đa trị lồi chính thường và $H : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$ là một ánh xạ đa trị lồi được định nghĩa bởi $H(x) := H_1(x) \times H_2(x)$. Giả thiết rằng điều kiện chính quy sau thoả mãn*

$$\mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, H_1) \cap \mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}\, H_2) \neq \emptyset. \tag{4.1}$$

Khi đó, với bất kỳ $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}\, H$ và $v \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s$, ta có

$$D^*H(\bar{x}, \bar{y})(v) = D^*H_1(\bar{x}, \bar{y}_1)(v_1) + D^*H_2(\bar{x}, \bar{y}_2)(v_2), \tag{4.2}$$

ở đó $v = (v_1, v_2)$ và $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ với $\bar{y}_1 \in H_1(\bar{x}), \bar{y}_2 \in H_2(\bar{x})$.

Hệ quả 4.1. *Giả thiết rằng* $H_2 : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^s$ *là một ánh xạ đa trị lồi chính thường và* $H : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ *là một ánh xạ đa trị được định nghĩa bởi* $H(x) = \{x\} \times H_2(x)$*. Khi đó, với bất kỳ* $(\bar{x}, (\bar{x}, \bar{y}_2)) \in \operatorname{gph} H$ *và* $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ *ta có*

$$D^*H(\bar{x}, (\bar{x}, \bar{y}_2))(v_1, v_2) = v_1 + D^*H_2(\bar{x}, \bar{y}_2)(v_2). \tag{4.3}$$

Định nghĩa 4.1. Một ánh xạ đa trị $H\colon \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ được gọi là K*-lồi* nếu trên đồ thị của nó theo nón K là lồi, tức là, với mọi $x, u \in \mathbb{R}^n$ và $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda H(x) + (1 - \lambda)H(u) \subset H(\lambda x + (1 - \lambda)u) + K.$$

Rõ ràng, mỗi ánh xạ đa trị lồi cũng là K-lồi, nhưng điều ngược lại không đúng.

Trong phần còn lại của mục này, chúng tôi sẽ trình bày một kết quả về mối quan hệ giữa dưới vi phân cơ bản của một ánh xạ đơn trị K-lồi và dưới vi phân (theo nghĩa của Giải tích lồi) của ánh xạ vô hướng hoá tương ứng.

Mệnh đề 4.2. *Nếu* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *là một ánh xạ đơn trị* K*-lồi và* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *thì*

$$\partial h(\bar{x}, h(\bar{x}))(v) = \partial \langle v, h \rangle(\bar{x}), \ \forall v \in K^*.$$

Hơn nữa, nếu h *là khả vi Fréchet tại* $\bar{x}$ *thì* $\partial h(\bar{x}, h(\bar{x}))(v) = \nabla h(\bar{x})^*(v), \ \forall v \in K^*$*, ở đó* $\nabla h(\bar{x})^*$ *là toán tử liên hợp của* $\nabla h(\bar{x})$*.*

4.2 Dưới vi phân cơ bản của ánh xạ điểm hữu hiệu

Từ đây trở về sau, chúng ta giả thiết rằng K là một *nón lồi, đóng, nhọn và chính thường* trong $\mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là một *ánh xạ đơn trị* K*-lồi*, và $C : \mathbb{R}^s \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ là một *ánh xạ đa trị lồi.*

Xét *bài toán tối ưu đa mục tiêu lồi phụ thuộc tham số* sau

$$\mathrm{Min}_K\{f(p, x) : x \in C(p)\}, \tag{VP_p}$$

ở đó x là *biến quyết định*, p là *tham số nhiễu*, f là *hàm mục tiêu*, C là *ánh xạ ràng buộc*, và "Min" ở đây được hiểu theo nghĩa thông thường của tối ưu đa mục tiêu. Chính xác hơn, ta nói rằng $\bar{y} \in A$ là một *điểm hữu hiệu* của một tập $A \subset \mathbb{R}^m$ nếu $A \cap (\bar{y} - K) = \{\bar{y}\}$.

Cho $F : \mathbb{R}^s \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ đa trị định nghĩa bởi

$$F(p) := f(p, C(p)) = \{f(p, x) : x \in C(p)\}. \tag{4.4}$$

Khi đó, $\bar{y} \in F(p)$ được gọi là một *điểm hữu hiệu của* (VP_p) nếu $\bar{y} \in \mathrm{Min}_K F(p)$. Ánh xạ đa trị $\mathcal{F}$ được cho bởi

$$\mathcal{F}(p) := \mathrm{Min}_K F(p)$$

được gọi là *ánh xạ đa trị điểm hữu hiệu* của (VP_p).

Ánh xạ nghiệm $\mathcal{S}$ của (VP_p) được định nghĩa bởi

$$\mathcal{S}(p) := \{x \in \mathbb{R}^n : x \in C(p), f(p,x) \in \mathcal{F}(p)\}.$$

Theo T. Tanino, SIAM J. Control Optim. 26 (1988), 521–536, Proposition 2.1, F là ánh xạ đa trị K-lồi. Lưu ý rằng, ánh xạ đa trị điểm hữu hiệu $\mathcal{F}$ thường không lồi.

Tiếp theo, ta bắt đầu với các công thức để tính toán dưới vi phân của ánh xạ đa trị F được cho trong (4.4).

Định lí 4.1. *Cho* $(\bar{p},\bar{x}) \in \operatorname{gph}\mathcal{S}$ *and* $\bar{y} = f(\bar{p},\bar{x})$. *Khi đó, với bất kỳ* $v \in \mathbb{R}^m$*, ta có*

$$\partial F(\bar{p},\bar{y})(v) = \bigcup_{(p,u)\in\partial f((\bar{p},\bar{x}),\bar{y})(v)} \Big\{p + D^*C(\bar{p},\bar{x})(u)\Big\}. \tag{4.5}$$

Đặc biệt, nếu $v \in K^*$*, thì ta có*

$$\partial F(\bar{p},\bar{y})(v) = \bigcup_{(p,u)\in\partial\langle v,f\rangle(\bar{p},\bar{x})} \Big\{p + D^*C(\bar{p},\bar{x})(u)\Big\}. \tag{4.6}$$

Hơn nữa, nếu f *là khả vi Fréchet tại* $(\bar{p},\bar{x})$ *thì*

$$\partial F(\bar{p},\bar{y})(v) = \nabla_p f(\bar{p},\bar{x})^*(v) + D^*C(\bar{p},\bar{x})\big(\nabla_x f(\bar{p},\bar{x})^*(v)\big), \quad \forall v \in K^*.$$

Nhận xét 4.1. Trong một không gian Banach, các tác giả D.T.V. An, L.T. Tung, (2023). https://doi.org/10.48550/arXiv.2306.06947, Theorem 1], đã nhận được các công thức để tính toán đối đạo hàm của $F + K$, tức là, dưới vi phân Fréchet của F theo các kết quả gần đây trong bài báo của B.S. Mordukhovich, N.M. Nam, R.B. Rector, T. Tran, Set-Valued Var. Anal. 25 (2017), 731–755. Cụ thể, các tác giả đòi hỏi hai điều kiện chính quy để có (4.5). Ở đây, trong trường hợp không gian hữu hạn chiều, ta không cần bất kỳ điều kiện chính quy nào.

Sau đây, chúng tôi sẽ thiết lập công thức để tính dưới vi phân của $\mathcal{F}$. Để làm điều này, chúng ta cần tính trội của ánh xạ đa trị F.

Định nghĩa 4.2. Cho $\bar{p} \in \mathbb{R}^s$. Ta nói rằng ánh xạ đa trị F được định nghĩa trong (4.4) có *tính trội* quanh $\bar{p}$ nếu tồn tại một lân cận U của $\bar{p}$ sao cho

$$F(p) \subseteq \mathcal{F}(p) + K, \quad \forall p \in U.$$

Định lí 4.2. *Cho* $(\bar{p},\bar{x}) \in \operatorname{gph}\mathcal{S}$ *và* $\bar{y} = f(\bar{p},\bar{x})$. *Giả thiết rằng* F *có tính trội quanh* $\bar{p}$. *Khi đó, với bất kỳ* $v \in \mathbb{R}^m$ *ta có*

$$\partial \mathcal{F}(\bar{p},\bar{y})(v) = \bigcup_{(p,u)\in\partial f((\bar{p},\bar{x}),\bar{y})(v)} \Big\{p + D^*C(\bar{p},\bar{x})(u)\Big\}. \tag{4.7}$$

Đặc biệt, nếu $v \in K^*$ *thì ta có*

$$\partial \mathcal{F}(\bar{p},\bar{y})(v) = \bigcup_{(p,u)\in\partial\langle v,f\rangle(\bar{p},\bar{x})} \Big\{p + D^*C(\bar{p},\bar{x})(u)\Big\}. \tag{4.8}$$

Hơn nữa, nếu f là khả vi Fréchet tại $(\bar{p}, \bar{x})$ thì

$$\partial \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(v) = \nabla_p f(\bar{p}, \bar{x})^*(v) + D^*C(\bar{p}, \bar{x})\big(\nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})^*(v)\big), \ \forall v \in K^*. \tag{4.9}$$

Để kết thúc mục này, chúng tôi đưa ra một đặc trưng cho tính chất K-giả Lipschitz của ánh xạ điểm hữu hiệu.

Hệ quả 4.2. *Cho $(\bar{p}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} \mathcal{S}$ và $\bar{y} = f(\bar{p}, \bar{x})$. Giả thiết rằng F có tính chất trội quanh $\bar{p}$. Khi đó, ánh xạ điểm hữu hiệu $\mathcal{F}$ là K-giả Lipschitz quanh $(\bar{p}, \bar{y})$ khi và chỉ khi ánh xạ ràng buộc C là giả Lipschitz quanh $(\bar{p}, \bar{x})$.*

4.3 Đối đạo hàm của ánh xạ điểm hữu hiệu

Trong mục này, chúng tôi sẽ đưa ra công thức để tính toán đối đạo hàm Fréchet cũng như đối đạo hàm cơ bản của $\mathcal{F}$. Chú ý rằng $\mathcal{F}$ thường không lồi. Trước hết, chúng ta nhắc lại một số khái niệm và kết quả liên quan.

Định nghĩa 4.3. Cho $H\colon \mathbb{R}^s \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ đa trị và $(\bar{p}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} H$.

(i) Ánh xạ đa trị H được gọi là *nửa liên tục dưới thứ tự tại* $(\bar{p}, \bar{y})$ nếu với bất kỳ dãy $\{(p_i, y_i)\} \subset \operatorname{epi} H$ hội tụ tới $(\bar{p}, \bar{y})$, tồn tại một dãy $\{(p_i, y_i')\} \subset \operatorname{gph} H$ với $y_i - y_i' \in K$ sao cho dãy $\{y_i'\}$ có ít nhất một dãy con hội tụ tới $\bar{y}$.

(ii) H được gọi là *nửa liên tục dưới thứ tự quanh* $(\bar{p}, \bar{y})$ nếu tồn tại một lân cận U của điểm này sao cho H là nửa liên tục thứ tự tại mọi điểm $(p, y) \in U \cap \operatorname{gph} H$.

Mệnh đề 4.3. *Cho $H : \mathbb{R}^s \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ đa trị và $(\bar{p}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} H$. Khi đó, ta có các khẳng định sau:*

(i) *$\widehat{\partial} H(\bar{p}, \bar{y})(v) \subset \widehat{D}^* H(\bar{p}, \bar{y})(v)$ với mọi $v \in \mathbb{R}^m$. Bao hàm thức ngược lại đúng nếu $v \in K^*_+$ và H là nửa liên tục thứ tự tại $(\bar{p}, \bar{y})$.*

(ii) *Nếu H là nửa liên tục thứ tự tại $(\bar{p}, \bar{y})$ thì $\partial H(\bar{p}, \bar{y})(v) \subset D^* H(\bar{p}, \bar{y})(v) \ \ \forall v \in \mathbb{R}^m$, và bao hàm thức ngược lại đúng nếu $v \in K^*_+$ và H là nửa liên tục thứ tự quanh $(\bar{p}, \bar{y})$.*

Bây giờ, ta thiết lập các công thức để tính đối đạo hàm Fréchet, đối đạo hàm cơ bản của $\mathcal{F}$.

Định lí 4.3. *Cho $(\bar{p}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} \mathcal{S}$ và $\bar{y} = f(\bar{p}, \bar{x})$. Giả thiết rằng F có tính chất trội quanh $\bar{p}$. Khi đó, ta có các khẳng định sau*

(i) *Với bất kỳ $v \in \mathbb{R}^m$, ta có*

$$\widehat{D}^* \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(v) \supset \bigcup_{(p,u) \in \partial f((\bar{p}, \bar{x}), \bar{y})(v)} \Big\{ p + D^*C(\bar{p}, \bar{x})(u) \Big\}. \tag{4.10}$$

Hơn nữa, nếu $v \in K_+^*$ và $\mathcal{F}$ là nửa liên tục thứ tự tại $(\bar{p}, \bar{y})$ thì

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(v) = \bigcup_{(p,u)\in\partial\langle v,f\rangle(\bar{p},\bar{x})} \Big\{p + D^*C(\bar{p}, \bar{x})(u)\Big\}. \tag{4.11}$$

(ii) *Nếu $\mathcal{F}$ là nửa liên tục thứ tự tại $(\bar{p}, \bar{y})$ thì với bất kỳ $v \in \mathbb{R}^m$ ta có*

$$D^*\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(v) \supset \bigcup_{(p,u)\in\partial f((\bar{p},\bar{x}),\bar{y})(v)} \Big\{p + D^*C(\bar{p}, \bar{x})(u)\Big\}. \tag{4.12}$$

Hơn nữa, nếu $v \in K_+^*$ và $\mathcal{F}$ là nửa liên tục thứ tự quanh $(\bar{p}, \bar{y})$ thì ta có

$$D^*\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(v) = \bigcup_{(p,u)\in\partial\langle v,f\rangle(\bar{p},\bar{x})} \Big\{p + D^*C(\bar{p}, \bar{x})(u)\Big\}. \tag{4.13}$$

Nhận xét 4.2. Bằng cách sử dụng một số điều kiện, các tác giả trong bài báo của T.D. Chuong, Optim. Lett. 7 (2013), 1087–1117, Proposition 3.5, đã đưa ra các ước lượng trên/dưới cho dưới vi phân cơ bản của $\mathcal{F}$. Cụ thể hơn, các tác giả cần tính nửa liên tục thứ tự của F và hai tập điều kiện đặt lên ánh xạ đa trị S định nghĩa bởi

$$S(p, y) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x \in C(p), y = f(p, x)\} \tag{4.14}$$

4.4 Ứng dụng

4.4.1 Bài toán có ràng buộc toán tử

Trước hết, ta xét bài toán (VP_p) với ánh xạ ràng buộc $C\colon \mathbb{R}^s \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ được cho dưới dạng sau

$$C(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ H(p, x) \cap \Theta \neq \emptyset\}, \tag{4.15}$$

ở đó Θ là một tập con lồi, đóng và khác rỗng trong $\mathbb{R}^l$ và $H\colon \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^l$ là một ánh xạ đa trị lồi. *Ảnh ngược* của Θ dưới ánh xạ H được định nghĩa bởi

$$H^{-1}(\Theta) = \{(p, x) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \ : \ H(p, x) \cap \Theta \neq \emptyset\}.$$

Khi đó, dễ chứng minh rằng $\operatorname{gph} C = H^{-1}(\Theta)$ và ánh xạ đa trị C cho bởi (4.15) là lồi.

Mệnh đề 4.4. *Ánh xạ rằng buộc C đã cho trong* (4.15) *là lồi.*

Kết quả sau cho ta công thức để tính toán dưới vi phân của $\mathcal{F}$.

Định lí 4.4. *Cho $(\bar{p}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} \mathcal{S}$ và $\bar{y} = f(\bar{p}, \bar{x})$. Giả sử rằng F có tính chất trội quanh $\bar{p}$ và điều kiện chính quy sau thoả mãn*

$$\operatorname{ri}(\operatorname{rge} H) \cap \operatorname{ri}(\Theta) \neq \emptyset. \tag{4.16}$$

Khi đó, với bất kỳ $v \in \mathbb{R}^m$, ta có

$$\partial\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(v) = \bigcup_{(p,u)\in\partial f((\bar{p},\bar{x}),\bar{y})(v)} \Big\{p + w \ : \ (w, -u) \in D^*H((\bar{p}, \bar{x}, \bar{w}))N(\bar{w}; \Theta)\Big\}, \tag{4.17}$$

với $\bar{w} := H(\bar{p}, \bar{x}) \cap \Theta$. *Hơn nữa, nếu* $v \in K^*$, *thì ta có*

$$\partial \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(v) = \bigcup_{(p,u) \in \partial \langle v, f \rangle (\bar{p}, \bar{x})} \Big\{ p + w \ : \ (w, -u) \in D^* H((\bar{p}, \bar{x}, \bar{w})) N(\bar{w}; \Theta) \Big\}.$$

Kết quả sau là một hệ quả trực tiếp của Định lý 4.4.

Hệ quả 4.3. *Cho* $(\bar{p}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} \mathcal{S}$ *và* $\bar{y} = f(\bar{p}, \bar{x})$. *Giả sử rằng* F *có tính chất trội quanh* $\bar{p}$ *và* h *là lõm tương ứng với* Θ^∞ *và khả vi chặt tại* $(\bar{p}, \bar{x})$. *Nếu điều kiện chính quy sau thoả mãn*

$$\operatorname{ri}(\operatorname{rge} h) \cap \operatorname{ri}(\Theta) \neq \emptyset, \tag{4.18}$$

thì với bất kỳ $v \in \mathbb{R}^m$, *ta có*

$$\partial \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(v) = \bigcup_{(p,u) \in \partial f((\bar{p}, \bar{x}), \bar{y})(v)} \Big\{ p + w \ : \ (w, -u) \in \nabla h(\bar{p}, \bar{x})^* N(\bar{w}; \Theta) \Big\},$$

ở đó $\bar{w} := h(\bar{p}, \bar{x})$. *Hơn nữa, nếu* $v \in K^*$ *thì ta có*

$$\partial \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(v) = \bigcup_{(p,u) \in \partial \langle v, f \rangle (\bar{p}, \bar{x})} \Big\{ p + w \ : \ (w, -u) \in \nabla h(\bar{p}, \bar{x})^* N(\bar{w}; \Theta) \Big\}.$$

4.4.2 Bài toán có ràng buộc cân bằng

Trong tiểu mục này, chúng ta xét bài toán (VP_p) với *ràng buộc cân bằng* có dạng

$$C(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ 0 \in g(p, x) + Q(p, x)\}, \tag{4.19}$$

ở đó $g \colon \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ là một ánh xạ đơn trị, trong khi đó $Q \colon \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^l$ là một ánh xạ đa trị. Như chúng ta đã biết, các hệ có dạng (4.19) đóng vai trò quan trọng và hiệu quả trong việc mô tả tập các nghiệm tối ưu của các bài toán biến phân phụ thuộc tham số và các vấn đề liên quan.

Bài toán (VP_p) với rằng buộc đã cho dạng (4.19) thường được gọi là các bài toán tối ưu đa mục tiêu với ràng buộc cân bằng, (xem, chẳng hạn, B.S. Mordukhovich, Variational Analysis and Applications, Springer, Switzerland, 2018). Ở đây, ta giả thiết rằng g và Q *là lồi.* Khi đó, bằng cách đặt $h(p, x) := (p, x, -g(p, x))$ and $\Theta := \operatorname{gph} Q$, ta nhận được $\operatorname{rge} h = \operatorname{gph}(-g)$ và $\operatorname{gph} C = \{(p, x) \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^n \ : \ h(p, x) \in \Theta\} = h^{-1}(\Theta)$. Khi đó, ánh xạ ràng buộc C là lồi do tính lồi của g và Q.

Kết quả cuối cùng dưới đây cho ta một công thức để tính dưới vi phân của ánh xạ điểm hữu hiệu của (VP_p) với ràng buộc dạng (4.19).

Định lí 4.5. *Cho* $(\bar{p}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} \mathcal{S}$ *và* $\bar{y} = f(\bar{p}, \bar{x})$. *Giả thiết rằng* F *có tính chất trội quanh* $\bar{p}$. *Nếu điều kiện chính quy sau thoả mãn*

$$\operatorname{ri}(\operatorname{gph}(-g)) \cap \operatorname{ri}(\operatorname{gph} Q) \neq \emptyset, \tag{4.20}$$

thì với bất kỳ $v \in \mathbb{R}^m$, *ta có*

$$\begin{aligned}\partial\mathcal{F}(\bar{p},\bar{y})(v)= \bigcup_{(p,u)\in\partial f((\bar{p},\bar{x}),\bar{y})(v)} \Big\{ & p+w\ :\ \exists z\in\mathbb{R}^l \quad \textit{với} \\ & (w,-u)\in D^*Q(\bar{p},\bar{x},-g(\bar{p},\bar{x}))(z)+D^*g(\bar{p},\bar{x})(z)\Big\}.\end{aligned} \tag{4.21}$$

Kết luận

Các kết quả chính của luận án bao gồm:

1. Các điều kiện cần và điều kiện đủ tối ưu kiểu KKT cho các nghiệm tựa hữu hiệu xấp xỉ của bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn giá trị khoảng với dữ liệu Lipschitz.

2. Các định lý đối ngẫu (đối ngẫu yếu, đối ngẫu mạnh, đối ngẫu ngược) kiểu Mond–Weir cho các nghiệm tựa hữu hiệu xấp xỉ của bài toán tối ưu đa mục tiêu nửa vô hạn giá trị khoảng.

3. Các điều kiện cần và điều kiện đủ tối ưu kiểu KKT cho các nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu phân thức giá trị khoảng với dữ liệu Lipschitz.

4. Các định lý đối ngẫu (đối ngẫu yếu, đối ngẫu mạnh, đối ngẫu ngược) kiểu Mond–Weir cho các nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu phân thức giá trị khoảng.

5. Các công thức tính toán dưới vi phân và đối đạo hàm của ánh xạ điểm hữu hiệu của các bài toán tối ưu đa mục tiêu lồi phụ thuộc tham số trong không gian hữu hạn chiều.

Một số vấn đề cần được tiếp tục nghiên cứu:

- Điều kiện tối ưu (bậc nhất và bậc cao) và quan hệ đối ngẫu cho các bài toán điều khiển tối ưu đa mục tiêu với dữ liệu khoảng;

- Điều kiện tối ưu (bậc nhất và bậc cao) và quan hệ đối ngẫu cho các bài toán tối ưu vững (robust optimization problems);

- Tính ổn định/ổn định vi phân theo hướng cho các bài toán tối ưu đa mục tiêu phụ thuộc tham số;

- Sự tồn tại nghiệm cho các bài toán tối ưu với dữ liệu không chắc chắn.

CÁC CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[CT1] N.H. Hung, H.N. Tuan, N.V. Tuyen, On approximate quasi Pareto solutions in nonsmooth semi-infinite interval-valued vector optimization problems, Appl. Anal. 102 (2023), 2432–2448. (SCIE - Q2)

[CT2] N.H. Hung, N.V. Tuyen, Optimality conditions and duality relations in nonsmooth fractional interval-valued multiobjective optimization, Appl. Set-Valued Anal. Optim. 5 (2023), No. 1, 31-47, 31-47. (SCOPUS - Q3)

[CT3] D.T.V. An, N.H. Hung, N.V. Tuyen, Subdifferentials and coderivatives of efficient point multifunctions in parametric convex vector optimization, J. Optim. Theory Appl. 202 (2024), 745-770 (SCI - Q1)

CÁC KẾT QUẢ CỦA LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO TẠI

- Xêmina của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường ĐHSP Hà Nội 2;
- Xêmina của Nhóm nghiên cứu về Giải tích biến phân và Lý thuyết tối ưu, Khoa Toán, Trường ĐHSP Hà Nội 2;
- 2022 International Online Workshop on Optimization Theory and Applications, January 19–21, 2022, KimLab for Applied Mathematics, Busan, Korea;
- Miniworkshop on Optimization and Control Theory, December 23–24, 2022, Phòng Tối ưu và Điều khiển, Viện Toán học (VAST).