BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

NGUYỄN XUÂN TÚ

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN VÀ BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN ĐỐI VỚI MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC SUY BIẾN MẠNH

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội, 2021

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

NGUYỄN XUÂN TÚ

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN VÀ BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN ĐỐI VỚI MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC SUY BIẾN MẠNH

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Toán giải tích**
Mã số: **9 46 01 02**

Người hướng dẫn khoa học 1 **Người hướng dẫn khoa học 2**

GS. TS Cung Thế Anh **TS Trần Văn Bằng**

Hà Nội, 2021

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của GS.TS Cung Thế Anh và TS Trần Văn Bằng. Các kết quả được viết trong luận án là hoàn toàn mới và chưa từng được công bố trong bất kì một công trình của ai khác.

Nghiên cứu sinh

Nguyễn Xuân Tú

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TS Cung Thế Anh và TS Trần Văn Bằng. Các thầy đã dẫn dắt tác giả làm quen với nghiên cứu khoa học từ khi tác giả còn là học viên cao học. Ngoài những chỉ dẫn về mặt khoa học, sự động viên và lòng tin tưởng của các thầy dành cho tác giả luôn là động lực lớn giúp tác giả tự tin và say mê trong nghiên cứu. Qua đây tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với các thầy.

Tác giả cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn đến các thầy cô và các thành viên của Seminar Giải tích, Khoa Toán, trường ĐHSP Hà Nội 2; Seminar Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, trường ĐHSP Hà Nội đã tạo một môi trường học tập và nghiên cứu thuận lợi giúp tác giả hoàn thành luận án này. Tại đây tác giả đã nhận được nhiều chỉ dẫn, góp ý cũng như một môi trường khoa học sôi nổi và thân thiện, điều không thể thiếu trong quá trình nghiên cứu, hoàn thành luận án của tác giả.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn đến Ban Giám hiệu trường Đại học Hùng Vương, các anh chị em đồng nghiệp công tác tại Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, trường Đại học Hùng Vương đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Lời cảm ơn sau cùng, tác giả xin dành cho gia đình, những người thân đã luôn ở bên, động viên, chia sẻ để tác giả hoàn thành luận án này.

Mục lục

MỘT SỐ KÍ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG LUẬN ÁN

$\mathbb{R}^N$	không gian vectơ thực N chiều;
$C_0^\infty(\Omega)$	không gian các hàm khả vi vô hạn có giá compact trong Ω;
$\|x\|$	chuẩn Euclide của x trong không gian $\mathbb{R}^N$;
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	tích đối ngẫu giữa H và H^*;
$(\cdot, \cdot)$	tích vô hướng trong không gian Hilbert H;
$\rightharpoonup$	hội tụ yếu;
$\rightharpoonup^*$	hội tụ *-yếu;
$\rightarrow$	hội tụ mạnh;
$\hookrightarrow$	phép nhúng liên tục;
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	phép nhúng compact;
h.k.n	hầu khắp nơi;
D^2	ma trận Hessian;
∇	vectơ gradient;
1_ω	hàm đặc trưng của miền ω;
Δ_λ	toán tử suy biến mạnh $\Delta_\lambda := \sum\limits_{i=1}^{N} \partial_{x_i}(\lambda_i^2 \partial_{x_i})$;
γ_1	giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta_\lambda$ với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất;
$D(\Delta_\lambda)$	miền xác định của toán tử $-\Delta_\lambda$ với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất;
$\mathring{W}_\lambda^{1,2}(\Omega)$	không gian Sobolev có trọng dùng để nghiên cứu bài toán trong Chương 2;
$\big(\mathring{W}_\lambda^{1,2}(\Omega)\big)^*$	không gian đối ngẫu của không gian $\mathring{W}_\lambda^{1,2}(\Omega)$;
$S^1(\mathbb{R}^N)$	không gian Sobolev có trọng dùng để nghiên cứu bài toán trong Chương 3;
$S^{-1}(\mathbb{R}^N)$	không gian đối ngẫu của không gian $S^1(\mathbb{R}^N)$;
$S_0^1(\Omega)$	không gian Sobolev có trọng dùng để nghiên cứu bài toán trong Chương 3, Chương 4.

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lí do chọn đề tài

Nhiều quá trình trong tự nhiên, khoa học, công nghệ và kĩ thuật dẫn đến việc nghiên cứu các lớp phương trình parabolic, như các quá trình truyền nhiệt, quá trình khuếch tán, các mô hình trong sinh thái học quần thể,... Vì vậy, việc nghiên cứu những lớp phương trình này có ý nghĩa quan trọng trong khoa học và công nghệ. Chính vì vậy nó đã và đang thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trên thế giới. Một trong những hướng tiếp cận đó là nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm khi thời gian ra vô cùng vì nó cho phép ta hiểu và dự đoán xu thế phát triển của hệ động lực trong tương lai, từ đó ta có thể có những điều chỉnh thích hợp để đạt được kết quả mong muốn. Bên cạnh đó việc nghiên cứu tính điều khiển được của các lớp phương trình parabolic cũng có ý nghĩa rất quan trọng vì dưới tác động các lớp hàm điều khiển chấp nhận được bài toán có thể điều khiển được về các vị trí mong muốn.

Trong những năm gần đây, sự tồn tại và các tính chất định tính của nghiệm, nói riêng là dáng điệu tiệm cận và tính điều khiển được đã được nghiên cứu cho nhiều lớp phương trình parabolic. Chẳng hạn, lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính trong trường hợp không suy biến hoặc suy biến yếu được nghiên cứu bởi nhiều tác giả trong cả miền bị chặn và không bị chặn (xem [18, 21, 22, 28, 55, 59, 60, 69]). Cho đến nay, các kết quả về lí thuyết tập hút, lí thuyết điều khiển đối với lớp phương trình parabolic không suy biến rất phong phú và khá hoàn thiện. Tuy nhiên, các kết quả tương ứng trong trường hợp phương trình parabolic suy biến mạnh chưa có nhiều. Khi xét trường hợp này do tính suy biến mạnh của hệ đã làm xuất hiện những khó khăn lớn về mặt toán học. Chẳng hạn, bài toán thiếu các định lí nhúng cần thiết, thiếu các kết quả cần thiết về tính chính quy nghiệm, thiếu các kết quả về nguyên lí cực trị, thiếu các ước lượng kiểu Carleman cần thiết,... Do đó bài toán đòi hỏi phải có những ý tưởng tiếp cận mới. Các phương trình parabolic suy biến mạnh xuất hiện một cách tự nhiên trong vật lí, hóa học, sinh học,... Hiện nay, việc nghiên cứu các lớp phương trình parabolic suy biến mạnh về dáng điệu tiệm cận nghiệm và bài toán điều khiển được đang là vấn đề mở, có nhiều ý nghĩa và thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới.

Sau đây, chúng tôi giới thiệu một số kết quả về lí thuyết tập hút đối với phương trình parabolic suy biến:

- *Phương trình parabolic suy biến chứa toán tử Grushin:* Đó là lớp phương trình parabolic suy biến chứa toán tử Grushin (xem [34]),

$$G_s u = \Delta_x u + |x|^{2s}\Delta_y u, \quad (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}, s \geq 0.$$

  Dựa trên các kết quả về phép nhúng kiểu Sobolev thiết lập trong [62], một số lớp phương trình parabolic chứa toán tử này đã được nghiên cứu về sự tồn tại và dáng điệu tiệm cận nghiệm. Năm 2008, các tác giả trong [3] đã chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục khi số hạng phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng và tiêu hao kiểu Sobolev

$$|f(u) - f(v)| \leq C\left(1 + |u|^\rho + |v|^\rho\right)|u - v|, \; 0 \leq \rho < \frac{4}{N(s) - 2},$$

  trong đó $N(s) = N_1 + (1+s)N_2$. Năm 2009, các tác C.T. Anh và T.D. Kế đã mở rộng kết quả trong [3] với lớp phi tuyến tốt hơn (xem [4]), đó là lớp phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng và tiêu hao kiểu đa thức

$$C_1|u|^p - C_0 \leq f(u)u \leq C_2|u|^p + C_0 \qquad \text{với } p \geq 2,$$
$$f'(u) \geq -\ell,$$

  trong đó C, C_0, C_1, C_2, ℓ là các hằng số dương.

- *Phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$:* Trong những năm qua đã có nhiều tác giả nghiên cứu về sự tồn tại và dáng điệu tiệm cận nghiệm của lớp phương trình parabolic chứa toán tử $P_{s,\gamma}$ (xem [62, 63]). Cho tới nay, với hai lớp số hạng phi tuyến là thỏa mãn điều kiện tăng trưởng và tiêu hao kiểu Sobolev hay tăng trưởng và tiêu hao kiểu đa thức, theo hướng tiếp cận được sử dụng trong [4], các tác giả trong công trình

[64] đã chứng minh sự tồn tại nghiệm và tập hút toàn cục trong miền bị chặn với điều kiện biên Dirichlet. Tính chính quy của tập hút toàn cục đã được nghiên cứu trong [61] và [64]. Kết quả trong [61, 64] sau đó đã được mở rộng đối với trường hợp miền không bị chặn (xem [1, 8]), trường hợp mà thiếu tính compact của các phép nhúng Sobolev. Ta có thể tham khảo thêm các kết quả liên quan từ [2, 3, 9, 31, 38, 39, 44, 50, 51, 66]. Trong các công trình này, có một số hạn chế về điều kiện tăng trưởng của số hạng phi tuyến được áp đặt và số hạng phi tuyến kiểu mũ, như $f(u) = e^u$, là không thỏa mãn. Vì vậy, việc nghiên cứu phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ với điều kiện số hạng phi tuyến như trên vẫn còn là vấn đề mở.

- *Phương trình parabolic chứa toán tử Δ_λ:* Trong thời gian qua, các kết quả về sự tồn tại nghiệm, dáng điệu tiệm cận nghiệm của bài toán chứa toán tử suy biến mạnh Δ_λ (lớp toán tử chứa hai lớp toán tử suy biến Grushin và suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$) cũng đã đạt được một số kết quả nhất định. Lớp toán tử này được giới thiệu bởi Franchi và Lanconelli trong [25]. Năm 2013, các tác giả A.E. Kogoj và S. Sonner trong [38] đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm, tồn tại tập hút toàn cục và đánh giá được số chiều fractal hữu hạn của tập hút. Năm 2016, các tác giả D. Li và C. Sun trong [44] đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm và tồn tại tập hút toàn cục trong trường hợp lớp phi tuyến là Lipschitz địa phương với số mũ tới hạn $\rho = \frac{4}{Q-2}$ dưới đây

$$|f(u) - f(v)| \le C\big(1 + |u|^{\frac{4}{Q-2}} + |v|^{\frac{4}{Q-2}}\big)|u - v|.$$

  Tuy nhiên, với các kết quả trên khi xét lớp phi tuyến mà không bị chặn trên bởi điều kiện tăng trưởng trong trường hợp miền bị chặn hoặc không bị chặn theo hiểu biết của chúng tôi là chưa có kết quả nào, ở đây do tính compact của các phép nhúng Sobolev là không đạt được.

Bên cạnh việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm, việc nghiên cứu tính điều khiển được cho hệ tuyến tính trong không gian vô hạn chiều (đặc biệt cho các hệ chứa phương trình đạo hàm riêng (PDEs)) là vấn đề mới được nghiên cứu mạnh trong khoảng hai thập niên gần đây. Trong khi tính điều khiển được cho các hệ tuyến tính trong không gian hữu hạn chiều (hệ phương trình vi phân thường (ODEs)) đã được nghiên cứu từ lâu và khá đầy đủ mà ở đó tiêu chuẩn chính là tiêu chuẩn về hạng đại số Kalman: "*Hệ tuyến tính hữu hạn chiều điều khiển được khi và chỉ khi điều kiện hạng đại số Kalman được thỏa mãn*". Theo đó thì khi hệ là điều khiển được tại một thời điểm nào đó thì sẽ điều khiển được tại mọi thời điểm. Tuy nhiên, nó sẽ không còn đúng cho hệ điều khiển xét trong không gian vô hạn chiều (hệ phương trình đạo hàm riêng). Có thể lấy ví dụ đơn giản là với bài toán điều khiển với phương trình truyền sóng, lan truyền với vận tốc hữu hạn, để có tính chất điều khiển được thì phải cần có sau thời gian đủ lớn thì mới điều khiển được tới trạng thái bất kì. Do đó, cần phải có cách tiếp cận tốt hơn để nghiên cứu tính điều khiển được cho các hệ tuyến tính trong không gian vô hạn chiều.

Năm 1977, Dolecki và Russell trong công trình [23] đã đặt vấn đề nghiên cứu tính điều khiển được cho hệ tuyến tính trong không gian vô hạn chiều sử dụng phương pháp đối ngẫu. Sau đó năm 1978, Russell trong [58] đề cập đến các vấn đề nghiên cứu tính điều khiển được cho các hệ chứa phương trình đạo hàm riêng. Các kết quả nghiên cứu tính điều khiển được cho phương trình đạo hàm riêng mới chỉ được nghiên cứu mạnh gần đây khi mà năm 1988, J.-L. Lions đưa ra phương pháp duy nhất Hilbert gọi tắt là HUM (xem [46]). Phương pháp này chỉ ra rằng hệ tuyến tính (trong không gian vô hạn chiều) điều khiển được khi và chỉ khi có tính quan sát được (bất đẳng thức quan sát được) của hệ liên hợp tương ứng.

Sau các công trình tiên phong [30, 43], chúng ta đã thấy sự phát triển quan trọng trong việc hiểu tính điều khiển được của các phương trình parabolic không suy biến với hệ số biến thiên. Những kết quả này đã được mở rộng đối với phương trình parabolic nửa tuyến tính [24, 26, 27, 29, 70] và phương trình parabolic trên miền không bị chặn [33, 53]. Lí thuyết điều khiển được đối với phương trình parabolic đều trong cả miền bị chặn và không bị chặn đã khá hoàn thiện. Trong thập kỉ gần đây, lí thuyết điều khiển được đối với phương trình parabolic suy biến đã được nghiên cứu nhiều bởi các nhà khoa học. Tuy nhiên, các kết quả chủ yếu trong một chiều (xem [17, 18, 20, 52, 65] và các tài liệu tham khảo trong đó). Theo hiểu biết của chúng tôi, có một vài kết quả đối với phương trình parabolic suy biến trong trường hợp nhiều chiều như chứa toán tử Grushin [5, 6, 7, 13, 14, 15, 41, 54, 68], phương trình dạng Kolmogorov [12, 11, 42], và phương trình parabolic suy biến [19, 67].

Với những phân tích trên, chúng ta thấy rằng đối với lớp phương trình parabolic suy biến mạnh, mặc dù đã có một số kết quả gần đây về lí thuyết tập hút và về tính điều khiển được, tuy nhiên, các kết quả thu được vẫn còn ít và còn nhiều vấn đề mở. Do đó, trong luận án này, chúng tôi quan tâm nghiên cứu những vấn đề mở sau:

- Sự tồn tại tập hút toàn cục đối với lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử Δ_λ trên miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ với lớp hàm phi tuyến kiểu mới không bị giới hạn bởi điều kiện tăng trưởng trên.

- Sự tồn tại tập hút toàn cục đối với lớp phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trên toàn không gian $\mathbb{R}^N$ trong trường hợp hàm phi tuyến kiểu mới không bị giới hạn bởi điều kiện tăng trưởng trên. Khó khăn cơ bản xuất hiện khi nghiên cứu vấn đề này là tính compact của các phép nhúng kiểu Sobolev không còn đúng nữa.

- Tính điểu khiển được đối với lớp phương trình parabolic suy biến chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trong trường hợp nhiều chiều. Khi nghiên cứu tính điều khiển được của phương trình parabolic tuyến tính thì tính điều khiển được chính xác thường không đạt được do hiệu ứng trơn của nghiệm so với dữ kiện ban đầu. Hơn nữa, tính điều khiển được về 0 kéo theo tính điều khiển được xấp xỉ của hệ. Do vậy, trong Luận án này, chúng tôi chỉ tập trung vào việc nghiên cứu tính điều khiển được về 0 của lớp phương trình trên.

Với những lí do trên, chúng tôi lựa chọn những vấn đề trên làm nội dung nghiên cứu của luận án với tên gọi là "**Dáng điệu tiệm cận và bài toán điều khiển đối với một số lớp phương trình parabolic suy biến mạnh**".

2. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, dáng điệu tiệm cận nghiệm và bài toán điều khiển cho một số lớp phương trình parabolic suy biến mạnh bằng các phương pháp của Giải tích hàm.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

• *Đối tượng nghiên cứu*: Sự tồn tại nghiệm, dáng điệu tiệm cận nghiệm và bài toán điều khiển cho một số lớp phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh.

• *Phạm vi nghiên cứu:*

Nội dung 1: Nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm và dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh trên miền bị chặn.

Nội dung 2: Nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm và dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh trên toàn không gian $\mathbb{R}^N$.

Nội dung 3: Nghiên cứu bài toán điều khiển được đối với phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh trong miền nhiều chiều.

4. Phương pháp nghiên cứu

Các phương pháp nghiên cứu được sử dụng trong luận án như sau:

• *Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm*: Sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin, phương pháp compact và phương pháp năng lượng [45].

• *Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm khi thời gian ra vô cùng:* Sử dụng các phương pháp của lí thuyết các hệ động lực tiêu hao vô hạn chiều [60].

• *Nghiên cứu bài toán điều khiển được:* Sử dụng phương pháp duy nhất

Hilbert (HUM) [46]: Tính điều khiển được của bài toán tuyến tính được đưa về tính quan sát được của bài toán liên hợp tương ứng. Vấn đề này được đưa về tính quan sát được đều theo tần số của hệ số Fourier, bằng cách sử dụng khai triển Fourier và đẳng thức Bessel-Parseval. Nhờ các bất đẳng thức Carleman mới tương ứng và các đánh giá phù hợp của tốc độ tán xạ, ta thiết lập được bất đẳng thức quan sát được đều.

5. Kết quả của luận án

Các kết quả chính đạt được trong luận án bao gồm:

• Chứng minh được sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu, sự tồn tại tập hút toàn cục đối với lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử Δ_λ trên miền bị chặn.

• Chứng minh được sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu, sự tồn tại tập hút toàn cục đối với lớp phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trên toàn không gian $\mathbb{R}^N$.

• Chứng minh được tính điều khiển được về 0 tại mọi thời điểm $T > 0$ khi $s + \gamma \in (0, 1/2)$ (suy biến yếu). Khi $s = \gamma = 1/2$ (suy biến mạnh) với thời gian điều khiển đủ lớn $T \geq T^*$, ta chứng minh được tính điều khiển được về 0. Khi $s+\gamma > 1$ (suy biến quá mạnh) ta chứng minh được tính không điều khiển được về 0 đối với bài toán điều khiển cho lớp phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trong trường hợp nhiều chiều.

Các kết quả chính đạt được đã được công bố trong 02 bài báo khoa học trên các tạp chí quốc tế có uy tín trong danh mục ESCIE/Scopus và 01 bản thảo hoàn thiện đang gửi đăng. Các kết quả của luận án cũng đã được báo cáo tại các Hội thảo khoa học và Seminar sau:

• Hội thảo khoa học "Toán học trong sự nghiệp đổi mới giáo dục", Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, 22/10/2017;

• Đại hội toán học Việt Nam lần thứ IX, 14 – 18/08/2018;

• Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2;

• Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;

• Seminar của Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hùng Vương.

6. Cấu trúc của luận án

Ngoài phần mở đầu, kết luận, kiến nghị, danh mục các công trình công bố và danh mục tài liệu tham khảo, luận án gồm 4 chương:

• *Chương 1. Kiến thức chuẩn bị.* Chương này trình bày các khái niệm và các kiến thức cơ sở cần thiết được sử dụng trong luận án.

• *Chương 2. Tập hút toàn cục của một lớp phương trình parabolic suy biến mạnh trên miền bị chặn.* Chương này chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu, sự tồn tại tập hút toàn cục đối với một lớp phương trình parabolic suy biến mạnh.

• *Chương 3. Tập hút toàn cục của một lớp phương trình parabolic suy biến mạnh trên toàn không gian.* Chương này trình bày các kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu, sự tồn tại tập hút toàn cục đối với một lớp phương trình parabolic suy biến mạnh.

• *Chương 4. Tính điều khiển được của lớp phương trình parabolic suy biến mạnh.* Chương này trình bày các kết quả tính điều khiển được về 0 của phương trình parabolic suy biến mạnh trong trường hợp nhiều chiều.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị gồm: Các lớp toán tử, các không gian hàm, lí thuyết tập hút toàn cục, lí thuyết điều khiển đối với phương trình parabolic, một số kết quả bổ trợ (Một số bất đẳng thức thường dùng, các bổ đề compact, các định lí hội tụ bị chặn) được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính của luận án ở các chương sau.

1.1. Các lớp toán tử

Sau đây, chúng tôi giới thiệu hai lớp toán tử suy biến mạnh được nghiên cứu trong các bài toán của luận án.

1.1.1. Toán tử Δ_λ-Laplace

Lớp toán tử Δ_λ-Laplace có dạng

$$\Delta_\lambda := \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i}(\lambda_i^2 \partial_{x_i}),$$

với $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \ldots, N$ được giới thiệu bởi Franchi và Lanconelli trong [25] và gần đây được xem xét trong [37] với giả thiết rằng nó là thuần nhất bậc hai tương ứng với nhóm dãn nở trong $\mathbb{R}^N$. Trong đó, $\lambda_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ là các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^N$, dương ngặt và $\lambda_i \in C^1, i = 1, \ldots, N$ bên ngoài các siêu phẳng tọa độ, nghĩa là, $\lambda_i > 0$ trong $\mathbb{R}^N \setminus \Pi$, ở đó

$$\Pi = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : \prod_{i=1}^{N} x_i = 0\}.$$

Như trong [37], các hàm λ_i thỏa mãn các tính chất sau:

1) $\lambda_1(x) \equiv 1,\ \lambda_i(x) = \lambda_i(x_1, \ldots, x_{i-1}), i = 2, \ldots, N;$

2) Tồn tại hằng số $\rho \geq 0$ sao cho

$$0 \leq x_k \partial_{x_k} \lambda_i(x) \leq \rho \lambda_i(x) \quad \forall k \in \{1, \ldots, i-1\}, i = 2, \ldots, N,$$

và với mỗi $x \in \mathbb{R}^N_+ := \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_i \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, N\}$;

3) Với mỗi $x \in \mathbb{R}^N$, $\lambda_i(x) = \lambda_i(x^*), i = 1, \ldots, N$, với $x^* = (|x_1|, \ldots, |x_N|)$ nếu $x = (x_1, \ldots, x_N)$;

4) Tồn tại nhóm co dãn $\{\delta_t\}_{t>0}$

$$\delta_t : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \delta_t(x) = \delta_t(x_1, \ldots, x_N) = (t^{\epsilon_1} x_1, \ldots, t^{\epsilon_N} x_N),$$

với $1 \leq \epsilon_1 \leq \cdots \leq \epsilon_N$, sao cho λ_i là δ_t-thuần nhất bậc $\epsilon_i - 1$, nghĩa là,

$$\lambda_i(\delta_t(x)) = t^{\epsilon_i - 1} \lambda_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, t > 0, i = 1, \ldots, N.$$

Do đó, ta có toán tử Δ_λ là δ_t-thuần nhất bậc 2, tức là,

$$\Delta_\lambda(u(\delta_t(x))) = t^2 (\Delta_\lambda u)(\delta_t(x)), \quad \forall u \in C^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Kí hiệu $Q := \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_N$ là số chiều thuần nhất của không gian $\mathbb{R}^N$ đối với nhóm $\{\delta_t\}_{t>0}$. Số chiều thuần nhất này đóng vai trò rất quan trọng cả trong cấu trúc hình học và phiếm hàm liên kết với toán tử Δ_λ.

Chú ý 1.1. Như đã chỉ ra trong [37], nếu các hàm λ_i là trơn thì bằng cách sử dụng tiêu chuẩn của Hörmander trong [36], ta có thể chứng minh được rằng toán tử Δ_λ là hypoelliptic (nhưng không là elliptic theo nghĩa thông thường, trừ trường hợp tất cả các λ_i đều là hằng số).

1.1.2. Toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$

Cho $s, \gamma \geq 0$ là các số thực. Xét toán tử

$$P_{s,\gamma} = \Delta_x + \Delta_y + |x|^{2s} |y|^{2\gamma} \Delta_z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3},$$

với $N_i \in \mathbb{N}^*, i = 1, 2, 3$, và $\lambda = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(3)})$ xác định bởi

$$\lambda_j^{(1)}(x, y, z) \equiv 1, \quad j = 1, \ldots, N_1,$$

$$\lambda_k^{(2)}(x,y,z) \equiv 1, \quad k = 1,\dots,N_2,$$
$$\lambda_l^{(3)}(x,y,z) = |x|^s|y|^\gamma, \quad l = 1,\dots,N_3.$$

Nhóm co dãn $\{\delta_t\}_{t>0}$ tương ứng là $\delta_t(x,y,z) = (tx, ty, t^{1+s+\gamma}z)$, và số chiều thuần nhất là $Q = N_1 + N_2 + (1+s+\gamma)N_3$.

Toán tử $P_{s,\gamma}$ là mở rộng của toán tử Grushin (xem [34]). Toán tử này suy biến tại những điểm của miền Ω có giao khác rỗng với các siêu phẳng $x = 0$ hoặc $y = 0$, và được giới thiệu trong [62] (xem thêm [63]).

1.2. Các không gian hàm

Trong luận án này chúng tôi sử dụng các không gian hàm sau.

Một số không gian hàm Lebesgue

Cho tập mở $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ với biên $\partial\Omega$. Ta xét các không gian sau:

- $L^p(\Omega), 1 \le p < +\infty$, là không gian Banach bao gồm tất cả các hàm khả tích Lebesgue bậc p trên Ω với chuẩn

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p}.$$

  $L^p(\Omega)$ là không gian Banach phản xạ khi $1 < p < +\infty$ và đối ngẫu của không gian $L^p(\Omega)$ là không gian $L^q(\Omega)$ với $1/p + 1/q = 1$;

- $L^\infty(\Omega)$ là không gian Banach bao gồm tất cả các hàm đo được và bị chặn hầu khắp trên Ω với chuẩn

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |u(x)|;$$

- $L^2(\Omega)$ là không gian Hilbert với tích vô hướng

$$(u,v) = \int_\Omega u \cdot v dx, \quad \text{và} \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = (u,u)^{1/2}.$$

Không gian hàm phụ thuộc thời gian

Với X là không gian Banach phản xạ với chuẩn $\|\cdot\|_X$ và $T > 0$, chúng tôi nhắc lại một số không gian hàm phụ thuộc thời gian sau:

- $C([0,T];X)$ là không gian Banach gồm tất cả các hàm liên tục $u : [0,T] \to X$ với chuẩn
$$\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_X;$$
- $L^p(0,T;X), 1 \le p \le +\infty$ gồm tất cả các hàm đo được $u : (0,T) \to X$ với chuẩn

  i) $\|u\|_{L^p(0,T;X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{1/p} < +\infty$ với $1 \le p < +\infty$,

  ii) $\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} := \operatorname*{esssup}_{0\le t\le T} \|u(t)\|_X < +\infty$.

  Khi đó $L^p(0,T;X)$ là không gian Banach, và nó là phản xạ nếu $1 < p < +\infty$. Không gian đối ngẫu của $L^p(0,T;X)$ là $L^q(0,T;X')$ với $1/p+1/q = 1$ và X' là không gian đối ngẫu của X.

Không gian Sobolev có trọng và phép nhúng

Sau đây, chúng tôi trình bày một số không gian Sobolev có trọng được sử dụng trong luận án.

- **Không gian $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$.**

  Không gian Sobolev có trọng $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$ được định nghĩa là bao đóng của $C_0^1(\Omega)$ với chuẩn
$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\nabla_\lambda u|^2 dx\right)^{1/2} = \|\nabla_\lambda u\|_{L^2(\Omega)},$$
  trong đó $\nabla_\lambda u = (\lambda_1 \partial_{x_1} u, \ldots, \lambda_N \partial_{x_N} u)$. Khi đó, $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng
$$((u,v))_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} = \int_\Omega \nabla_\lambda u \cdot \nabla_\lambda v\, dx = (-\Delta_\lambda u, v), \quad \forall\, u,v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega).$$

- **Không gian $D(\Delta_\lambda)$.**

  Không gian $D(\Delta_\lambda)$ được định nghĩa là miền xác định của toán tử $-\Delta_\lambda$ với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất

$$D(\Delta_\lambda) = \{u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega) : \Delta_\lambda u \in L^2(\Omega)\},$$

  với chuẩn xác định

$$\|u\|_{D(\Delta_\lambda)} := \left(\int_\Omega |\Delta_\lambda u|^2 dx \right)^{1/2} = \|\Delta_\lambda u\|_{L^2(\Omega)}.$$

  Nhờ kết quả trong [37], phép nhúng $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ là compact. Sử dụng phép nhúng này và định nghĩa của $D(\Delta_\lambda)$, chúng ta chứng minh phép nhúng $D(\Delta_\lambda) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$ là compact trong Bổ đề 2.4 của Chương 2. Các phép nhúng compact này được sử dụng để chứng minh các kết quả chính của Chương 2.

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu hai không gian Sobolev có trọng được sử dụng ở Chương 3.

- **Không gian $S^1(\mathbb{R}^N)$.**

  Không gian Sobolev $S^1(\mathbb{R}^N)$ được định nghĩa là bao đóng của $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ với chuẩn

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{S^1(\mathbb{R}^N)} &:= \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^2 + |\nabla_x u|^2 + |\nabla_y u|^2 + |x|^{2s}|y|^{2\gamma}|\nabla_z u|^2) dX \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^2 + |\nabla_{s,\gamma} u|^2) dX,\end{aligned}$$

  trong đó $\nabla_{s,\gamma} u := (\nabla_x u, \nabla_y u, |x|^s |y|^\gamma \nabla_z u)$. Không gian $S^1(\mathbb{R}^N)$ là một không gian Hilbert với tích vô hướng sau

$$((u,v))_{S^1(\mathbb{R}^N)} := \int_{\mathbb{R}^N} (uv + \nabla_x u \cdot \nabla_x v + \nabla_y u \cdot \nabla_y v + |x|^{2s}|y|^{2\gamma} \nabla_z u \cdot \nabla_z v) dX.$$

- **Không gian $S^2(\mathbb{R}^N)$.**

  Không gian $S^2(\mathbb{R}^N)$ được định nghĩa là bao đóng của $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ với chuẩn

$$\|u\|^2_{S^2(\mathbb{R}^N)} := \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^2 + |P_{s,\gamma} u|^2) dX.$$

Một cách tương tự, chúng tôi cũng định nghĩa các không gian $S_0^1(\Omega)$ và $S^2(\Omega)$ với $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Nhờ kết quả trong [63], ta có phép nhúng $S^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ là compact. Ngoài ra, ta cũng có phép nhúng $S^2(\Omega) \hookrightarrow S^1(\Omega)$ là compact (xem [8]).

1.3. Lí thuyết tập hút toàn cục

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu một số định nghĩa, định lí về tập hút toàn cục dựa trên các tài liệu [57, 60].

Giả sử X là một không gian Banach với chuẩn tương ứng là $\|\cdot\|$ và $\operatorname{dist}_X(\cdot,\cdot)$ là nửa khoảng cách Hausdorff giữa hai tập con A, B của X được xác định:

$$\operatorname{dist}_X(A,B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|, \quad \text{với } A, B \subset X.$$

Sau đây, chúng tôi giới thiệu một số khái niệm liên quan tập hút toàn cục.

Định nghĩa 1.1. *Hệ động lực* là một cặp $(X, S(t))$ gồm một không gian Banach X và một họ các ánh xạ $S(t): X \to X$, $t \geq 0$, thỏa mãn:

1) $S(0) = I$;

2) $S(t+s) = S(t)S(s)$ với mọi $t, s \geq 0$;

3) với mọi $t \geq 0, S(t) \in C^0(X,X)$;

4) với mọi $u \in X$, ánh xạ $t \to S(t)u \in C^0\big((0,+\infty), X\big)$.

Họ các ánh xạ $S(t): X \to X$, $t \geq 0$, thỏa mãn bốn điều kiện trên gọi là một *nửa nhóm liên tục* trên X. Khi đó, X gọi là *không gian pha* (hay không gian trạng thái).

Tập hút toàn cục là đối tượng trung tâm của lí thuyết các hệ động lực tiêu hao vô hạn chiều.

Định nghĩa 1.2. Một tập con khác rỗng $\mathscr{A}$ của X gọi là một *tập hút toàn cục* đối với hệ động lực $(X, S(t))$ nếu:

1) $\mathscr{A}$ là một tập con đóng và bị chặn;

2) $\mathscr{A}$ là bất biến, tức là $S(t)\mathscr{A} = \mathscr{A}$ với mọi $t \geq 0$;

3) $\mathscr{A}$ hút mọi tập con bị chặn B của X, tức là

$$\lim_{t \to +\infty} \operatorname{dist}(S(t)B, \mathscr{A}) = 0.$$

Định nghĩa 1.3. Giả sử $A \subset X$. Tập ω-giới hạn của A được định nghĩa bởi

$$\omega(A) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)A}^{X},$$

trong đó $S(t)A = \{v = S(t)u : u \in A\}$.

Ta giới thiệu khái niệm về tính tiêu hao của nửa nhóm.

Định nghĩa 1.4. Nếu hệ động lực $(X, S(t))$ gọi là tiêu hao điểm (hay tiêu hao bị chặn) nếu tồn tại một tập $B_0 \subset X$ sao cho với mọi tập bị chặn $B \subset X$, tồn tại $T = T(B) \geq 0$ sao cho $S(t)B \subset B_0$, với mọi $t \geq T$. Tập B_0 như vậy gọi là một *tập hấp thụ* đối với hệ động lực $(X, S(t))$.

Bây giờ ta định nghĩa tính compact tiệm cận.

Định nghĩa 1.5. Giả sử X là không gian Banach. Hệ động lực $(X, S(t))$ gọi là *compact tiệm cận* nếu với mọi $t > 0, S(t)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$S(t) = S^{(1)}(t) + S^{(2)}(t), \tag{1.1}$$

trong đó $S^{(1)}(t)$ và $S^{(2)}(t)$ thỏa mãn các tính chất sau:

1) với bất kì tập bị chặn $B \subset X$,

$$r_B(t) = \sup_{y \in B} \|S^{(1)}(t)y\|_X \to 0 \text{ khi } t \to +\infty;$$

2) với bất kì tập bị chặn B trong X, tồn tại t_0 sao cho tập hợp

$$\left[\gamma^{(2)}(t_0)B\right] = \left[\bigcup_{t \geq t_0} S^{(2)}(t)B\right] \tag{1.2}$$

là compact trong X, ở đây $[\gamma]$ là bao đóng của tập γ.

Một hệ động lực gọi là compact nếu nó là compact tiệm cận và ta có thể lấy $S^{(1)}(t) \equiv 0$ trong biểu thức (1.1). Rõ ràng rằng bất kì hệ động lực tiêu hao hữu hạn chiều nào cũng là compact.

Dễ dàng thấy rằng điều kiện (1.2) được thỏa mãn nếu tồn tại một tập compact K trong X sao cho với bất kì tập bị chặn $B \subset X$, tồn tại $t_0(B)$ sao cho $S^{(2)}(t)B \subset K, \forall t \geq t_0(B)$. Nói riêng, một hệ tiêu hao là compact nếu nó có một tập hấp thụ compact.

Kết quả sau đây là định lí cơ bản về sự tồn tại tập hút toàn cục.

Định lí 1.1. *Giả sử hệ động lực $(X, S(t))$ là tiêu hao và compact tiệm cận. Nếu B là một tập hấp thụ bị chặn của hệ động lực $(X, S(t))$ thì $\mathscr{A} = \omega(B)$ là một tập compact khác rỗng và là tập hút toàn cục đối với hệ động lực $(X, S(t))$. Hơn nữa, tập hút toàn cục $\mathscr{A}$ là liên thông trong X.*

1.4. Lí thuyết điều khiển được của hệ parabolic tuyến tính

Trong mục này, chúng tôi dựa vào một số cuốn sách chuyên khảo (xem [16, 35]) để trình bày một số kết quả của lí thuyết điều khiển được của hệ parabolic tuyến tính trong không gian vô hạn chiều:

$$\begin{cases} \partial_t u = Au + Bv, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

trong đó, $u_0 \in X$ cho trước (X là không gian Banach nào đó), v là điều khiển; $A : D(A) \subset X \to X$ là toán tử tuyến tính không bị chặn sinh ra nửa nhóm $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ và B là toán tử xác định từ không gian Banach $\mathscr{U}$ vào không gian Banach $\mathscr{V}$ sao cho hệ (1.3) đặt đúng.

1.4.1. Một số định nghĩa

Ta quan tâm đến tính điều khiển được của hệ (1.3) với các định nghĩa sau.

Định nghĩa 1.6. Ta nói rằng hệ (1.3) là *điều khiển được chính xác tại thời điểm* $T > 0$ nếu và chỉ nếu với mọi $u_0, u_1 \in X$, tồn tại hàm điều khiển $v \in L^2(0, T; \mathscr{U})$ sao cho hệ (1.3) có nghiệm u thỏa mãn:

$$u(T) = u_1.$$

Định nghĩa 1.7. Ta nói rằng hệ (1.3) là *điều khiển được chính xác đến quỹ đạo* tại thời điểm $T > 0$ nếu và chỉ nếu với mọi quỹ đạo $\overline{u}$ (nghiệm của (1.3) ứng với $\overline{v}$ và điều kiện ban đầu $\overline{u}(0) = \overline{u}_0$ nào đó), mọi $u_0 \in X$, tồn tại hàm điều khiển $v \in L^2(0, T; \mathscr{U})$ sao cho hệ (1.3) có nghiệm u thỏa mãn:

$$u(T) = \overline{u}(T).$$

Định nghĩa 1.8. Ta nói rằng hệ (1.3) là *điều khiển được về* 0 tại thời điểm $T > 0$ nếu và chỉ nếu với mọi $u_0 \in X$, tồn tại hàm điều khiển $v \in L^2(0, T; \mathscr{U})$ sao cho hệ (1.3) có nghiệm u thỏa mãn:

$$u(T) = 0.$$

Định nghĩa 1.9. Ta nói rằng hệ (1.3) là *điều khiển được xấp xỉ* tại thời điểm $T > 0$ nếu và chỉ nếu với mọi $u_0, u_1 \in X$ và mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại hàm điều khiển $v \in L^2(0, T; \mathscr{U})$ sao cho hệ (1.3) có nghiệm u thỏa mãn:

$$\|u(T) - u_1\|_X < \varepsilon.$$

Chú ý 1.2. Từ các định nghĩa trên ta có

- Hệ (1.3) điều khiển được chính xác thì sẽ điều khiển được chính xác đến quỹ đạo, điều khiển được về 0 và điều khiển được xấp xỉ.
- Hệ (1.3) điều khiển được chính xác tới quỹ đạo thì điều khiển được về 0.

Chú ý 1.3. Nếu (1.3) là parabolic đều thì

- Tính điều khiển được chính xác của hệ (1.3) không đạt được vì hiệu ứng trơn của nghiệm (nghiệm trơn hơn điều kiện ban đầu).

- Tính điều khiển được chính xác đến quỹ đạo của (1.3) tương đương với tính điều khiển được về 0 của hệ (1.3).

- Tính điều khiển được về 0 của hệ (1.3) suy ra tính điều khiển được xấp xỉ của (1.3).

Do đó, trong lí thuyết điều khiển được đối với các phương trình parabolic tuyến tính, người ta đặc biệt quan tâm đến tính điều khiển được về 0.

1.4.2. Phương pháp duy nhất Hilbert (HUM)

Ta xét hệ điều khiển (1.3). Để đơn giản ta xét $X = L^2(\Omega)$, $\mathscr{U} = L^2(\omega)$, $\mathscr{V} = L^2(\Omega)$, với ω là miền con mở khác rỗng của miền không gian Ω tương ứng.

Để nghiên cứu tính điều khiển được của hệ (1.3), ta sử dụng phương pháp duy nhất Hilbert (HUM) do J.-L. Lions sử dụng đầu tiên vào năm 1988 (xem [46, 47, 48]).

Ta xét hệ liên hợp của (1.3):

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - A^* \varphi = 0, \\ \varphi(T) = \varphi_T, \end{cases} \tag{1.4}$$

ở đây A^* là toán tử liên hợp của A.

Bổ đề 1.1. [35, Chương 1] *Cho u là một nghiệm của* (1.3) *trong* $[0, T]$ *và φ là một nghiệm của* (1.4) *trong* $[0, T]$. *Khi đó*

$$\Big[\langle u, \varphi\rangle_{L^2(\Omega)}\Big]_0^T = \int_0^T \langle v(t), B^*\varphi(t)\rangle_{L^2(\omega)}\, dt,$$

với B^* là toán tử liên hợp của B.

Từ Bổ đề 1.1, ta có hệ quả sau.

Hệ quả 1.1. [35, Chương 1] *Hàm v là điều khiển mà chuyển trạng thái u_0 của hệ* (1.3) *đến trạng thái $u_1 \in L^2(\Omega)$ tại thời điểm $T > 0$ nếu và chỉ nếu với mọi $\varphi_T \in L^2(\Omega)$, ta có*

$$\langle u_1, \varphi_T \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle u_0, \varphi(0) \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_0^T \langle v(t), B^*\varphi(t) \rangle_{L^2(\omega)} dt,$$

ở đó φ là nghiệm của (1.4).

Xét $J : \varphi_T \in L^2(\Omega) \mapsto J(\varphi_T)$ xác định bởi

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2} \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|^2_{L^2(\omega)} dt - \langle u_1, \varphi_T \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle u_0, \varphi(0) \rangle_{L^2(\Omega)},$$

với φ là nghiệm của (1.4).

Bổ đề 1.2. [35, Chương 1] *Nếu J có cực tiểu tại $\overline{\varphi}_T$, thì khi đó $\overline{v} := B^*\overline{\varphi}$, ở đó $\overline{\varphi}$ là nghiệm của* (1.4) *liên kết với $\overline{\varphi}_T$, là điều khiển mà chuyển trạng thái u_0 của hệ* (1.3) *đến trạng thái u_1 tại thời điểm $T > 0$.*

Định nghĩa 1.10. Ta nói rằng hệ liên hợp (1.4) là quan sát được nếu tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho với mọi $\varphi_T \in L^2(\Omega)$, nghiệm φ của (1.4) thỏa mãn

$$\|\varphi(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^T \|B^*\varphi(t)\|^2_{L^2(\omega)} dt. \tag{1.5}$$

Chú ý 1.4. Trong Định nghĩa 1.10, tính quan sát được của hệ liên hợp (1.4) được thể hiện qua bất đẳng thức (1.5): trạng thái φ của hệ liên hợp (1.4) tại $t = 0$ được quan sát bởi đại lượng quan sát $B^*\varphi(t)$ với $0 < t < T$. Khi biết được $B^*\varphi(t)$ trong khoảng thời gian $0 < t < T$ có năng lượng như thế nào thì ta cũng biết được năng lượng của φ tại $t = 0$. Bất đẳng thức (1.5) còn gọi là bất đẳng thức quan sát, hằng số C trong (1.5) thường gọi là hằng số quan sát, toán tử B^* còn được gọi là toán tử quan sát.

Mệnh đề 1.1. [35, Chương 1] *Tính quan sát được của* (1.4) *tương đương với tính điều khiển được về* 0 *của hệ* (1.3).

1.5. Một số kết quả bổ trợ

1.5.1. Một số bất đẳng thức

Dưới đây là một số bất đẳng thức sơ cấp quan trọng được sử dụng nhiều để chứng minh trong luận án.

- Bất đẳng thức Cauchy:
$$ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$
- Bất đẳng thức Cauchy với $\epsilon > 0$:
$$ab \le \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon}.$$
- Bất đẳng thức Hölder: Giả thiết $1 \le p, q \le +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó nếu $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ thì $uv \in L^1(\Omega)$ và
$$\int_\Omega |uv| dx \le \|u\|_{L^p(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$
- Bất đẳng thức Gronwall dạng vi phân: Cho $y(t)$ là hàm liên tục tuyệt đối trên $[0, T]$ và thỏa mãn
$$\frac{dy}{dt} \le a(t)y + b(t), \quad \text{với hầu khắp } t \in [0, T],$$
trong đó $a(t)$ và $b(t)$ là các hàm khả tích trên $[0, T]$. Khi đó
$$y(t) \le y(0)e^{A(t)} + \int_0^t e^{A(t)-A(s)} b(s) ds,$$
với $0 \le t \le T$, ở đó $A(t) = \int_0^t a(r) dr$.

  Đặc biệt, nếu a và b là các hằng số khác 0 và $\frac{dy}{dt} \le ay + b$, thì
$$y(t) \le \big(y(0) + \frac{b}{a}\big)e^{at} - \frac{b}{a}.$$

- Bất đẳng thức Gronwall dạng tích phân: Giải sử $\xi(t)$ là một hàm khả tích, không âm trên $[0, T]$ và thỏa mãn bất đẳng thức tích phân sau với hầu khắp $t \in [0, T]$:

$$\xi(t) \le C_1 \int_0^t \xi(s)ds + C_2,$$

với C_1, C_2 là các hằng số không âm. Khi đó

$$\xi(t) \le C_2\big(1 + C_1 t e^{C_1 t}\big)$$

với hầu khắp $t, 0 \le t \le T$.

- Bất đẳng thức Gronwall đều: Cho x, a và b là các hàm không âm thỏa mãn

$$\frac{dx}{dt} \le ax + b$$

trong đó $\int_t^{t+r} x(s)ds \le X, \int_t^{t+r} a(s)ds \le A$ và $\int_t^{t+r} b(s)ds \le B$ với $r > 0$ nào đó và $\forall t \ge t_0$. Khi đó

$$x(t) \le \left(\frac{X}{r} + B\right)e^A, \quad \forall t \ge t_0 + r.$$

1.5.2. Một số bổ đề và định lí quan trọng

Đầu tiên là Bổ đề compact Aubin - Lions - Simon (xem [10], Đinh lí II.5.16, trang 102).

Định lí 1.2. *Giả sử $B_0 \subset B_1 \subset B_2$ là ba không gian Banach và phép nhúng $B_1 \hookrightarrow B_2$ là liên tục, phép nhúng $B_0 \hookrightarrow B_1$ là compact. Giả sử $1 \le p, r \le +\infty$ và với $T > 0$ đặt*

$$E_{p,r} = \{u : u \in L^p(0, T; B_0), \frac{du}{dt} \in L^r(0, T; B_2)\}.$$

Khi đó, nếu $p < +\infty$ thì phép nhúng $E_{p,r}$ vào $L^p(0, T; B_1)$ là compact.

Bổ đề 1.3. [45] Giả sử $\mathscr{O}$ là tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ và g_j là dãy trong $L^p(\mathscr{O})$ thỏa mãn:

$$\|g_j\|_{L^p(\mathscr{O})} \le C, \forall j.$$

Nếu $g \in L^p(\mathscr{O})$ và $g_j \to g$ h.k.n trong $\mathscr{O}$ thì $g_j \to g$ trong $L^p(\mathscr{O})$.

Bổ đề 1.4. [31, Bổ đề 6.1] Cho $u_n : \Omega_T \to \mathbb{R}$ là một dãy các hàm số với $\Omega_T = \Omega \times (0,T), \Omega \subset \mathbb{R}^N$. Cho $h \in C(\mathbb{R})$ là hàm tăng ngặt thỏa mãn $h(0) = 0$. Giả sử rằng sự hội tụ $u_n(x,t) \to u(x,t)$ thỏa mãn hầu khắp nơi với $(x,t) \in \Omega_T$ và

$$\int_{\Omega_T} h(u_n) u_n dx dt \leq a,$$

trong đó $a \geq 0$ không phụ thuộc vào n. Khi đó, $h(u_n)$ và $h(u)$ đều thuộc $L^1(\Omega_T)$ và với mọi hàm thử $\xi \in C_0^\infty([0,T], W)$, ta có

$$\int_{\Omega_T} h(u_n)\xi dx dt \to \int_{\Omega_T} h(u)\xi dx dt.$$

Định lí 1.3. [49, trang 254]*(Đẳng thức Bessel-Parseval). Giả sử H là không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Kí hiệu $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ là một cơ sở trực giao của H. Khi đó ta có đẳng thức Bessel-Parseval:*

$$\|x\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\left\langle x, e_n \right\rangle|^2.$$

• **Công thức tọa độ cầu trong không gian $\mathbb{R}^N, N \geq 3$:**

Với $x \in \mathbb{R}^N$, tọa độ cầu $(\rho, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{N-1})$ của x được cho bởi:

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos\phi_1, \\ x_2 = \rho \sin\phi_1 \cos\phi_2, \\ \vdots \\ x_{N-1} = \rho \sin\phi_1 \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{N-2} \cos\phi_{N-1}, \\ x_N = \rho \sin\phi_1 \sin\phi_2 \cdots \sin\phi_{N-2} \sin\phi_{N-1}, \end{cases}$$

trong đó $\rho \geq 0, \phi_i \in [0,\pi]\ \forall i = 1,\ldots,N-2$ và $\phi_{N-1} \in [0, 2\pi]$.

Chương 2

TẬP HÚT TOÀN CỤC CỦA MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC SUY BIẾN MẠNH TRÊN MIỀN BỊ CHẶN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh Δ_λ trên miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$, với lớp hàm phi tuyến kiểu mới không bị chặn trên đối với điều kiện tăng trưởng. Đầu tiên, sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin, chúng tôi chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của bài toán. Từ đó, chúng tôi xây dựng được một nửa nhóm nghiệm liên tục $S(t)$ liên kết với bài toán. Sau đó, chúng tôi sử dụng lí thuyết về tập hút toàn cục để chứng minh nửa nhóm nghiệm $S(t)$ có một tập hút toàn cục thông qua việc chứng minh sự tồn tại của một tập hấp thụ bị chặn và tính compact tiệm cận của nửa nhóm $S(t)$.

Nội dung của chương này được viết dựa trên công trình [CT1] trong Danh mục công trình khoa học đã công bố liên quan đến luận án.

2.1. Đặt bài toán

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu phương trình parabolic nửa tuyến tính suy biến mạnh sau

$$\begin{cases} u_t - \Delta_\lambda u + f(u) = g(x), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ với biên $\partial\Omega$ trơn. Để nghiên cứu bài toán (2.1), ta giả thiết điều kiện ban đầu $u_0 \in L^2(\Omega)$ cho trước, hàm phi tuyến f và ngoại lực g thỏa mãn các điều kiện sau:

(F) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục thỏa mãn

$$f'(u) \geq -\ell, \tag{2.2}$$

$$f(u)u \geq -\mu u^2 - C_1, \tag{2.3}$$

trong đó C_1, ℓ là các hằng số dương, $0 < \mu < \gamma_1$ với $\gamma_1 > 0$ là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta_\lambda$ trong miền Ω với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất. Từ điều kiện (2.2) ta có $0 \leq \int_0^u (f'(s)s + \ell s)ds$, lấy tích phân từng phần ta được

$$F(u) \leq f(u)u + \ell \frac{u^2}{2} \quad \text{với mọi } u \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

ở đó $F(u) = \int_0^u f(s)ds$ là một nguyên hàm của f;

(G) $g \in L^2(\Omega)$.

Giả sử $\gamma_1 > 0$ là giá trị riêng đầu tiên của toán tử Δ_λ trong Ω với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất. Khi đó,

$$\gamma_1 = \inf \left\{ \frac{\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} \mid u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega) \backslash \{0\} \right\}.$$

Do đó,

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} \geq \gamma_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{với mọi } u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega). \tag{2.5}$$

Trong chương này, với các giả thiết **(F)-(G)**, chúng tôi sẽ nghiên cứu các vấn đề sau đối với bài toán (2.1):

- Nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu;
- Nghiên cứu sự tồn tại tập hút toàn cục trong không gian $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$.

2.2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu

Trong mục này, bằng phương pháp xấp xỉ Galerkin và phương pháp compact, chúng tôi đã chứng minh được bài toán (2.1) có duy nhất một nghiệm yếu. Chúng tôi xét bài toán với lớp phi $f(u)$ không có giới hạn áp đặt cho điều kiện tăng trưởng trên, vì vậy đã xuất hiện một số khó khăn trong quá trình nghiên cứu mà chúng tôi cần một số kĩ thuật để vượt qua, cụ thể là:

- Chứng minh $f(u)$ bị chặn trong $L^1(Q_T)$: Chúng tôi xét tính bị chặn của hàm $h(s) = f(s) - f(0) + \gamma s$, trong đó $\gamma > \ell$;
- Chuyển qua giới hạn: Chúng tôi sử dụng Bổ đề compact Aubin–Lions–Simon (xem Định lí 1.2);
- Chứng minh tính duy nhất và sự phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu: Do hàm $f(u) \in L^1(\Omega)$ mà nghiệm $u \notin L^\infty(\Omega)$ nên để vượt qua khó khăn này chúng tôi đã sử dụng ý tưởng hàm cắt từ công trình của P. G. Geredeli và A. Khanmamedov năm 2013 (xem [32]).

Trước tiên, ta định nghĩa nghiệm yếu của bài toán (2.1).

Định nghĩa 2.1. Hàm u được gọi là một nghiệm yếu của bài toán (2.1) trên $(0,T)$ với điều kiện ban đầu $u(0) = u_0 \in L^2(\Omega)$ nếu và chỉ nếu

$$\begin{aligned}
&u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)), f(u) \in L^1(Q_T),\\
&\frac{du}{dt} \in L^2(0,T; (\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega))^*) + L^1(Q_T)
\end{aligned}$$

và

$$\left\langle \frac{du}{dt} - \Delta_\lambda u + f(u), w \right\rangle = \langle g, w \rangle$$

với mọi hàm thử $w \in W := \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ và với hầu khắp $t \in (0,T)$.

Kết quả về sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu của bài toán được trình bày trong định lí sau.

Định lí 2.1. *Giả sử các điều kiện **(F)-(G)** được thỏa mãn. Khi đó, với bất kì* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *và* $T > 0$ *cho trước, bài toán* (2.1) *có duy nhất nghiệm yếu u trên khoảng* $(0, T)$. *Hơn nữa, nghiệm yếu này phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu.*

Chứng minh. **(i) Sự tồn tại nghiệm.** Ta sẽ chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán bằng phương pháp xấp xỉ Galerkin qua 3 bước như sau:

Bước 1: Lược đồ Galerkin. Ta xây dựng dãy nghiệm xấp xỉ $u_n(t)$ trong không gian hữu hạn chiều sinh bởi n vectơ riêng đầu tiên $\{e_1, ..., e_n\}$ của toán tử $-\Delta_\lambda$:

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{n} u_{nj}(t)e_j$$

sao cho u_n thỏa mãn bài toán sau:

$$\begin{cases} \left\langle \frac{du_n}{dt}, e_j \right\rangle + \left\langle \nabla_\lambda u_n, \nabla_\lambda e_j \right\rangle + \left\langle f(u_n), e_j \right\rangle = \left(g, e_j\right), 1 \le j \le n, \\ \left(u_n(0), e_j\right) = \left(u_0, e_j\right). \end{cases} \tag{2.6}$$

Đây là hệ phương trình vi phân thường nên theo Định lí Peano, ta nhận được sự tồn tại của dãy nghiệm xấp xỉ $u_n(t)$.

Tiếp theo, chúng ta sẽ đánh giá tiên nghiệm để đảm bảo nghiệm tồn tại trên toàn khoảng $[0, T]$.

Bước 2: Đánh giá tiên nghiệm. Xét $\{u_n\}$ là dãy nghiệm xấp xỉ Galerkin. Chúng ta sẽ xây dựng các ước lượng tiên nghiệm của u_n. Ta có

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} + \int_\Omega f(u_n)u_n dx = \int_\Omega g u_n dx. \tag{2.7}$$

Sử dụng điều kiện (2.3) và bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} - \mu\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} - C_1|\Omega| \le \frac{1}{2\varepsilon}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Sử dụng giả thiết (2.5), ta nhận được

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\|u_n\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} + (2\gamma_1 - 2\mu - \varepsilon\gamma_1 - \varepsilon)\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \le &\frac{1}{\varepsilon}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + 2C_1|\Omega|, \end{aligned} \tag{2.8}$$

trong đó $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ để $2\gamma_1 - 2\mu - \varepsilon\gamma_1 - \varepsilon > 0$. Do đó

$$\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq -C_2\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + C_3,$$

trong đó $C_2 = 2\gamma_1 - 2\mu - \varepsilon\gamma_1 - \varepsilon > 0$ và $C_3 = \frac{1}{\varepsilon}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + 2C_1|\Omega|$. Sử dụng bất đẳng thức Gronwall, ta được

$$\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq e^{-C_2}\|u_n(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C_3}{C_2}\big(1 - e^{-C_2}\big).$$

Ước lượng trên đảm bảo rằng nghiệm $u_n(t)$ của (2.6) có thể mở rộng ra trên toàn khoảng $[0, +\infty)$.

Bước 3. Chuyển qua giới hạn. Lấy tích phân từ 0 đến $t, 0 \leq t \leq T$, ước lượng (2.8), ta có đánh giá

$$\begin{aligned}
&\|u_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon\int_0^t \|u_n(s)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)}ds + C_2\int_0^t \|u_n(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds \\
\leq &\frac{1}{\varepsilon}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}T + 2C_1|\Omega|T + \|u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trên suy ra

$$\begin{aligned}
&\{u_n\} \text{ bị chặn trong } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),\\
&\{u_n\} \text{ bị chặn trong } L^2(0, T; \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)).
\end{aligned}$$

Do tính bị chặn của $\{u_n\}$ trong $L^2(0, T; \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega))$, ta có được $\{\Delta_\lambda u_n\}$ bị chặn trong $L^2(0, T; (\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega))^*)$. Từ các kết quả về tính bị chặn trên, ta có thể trích ra một dãy con (ta vẫn kí hiệu như cũ) thỏa mãn

$$\begin{aligned}
u_n &\rightharpoonup u \quad \text{trong} \quad L^2(0, T; \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)),\\
u_n &\rightharpoonup^* u \quad \text{trong} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),\\
\Delta_\lambda u_n &\rightharpoonup \Delta_\lambda u \quad \text{trong} \quad L^2(0, T; (\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega))^*).
\end{aligned}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho (2.7), ta có

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} + \int_\Omega f(u_n)u_n dx \leq \frac{1}{2\gamma_1}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\gamma_1}{2}\|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Lấy tích phân bất đẳng thức trên từ 0 đến T (chú ý rằng $\|u_n\|^2_{\overset{\circ}{W}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)} \geq \gamma_1 \|u_n\|^2_{L^2(\Omega)}$), ta được

$$\int_0^T \|u_n(s)\|^2_{\overset{\circ}{W}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)} ds + 2\int_{Q_T} f(u_n)u_n dxdt \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{T}{\gamma_1}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Do đó,

$$\int_{Q_T} f(u_n)u_n dxdt \leq C. \tag{2.9}$$

Bây giờ, ta chứng minh $f(u_n)$ bị chặn trong $L^1(Q_T)$. Đặt $h(s) = f(s) - f(0) + \gamma s$, trong đó $\gamma > \ell$. Chú ý rằng $h(s)s = (f(s) - f(0))s + \gamma s^2 = f'(c)s^2 + \gamma s^2 \geq (\gamma - \ell)s^2 \geq 0$ với mọi $s \in \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T} |h(u_n)| dxdt &\leq \int_{Q_T \cap \{|u_n|>1\}} |h(u_n)u_n| dxdt + \int_{Q_T \cap \{|u_n|\leq 1\}} |h(u_n)| dxdt \\
&\leq \int_{Q_T} h(u_n)u_n dxdt + \sup_{|s|\leq 1} |h(s)||Q_T| \\
&\leq \int_{Q_T} f(u_n)u_n dxdt + |f(0)|\|u_n\|_{L^1(Q_T)} + \gamma\|u_n\|^2_{L^2(Q_T)} \\
&\quad + \sup_{|s|\leq 1} |h(s)||Q_T| \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

ở đây ta đã sử dụng (2.9) và tính bị chặn của $\{u_n\}$ trong $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$. Vì vậy, $\{h(u_n)\}$ bị chặn trong $L^1(Q_T)$. Suy ra $\{f(u_n)\}$ cũng bị chặn trong $L^1(Q_T)$.

Tiếp theo ta chứng minh dãy $\{\frac{du_n}{dt}\}$ bị chặn trong $L^1(0, T; (\overset{\circ}{W}^{1,2}_{\lambda}(\Omega))^* + L^1(\Omega))$. Thật vậy, từ

$$\frac{du_n}{dt} = \Delta_\lambda u_n - f(u_n) + g,$$

suy ra $\{\frac{du_n}{dt}\}$ bị chặn trong $L^2(0, T; (\overset{\circ}{W}^{1,2}_{\lambda}(\Omega))^*) + L^1(Q_T)$. Kết hợp với $L^1(Q_T)$ và $L^2(0, T; (\overset{\circ}{W}^{1,2}_{\lambda}(\Omega))^*)$ nhúng liên tục vào $L^1(0, T; (\overset{\circ}{W}^{1,2}_{\lambda}(\Omega))^* + L^1(\Omega))$, ta thu được kết quả cần chứng minh.

Từ các kết quả trên, ta có

$$\frac{du_n}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \quad \text{trong} \quad L^2(0, T; (\overset{\circ}{W}^{1,2}_{\lambda}(\Omega))^*) + L^1(Q_T),$$

$$f(u_n) \rightharpoonup \chi \quad \text{trong} \quad L^1(Q_T).$$

Tiếp theo ta cần chứng minh $\chi = f(u)$ và $u(0) = u_0$. Sử dụng Bổ đề compact Aubin–Lions–Simon (xem Định lí 1.2) và $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow (\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega))^* + L^1(\Omega)$, ta suy ra $\{u_n\}$ là compact trong $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Do đó, chúng ta có thể trích ra dãy con thỏa mãn $u_n \to u$ hầu khắp nơi trong Q_T. Áp dụng Bổ đề 1.4, ta nhận được $h(u) \in L^1(Q_T)$ và

$$\int_{Q_T} h(u_n)\xi dxdt \to \int_{Q_T} h(u)\xi dxdt,$$

với mọi hàm thử $\xi \in C_0^{\infty}([0,T];\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$. Do đó $f(u) \in L^1(Q_T)$ và

$$\int_{Q_T} f(u_n)\xi dxdt \to \int_{Q_T} f(u)\xi dxdt,$$

với mọi $\xi \in C_0^{\infty}([0,T];\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega))$. Suy ra $f(u_n) \rightharpoonup f(u)$ trong $L^1(Q_T)$. Do tính duy nhất của giới hạn, ta nhận được $\chi = f(u)$. Do đó, u thỏa mãn (2.7).

Để chứng minh $u(0) = u_0$, ta chọn hàm thử $\varphi \in C_0^{\infty}([0,T];\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega))$ với $\varphi(T) = 0$ và lấy tích phân từng phần số hạng đầu theo t ở phương trình xấp xỉ nghiệm, ta có:

$$-\int_0^T \int_{\Omega} u_n \frac{\partial \varphi}{\partial t} dxdt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta_{\lambda} u_n \varphi dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} f(u_n)\varphi dxdt$$
$$= \int_0^T \int_{\Omega} g\varphi dxdt + (u_n(0), \varphi(0)).$$

Qua giới hạn với $n \to \infty$, với $u_n(0) \to u_0$, ta thu được:

$$-\int_0^T \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dxdt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta_{\lambda} u \varphi dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} f(u)\varphi dxdt$$
$$= \int_0^T \int_{\Omega} g\varphi dxdt + (u_0, \varphi(0)).$$

Mặt khác, ta có

$$-\int_0^T \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta_\lambda u \varphi dxdt + \int_0^T \int_\Omega f(u)\varphi dxdt$$
$$= \int_0^T \int_\Omega g\varphi dxdt + (u(0), \varphi(0)).$$

Do đó $u(0) = u_0$. Vậy u là nghiệm yếu của bài toán (2.1).

(ii) Tính duy nhất và sự phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Giả sử u và v là hai nghiệm của bài toán (2.1) với giá trị ban đầu lần lượt là $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$. Kí hiệu $w = u - v$, ta có hệ

$$\begin{cases} w_t - \Delta_\lambda w + \widetilde{f}(u) - \widetilde{f}(v) - \ell w = 0, \\ w(0) = u_0 - v_0, \end{cases} \tag{2.10}$$

trong đó $\widetilde{f}(s) = f(s) + \ell s$. Do $w(t)$ không thuộc vào không gian $W := \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, nên ta không thể chọn $w(t)$ là hàm thử. Vì thế ta sẽ không sử dụng được các kĩ thuật như trong [4].

Sử dụng kĩ thuật trong [32]. Xét $B_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm cắt được xác định như sau:

$$B_k(s) = \begin{cases} k & \text{nếu} \quad s > k, \\ s & \text{nếu} \quad |s| \le k, \\ -k & \text{nếu} \quad s < -k. \end{cases}$$

Xét ánh xạ Nemytskii $\widehat{B}_k : W \to W$ xác định bởi

$$\widehat{B}_k(w)(x) = B_k(w(x)) \quad \text{với mọi} \quad x \in \Omega.$$

Từ Bổ đề 2.3 trong [32], ta có $\|\widehat{B}_k(w) - w\|_W \to 0$ khi $k \to \infty$. Nhân (2.10) với $\widehat{B}_k(w)$, rồi lấy tích phân trên $\Omega \times (\varepsilon, t)$, với $t \in (0, T)$, ta được

$$\int_\varepsilon^t \int_\Omega \frac{d}{ds}\big(w(s)\widehat{B}_k(w)(s)\big) dxds - \int_\varepsilon^t \int_\Omega w \frac{d}{ds}\big(\widehat{B}_k(w)(s)\big) dxds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\{x\in\Omega:|w(x,s)|\le k\}}|\nabla_\lambda w|^2dxds$$

$$+\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\Omega}\big(\widetilde{f}(u)-\widetilde{f}(v)\big)\widehat{B}_k(w)dxds-\ell\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\Omega}w\widehat{B}_k(w)dxds=0.$$

Do $w\frac{d}{dt}\big(\widehat{B}_k(w)\big)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big((\widehat{B}_k(w))^2\big)$, ta có

$$\int_{\Omega}w(t)\widehat{B}_k(w)(t)dx-\frac{1}{2}\|\widehat{B}_k(w)(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\{x\in\Omega:|w(x,s)|\le k\}}|\nabla_\lambda w|^2dxds+\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\Omega}\widetilde{f}'(\xi)w\widehat{B}_k(w)dxds$$

$$=\int_{\Omega}w(\varepsilon)\widehat{B}_k(w)(\varepsilon)dx-\frac{1}{2}\|\widehat{B}_k(w)(\varepsilon)\|^2_{L^2(\Omega)}+\ell\int_{\varepsilon}^{t}\int_{\Omega}w\widehat{B}_k(w)dxds.$$

Chú ý rằng $\widehat{f}'(s)\ge 0$ và $sB_k(s)\ge 0$ với mọi $s\in\mathbb{R}$, cho $\varepsilon\to 0$ và $k\to\infty$ trong đẳng thức trên, ta được

$$\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\le\|w(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+2\ell\int_0^t\|w(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds.$$

Do đó, áp dụng bất đẳng thức Gronwall dạng tích phân, ta có

$$\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\le\|w(0)\|^2_{L^2(\Omega)}e^{2\ell t}\le\|w(0)\|^2_{L^2(\Omega)}e^{2\ell T},$$

với mọi $t\in[0,T]$. Chú ý rằng $w\in C([0,T];L^2(\Omega))$, đặc biệt, ta có được tính duy nhất khi $w(0)=0$. □

2.3. Sự tồn tại của tập hút toàn cục

Định lí 2.1 cho phép ta xác định một nửa nhóm liên tục $S(t):L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ liên kết với bài toán (2.1) như sau

$$S(t)u_0:=u(t),$$

trong đó $u(\cdot)$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (2.1) với điều kiện ban đầu $u_0\in L^2(\Omega)$. Bây giờ, chúng ta sẽ chứng minh nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ có tập hút toàn cục $\mathscr{A}$ trong không gian $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$ theo lược đồ như sau:

- Chứng minh nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ tồn tại tập hấp thụ bị chặn trong $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$;
- Chứng minh tính compact tiệm cận của nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ trong $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$.

2.3.1. Sự tồn tại các tập hấp thụ bị chặn

Trong mục này, chúng tôi sẽ chứng minh sự tồn tại tập hấp thụ bị chặn trong không gian $L^2(\Omega)$ và $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$.

Bổ đề 2.1. *Giả sử các điều kiện **(F)-(G)** được thỏa mãn. Khi đó, nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ có một tập hấp thụ bị chặn trong $L^2(\Omega)$.*

Chứng minh. Nhân phương trình đầu của (2.1) với u và lấy tích phân trên miền Ω, ta được

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)} + \int_{\Omega} f(u)u dx = \int_{\Omega} g u dx. \tag{2.11}$$

Sử dụng giả thiết (2.3), (2.5), và bất đẳng thức Cauchy, (2.11) trở thành

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma_1 - \mu)\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 2C_1|\Omega| + \frac{1}{\gamma_1 - \mu}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta được

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} e^{-(\gamma_1-\mu)t} + R_1,$$

trong đó $R_1 = R_1(\gamma_1, \mu, |\Omega|, \|g\|_{L^2(\Omega)})$. Do đó, chọn $\rho_1 = 2R_1$, ta có

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \rho_1, \tag{2.12}$$

với mọi $t \geq T_1 = T_1(\|u_0\|_{L^2(\Omega)})$. Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.2. *Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ có một tập hấp thụ bị chặn trong $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$.*

Chứng minh. Nhân phương trình đầu của (2.1) với $-\Delta_\lambda u$ và lấy tích phân từng phần, ta thu được

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)} + \|\Delta_\lambda u\|^2_{L^2(\Omega)} &= -\int_{\Omega} f'(u)|\nabla_\lambda u|^2 dx - \int_{\Omega} g\Delta_\lambda u dx \\ &\leq \ell\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)} + \frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\Delta_\lambda u\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Do đó,

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)} \leq 2\ell\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.13}$$

Mặt khác, lấy tích phân (2.11) từ t đến $t+1$ và sử dụng (2.3), (2.12), ta có

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+1} \|u(s)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} ds + \frac{1}{2}\|u(t+1)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\le&(\mu+1)\int_t^{t+1} \|u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds + \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + C_1|\Omega| + \frac{1}{4}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\le&\rho_2 = \rho_2(\gamma_1, \mu, |\Omega|, \|g\|_{L^2(\Omega)}),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

với mọi $t \ge T_1 = T_1(\|u_0\|_{L^2(\Omega)})$. Áp dụng bất đẳng thức Gronwall đều, từ (2.13) và (2.14), ta có

$$\|u(t)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} \le \rho_2, \tag{2.15}$$

với mọi $t \ge T_2 = T_1 + 1$. Bổ đề được chứng minh. □

2.3.2. Tính compact tiệm cận của nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\ge 0}$

Để chứng minh tính compact tiệm cận của nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\ge0}$ trong không gian $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$ ta cần chứng minh nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\ge0}$ có một tập hấp thụ bị chặn trong $D(\Delta_\lambda)$ và phép nhúng $D(\Delta_\lambda) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$ là compact.

Bổ đề 2.3. *Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\ge0}$ có một tập hấp thụ bị chặn trong $D(\Delta_\lambda)$.*

Chứng minh. Đạo hàm hai vế (2.1) theo thời gian, ta được

$$u_{tt} - \Delta_\lambda u_t + f'(u)u_t = 0.$$

Nhân vô hướng đẳng thức trên với u_t trong $L^2(\Omega)$ và sử dụng (2.2), ta suy ra

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} \le \ell\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{2.16}$$

Nhân phương trình đầu của (2.1) với u_t, ta được

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} + \int_\Omega F(u)dx - \int_\Omega gudx\right) = -\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} \le 0. \tag{2.17}$$

Ngoài ra, lấy tích phân (2.11) từ t tới $t+1$ và sử dụng ước lượng (2.12), ta có

$$\int_t^{t+1}\left[\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} + \int_\Omega f(u)udx - \int_\Omega gudx\right]ds \le \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \rho_1,$$

với mọi $t \geq T_1$. Mặt khác, áp dụng (2.4) và sử dụng ước lượng (2.12), ta có

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+1} \left[\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} + \int_\Omega f(u)udx - \int_\Omega gudx \right] ds \\
\geq &\int_t^{t+1} \left[\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} + \int_\Omega F(u)dx - \frac{\ell}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega gudx \right] ds \\
\geq &\int_t^{t+1} \left[\frac{1}{2}\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} + \int_\Omega F(u)dx - \int_\Omega gudx \right] ds - \frac{\ell}{2}\rho_1,
\end{aligned}$$

với mọi $t \geq T_1$. Do đó,

$$\int_t^{t+1} \left[\frac{1}{2}\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} + \int_\Omega F(u)dx - \int_\Omega gudx \right] ds \leq (1 + \frac{\ell}{2})\rho_1, \ \forall t \geq T_1. \quad (2.18)$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall đều, từ (2.17) và (2.18), ta suy ra

$$\frac{1}{2}\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} + \int_\Omega F(u)dx - \int_\Omega gudx \leq \rho_3, \quad \text{với mọi } t \geq T_2 = T_1 + 1. \quad (2.19)$$

Lấy tích phân (2.17) từ t tới $t+1$ và sử dụng (2.19), ta có

$$\int_t^{t+1} \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \rho_3 \quad \text{với mọi } t \geq T_2. \quad (2.20)$$

Kết hợp (2.16) với (2.20) và sử dụng bất đẳng thức Gronwall đều, ta thu được

$$\|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \rho_3 \quad \text{với mọi} \quad t \geq T_3 = T_2 + 1. \quad (2.21)$$

Mặt khác, nhân phương trình đầu của (2.1) với $-\Delta_\lambda u$, sử dụng (2.2) và bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}
\|\Delta_\lambda u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega u_t \Delta_\lambda u dx - \int_\Omega f'(u)|\nabla_\lambda u|^2 dx - \int_\Omega g\Delta_\lambda u dx \\
&\leq \ell \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} + \|u_t\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\Delta_\lambda u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Tiếp tục sử dụng các ước lượng (2.15) và (2.21), ta có được

$$\|\Delta_\lambda u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \rho_4,$$

với mọi $t \geq T_3$. Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.4. *Phép nhúng $D(\Delta_\lambda) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$ là compact.*

Chứng minh. Với mọi $u \in D(\Delta_\lambda)$, ta có

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla_\lambda u|^2 dx = -\int_\Omega u \cdot \Delta_\lambda u dx \leq \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \|\Delta_\lambda u\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (2.22)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại hằng số $C(\varepsilon)$ thỏa mãn

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} \leq \varepsilon \|\Delta_\lambda u\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\varepsilon)\|u\|^2_{L^1(\Omega)} \qquad (2.23)$$

với mọi $u \in D(\Delta_\lambda)$. Thật vậy, vì $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, sử dụng Bổ đề Ehrling, ta có với mọi $\eta > 0$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \eta \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} + C_1(\eta)\|u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Kết hợp với (2.22) và bất đẳng thức Cauchy, ta thu được

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} &\leq \|\Delta_\lambda u\|_{L^2(\Omega)} \left(\eta \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} + C_1(\eta)\|u\|_{L^1(\Omega)} \right) \\ &\leq \eta \|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} + \eta \|\Delta_\lambda u\|^2_{L^2(\Omega)} + C_2(\eta)\|u\|^2_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Chọn η phù hợp, ta sẽ thu được (2.23).

Bây giờ, ta sẽ chứng minh phép nhúng $D(\Delta_\lambda) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$ là compact. Thật vậy, lấy $\{u_n\}$ là một dãy bị chặn trong $D(\Delta_\lambda)$. Khi đó, tồn tại một dãy con $\{u_{n_k}\}$ thỏa mãn $u_{n_k} \rightharpoonup u$ trong $D(\Delta_\lambda)$. Sử dụng (2.23), ta có

$$\|u_{n_k} - u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)} \leq \varepsilon \|\Delta_\lambda u_{n_k} - \Delta_\lambda u\|^2_{L^2(\Omega)} + C(\varepsilon)\|u_{n_k} - u\|^2_{L^1(\Omega)}.$$

Vì $D(\Delta_\lambda) \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega) \subset\subset L^1(\Omega)$ và tính bị chặn của dãy $\{u_{n_k} - u\}$ trong $D(\Delta_\lambda)$, ta có thể trích ra một dãy con của u_{n_k} (ta vẫn kí hiệu như cũ) thỏa mãn $u_{n_k} \to u$ trong $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$. Bổ đề được chứng minh. □

Sử dụng các Bổ đề (2.2), Bổ đề (2.3) và Bổ đề (2.4) ta suy ra nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ có tập hấp thụ bị chặn và compact tiệm cận trong không gian $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$. Do đó áp dụng Định lí 1.1 ở Chương 1 ta có Định lí quan trọng sau.

Định lí 2.2. *Giả sử các điều kiện* **(F)–(G)** *được thỏa mãn. Khi đó, nửa nhóm* $S(t)$ *sinh bởi bài toán* (2.1) *có tập hút toàn cục* $\mathscr{A}$ *trong không gian* $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_\lambda(\Omega)$.

Chú ý cuối chương. Để kết thúc chương này, bây giờ chúng tôi đưa ra một số bình luận về kết quả của chương. Cụ thể:

- Lớp toán tử Δ_λ-Laplace nghiên cứu trong chương này chứa nhiều lớp toán tử elliptic suy biến như là toán tử suy biến Grushin (xem [34]) và toán tử suy biến mạnh dạng $P_{s,\gamma}$ (xem [63]). Mục đích của chương này là nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, dáng điệu tiệm cận nghiệm bằng lí thuyết các hệ động lực tiêu hao vô hạn chiều, cụ thể là thông qua nghiên cứu sự tồn tại và tính chính quy của tập hút. Vì vậy, ta cần nghiên cứu bài toán (2.1) trên các không gian Sobolev có trọng phù hợp đối với toán tử Δ_λ là $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$, $D(\Delta_\lambda)$ và chứng minh được phép nhúng $D(\Delta_\lambda) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$ là compact.

- Trong những năm gần đây, có hai lớp số hạng phi tuyến được nghiên cứu nhiều. Thứ nhất là lớp số hạng phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng và tiêu hao kiểu Sobolev (xem [3, 38, 39, 44]). Thứ hai là lớp số hạng phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng kiểu đa thức (xem [4, 9, 61, 64]). Hai lớp số hạng phi tuyến này đều có hạn chế phía trên về điều kiện tăng trưởng và số hạng phi tuyến kiểu mũ không thỏa mãn, chẳng hạn như $f(u) = e^u$. Lớp số hạng phi tuyến chúng tôi xét trong bài toán (2.1) tổng quát hơn, vừa chứa cả hai lớp phi tuyến trên, vừa chứa lớp số hạng phi tuyến tăng trưởng kiểu mũ. Sự khác biệt chính so với chứng minh trong [3, 4, 64] là số hạng phi tuyến $f(u)$ trong bài toán của chúng tôi chỉ thuộc không gian $L^1(Q_T)$ do không có giới hạn áp đặt cho điều kiện tăng trưởng trên của nó. Điều này dẫn đến một số khó khăn khi thiết lập các ước lượng tiên nghiệm, chuyển qua giới hạn đối với số hạng phi tuyến và chứng minh tính duy nhất của nghiệm.

Kết luận Chương 2.

Trong chương này, chúng tôi đã trình bày các kết quả về sự tồn tại, tính duy nhất và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào dữ kiện ban đầu, sự tồn tại tập hút toàn cục cùng với tính trơn của nó. Để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm chúng tôi đã sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin và phương pháp compact. Để chứng minh tính trơn của tập hút toàn cục, chúng tôi sử dụng phương pháp đánh giá tiên nghiệm tiệm cận.

Chương 3

TẬP HÚT TOÀN CỤC CỦA MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC SUY BIẾN MẠNH TRÊN TOÀN KHÔNG GIAN

Trong Chương 2, chúng tôi đã nghiên cứu bài toán parabolic suy biến nửa tuyến tính trên miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$. Khi đó nửa nhóm $S(t), t > 0$, sinh bởi bài toán là một nửa nhóm (phi tuyến) compact, tức là $S(t)$ là toán tử compact với mỗi $t > 0$ (điều này suy ra từ tính compact của phép nhúng $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$). Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trên toàn không gian $\mathbb{R}^N, N \geq 2$. Khi đó các phép nhúng cần thiết không còn compact, do đó $S(t)$ không còn là nửa nhóm compact nữa và điều đó gây ra những khó khăn lớn khi nghiên cứu.

Nội dung của chương này được viết dựa trên công trình [CT2] trong Danh mục công trình khoa học đã công bố của luận án.

3.1. Đặt bài toán

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu phương trình parabolic nửa tuyến tính suy biến mạnh sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - P_{s,\gamma}u + f(X,u) + \lambda u = g(X), & X \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(X,0) = u_0(X), & X \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $\lambda > 0, X = (x,y,z), \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3}$ $(N_1, N_2, N_3 \geq 1)$, và $P_{s,\gamma}$ là toán tử suy biến mạnh đã được nêu ở Chương 1. Để nghiên cứu bài toán (3.1), ta giả thiết điều kiện ban đầu $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ cho trước, hàm phi tuyến f và hàm ngoại lực g thỏa mãn các điều kiện sau:

(F) $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục thỏa mãn

$$f'_u(X,u) \geq -\ell, \tag{3.2}$$

$$f(X,u)u \geq -\mu u^2 - C_1(X), \tag{3.3}$$

trong đó $\ell > 0$, $0 < \mu < \lambda$, $C_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ là hàm không âm. Từ điều kiện (3.2) ta có $0 \leq \int_0^u (f'_u(X,s)s + \ell s)ds$, lấy tích phân từng phần ta được

$$F(X,u) \leq f(X,u)u + \ell \frac{u^2}{2} \quad \text{với mọi } u \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

ở đó $F(X,u) = \int_0^u f(X,s)ds$ là một nguyên hàm của f;

(G) $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Trong chương này, với các giả thiết **(F)-(G)**, chúng tôi sẽ nghiên cứu các vấn đề sau đối với bài toán (3.1):

- Nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu;
- Nghiên cứu sự tồn tại tập hút toàn cục của nửa nhóm $S(t)$ sinh bởi bài toán (3.1) trong không gian $L^2(\mathbb{R}^N)$ và $S^1(\mathbb{R}^N)$.

3.2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Định nghĩa 3.1. Hàm u gọi là một nghiệm yếu của bài toán (3.1) trên $(0,T)$ với điều kiện ban đầu $u(0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ nếu và chỉ nếu $u \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^2(0,T; S^1(\mathbb{R}^N)), u_t \in L^2(0,T; S^{-1}(\mathbb{R}^N)) \cap L^1(Q_T)$ và

$$\langle u_t, w\rangle - \langle P_{s,\gamma} u, w\rangle + \langle f(X,u), w\rangle + \lambda\langle u, w\rangle = \langle g, w\rangle,$$

với mọi hàm thử $w \in S^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ và với hầu khắp $t \in (0,T)$.

Định lí sau trình bày kết quả về sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu của bài toán (3.1).

Định lí 3.1. *Giả sử các điều kiện* **(F)-(G)** *được thỏa mãn. Khi đó, với bất kỳ* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *và* $T > 0$ *cho trước, bài toán* (3.1) *có duy nhất nghiệm yếu* u *trên khoảng* $(0, T)$. *Hơn nữa, ánh xạ* $u_0 \mapsto u(t)$ *là liên tục trên* $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Chứng minh. **(i) Sự tồn tại nghiệm.** Chúng ta xét một dãy các bài toán trong miền bị chặn B_R sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - P_{s,\gamma}u + f(X,u) + \lambda u = g(X), & X \in B_R, t > 0, \\ u(X,t) = 0, & X \in \partial B_R, t > 0, \\ u(X,0) = u_{0,R}(X), & X \in B_R, \end{cases} \tag{3.5}$$

trong B_R là hình cầu mở có bán kính $R \geq 1$ tâm 0, $u_{0,R} = u_0\psi_R(|X|)$ và ψ_R là hàm trơn thỏa mãn

$$\psi_R(r) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } 0 \leq r \leq R-1, \\ 0 \leq \psi_R(r) \leq 1 & \text{nếu } R-1 \leq r \leq R, \\ 0 & \text{nếu } r > R. \end{cases}$$

Từ Định lí 2.1 của Chương 2 ta có thể suy ra, với mỗi $R \geq 1$, bài toán (3.5) có duy nhất nghiệm yếu u_R. Bây giờ, ta sẽ chỉ ra dãy $\{u_R\}$ bị chặn đều bởi một hằng số không phụ thuộc vào R. Ta có

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_R\|^2_{L^2(B_R)} + \int_{B_R} |\nabla_{s,\gamma}u_R|^2 dX + \int_{B_R} f(X,u_R)u_R dX + \lambda\|u_R\|^2_{L^2(B_R)} = \int_{B_R} g u_R dX.$$

Từ (3.3), ta được

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_R\|^2_{L^2(B_R)} + \int_{B_R} |\nabla_{s,\gamma}u_R|^2 dX + (\lambda-\mu)\|u_R\|^2_{L^2(B_R)} \leq \int_{B_R} g u_R dX + \int_{B_R} C_1(X) dX.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy và giả thiết $C_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, ta có

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_R\|^2_{L^2(B_R)} + \int_{B_R} |\nabla_{s,\gamma}u_R|^2 dX + (\lambda-\mu)\|u_R\|^2_{L^2(B_R)} \\ \leq &\frac{1}{2(\lambda-\mu)}\|g\|_{L^2(B_R)} + \frac{\lambda-\mu}{2}\|u_R\|^2_{L^2(B_R)} + C. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\frac{d}{dt}\|u_R\|^2_{L^2(B_R)} + 2\int_{B_R} |\nabla_{s,\gamma}u_R|^2 dX + (\lambda-\mu)\|u_R\|^2_{L^2(B_R)} \leq \frac{1}{\lambda-\mu}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + C.$$

Lấy tích phân từ 0 đến $t, 0 \le t \le T$, ta được

$$\|u_R(t)\|^2_{L^2(B_R)} + 2\int_0^t \int_{B_R} |\nabla_{s,\gamma} u_R|^2 dX ds + (\lambda - \mu)\int_0^t \|u_R(s)\|^2_{L^2(B_R)} ds$$
$$\le \frac{1}{\lambda - \mu}\|g(X)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} T + CT + \|u_0 \psi_R(|X|)\|^2_{L^2(B_R)}. \tag{3.6}$$

Xét $u_{r_j}, r_j \to +\infty$, là dãy nghiệm của bài toán (3.5) trong B_{r_j}. Khi đó, từ (3.6) ta có

$$\{u_{r_j}\} \text{ bị chặn đều trong } L^\infty(0,T; L^2(B_{r_j})) \cap L^2(0,T; S^1(B_{r_j})). \tag{3.7}$$

Ta sẽ thác triển những nghiệm này xác định trên $\mathbb{R}^N$ theo cách sau:

$$\hat{u}_{r_j}(X) = \begin{cases} u_{r_j}(X)\psi_{r_j}(|X|) & \text{trong } B_{r_j}, \\ 0 & \text{trên } \mathbb{R}^N \backslash B_{r_j}. \end{cases}$$

Vì (3.7) nên ta suy ra dãy $\{\hat{u}_{r_j}\}$ bị chặn trong $L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^N)) \cap L^2(0,T; S^1(\mathbb{R}^N))$.

Do đó, tồn tại dãy con của $\{\hat{u}_{r_j}\}$ (vẫn kí hiệu $\hat{u}_{r_j}$) thỏa mãn

$$\begin{aligned} \hat{u}_{r_j} &\rightharpoonup u_\infty \text{ trong } L^2(0,T; S^1(\mathbb{R}^N)), \\ \hat{u}_{r_j} &\rightharpoonup^* u_\infty \text{ trong } L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^N)), \\ P_{s,\gamma}\hat{u}_{r_j} &\rightharpoonup P_{s,\gamma} u_\infty \text{ trong } L^2(0,T; S^{-1}(\mathbb{R}^N)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ta sẽ chứng minh u_∞ là nghiệm yếu của bài toán (3.1).

Cố định r_k, khi $r_j \to +\infty$, ta giả sử $r_k \le r_j - 1$. Ta định nghĩa phép chiếu của $\hat{u}_{r_j}$ trong B_{r_k} và kí hiệu là $u_{kj} = L_k \hat{u}_{r_j}$. Từ (3.7) ta suy ra $\{u_{kj}\}$ bị chặn trong $L^\infty(0,T; L^2(B_{r_k})) \cap L^2(0,T; S^1(B_{r_k}))$. Do đó, tồn tại một dãy con (vẫn kí hiệu là u_{kj}) sao cho $u_{kj} = L_k \hat{u}_{r_j} \rightharpoonup u_{k\infty}$ trong $L^2(0,T; S^1(B_{r_k}))$ và hội tụ *–yếu trong $L^\infty(0,T; L^2(B_{r_k}))$.

Bây giờ, ta chứng minh $L_k u_\infty = u_{k\infty}$. Thật vậy, lấy $v \in C_0^\infty([0,T] \times B_{r_k})$, hội tụ *–yếu trong $L^\infty(0,T; L^2(B_{r_k}))$ cho trước, ta có

$$\int_0^T \int_{B_{r_k}} L_k \hat{u}_{r_j} v dX dt \to \int_0^T \int_{B_{r_k}} u_{k\infty} v dX dt.$$

Mặt khác, lưu ý rằng $v(t,X)=0$ với $X \notin B_{r_k}$ và sử dụng (3.8) ta được

$$\int_0^T \int_{B_{r_k}} L_k \hat{u}_{r_j} v dX dt \to \int_0^T \int_{B_{r_k}} \hat{u}_{r_j} v dX dt \to \int_0^T \int_{B_{r_k}} u_\infty v dX dt,$$

và

$$\int_0^T \int_{B_{r_k}} u_\infty v dX dt = \int_0^T \int_{B_{r_k}} L_k u_\infty v dX dt.$$

Do đó, $L_k u_\infty = u_{k\infty}$. Ta nói rằng $L_k u_\infty$ là một nghiệm yếu trong $Q_{r_k,T} = [0,T] \times B_{r_k}$. Ta được

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{kj}\|^2_{L^2(B_{r_k})} + \int_{B_{r_k}} |\nabla_{s,\gamma} u_{kj}|^2 dX + \int_{B_{r_k}} f(X,u_{kj}) u_{kj} dX + \lambda \|u_{kj}\|^2_{L^2(B_{r_k})}$$
$$= \int_{B_{r_k}} g u_{kj} dX. \tag{3.9}$$

Lấy tích phân (3.9) từ 0 đến T, ta có

$$2\int_0^T \int_{B_{r_k}} |\nabla_{s,\gamma} u_{kj}|^2 dX dt + 2\int_{Q_{r_k,T}} f(X,u_{kj}) u_{kj} dX dt + \lambda \int_0^T \|u_{kj}\|^2_{L^2(B_{r_k})} dt$$
$$\le \|u_{0,r_k}\|^2_{L^2(B_{r_k})} + \frac{1}{\lambda}\|g\|^2_{L^2(B_{r_k})} T.$$

Do đó,

$$\int_{Q_{r_k,T}} f(X,u_{kj}) u_{kj} dX dt \le C.$$

Tiếp theo, ta chứng minh $\{f(X,u_{kj})\}$ bị chặn trong $L^1(Q_{r_k,T})$. Đặt $h(u_{kj}) = f(X,u_{kj}) + \bar{\mu} u_{kj}$, trong đó $\bar{\mu} > \ell$. Vì $h(s)s \ge 0$ với mọi $s \in \mathbb{R}$, ta có

$$\int_{Q_{r_k,T}} |h(u_{kj})| dX dt \le \int_{Q_{r_k,T} \cap \{|u_{kj}|>1\}} |h(u_{kj}) u_{kj}| dX dt + \int_{Q_{r_k,T} \cap \{|u_{kj}| \le 1\}} |h(u_{kj})| dX dt$$
$$\le \int_{Q_{r_k,T}} h(u_{kj}) u_{kj} dX dt + \sup_{|s|\le 1} |h(s)| |Q_{r_k,T}| \le C.$$

Vì vậy, $\{h(u_{kj})\}$ bị chặn trong $L^1(Q_{r_k,T})$. Do đó, suy ra $\{f(X,u_{kj})\}$ bị chặn $L^1(Q_{r_k,T})$. Mặt khác, ta có

$$\frac{\partial u_{kj}}{\partial t} = P_{s,\gamma} u_{kj} - f(X,u_{kj}) - \lambda u_{kj} + g,$$

nên $\{\dfrac{\partial u_{kj}}{\partial t}\}$ bị chặn trong $L^2(0,T;S^{-1}(B_{kj}))+L^1(Q_{r_k,T})$. Do đó, $\{\dfrac{\partial u_{kj}}{\partial t}\}$ bị chặn trong $L^1(0,T;S^{-1}(B_{kj})+L^1(B_{kj}))$. Sử dụng Bổ đề compact Aubin–Lions–Simon (xem Định lí 1.2) và $S_0^1(B_{kj}) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(B_{kj}) \hookrightarrow S^{-1}(B_{kj})+L^1(B_{kj})$, ta suy ra $\{u_{kj}\}$ là compact trong $L^2(0,T;L^2(B_{kj}))$. Do đó, có thể trích ra dãy con thỏa mãn $u_{kj} \to u_{k\infty}$ hầu khắp nơi trong $Q_{r_k,T}$ và

$$\int_{Q_{r_k,T}} f(X,u_{kj})\xi dXdt \to \int_{Q_{r_k,T}} f(X,u_{k\infty})\xi dXdt,$$

với mọi $\xi \in C_0^\infty([0,T];S^{-1}(B_{kj})\cap L^\infty(B_{kj}))$. Vì vậy, ta có $u_{k\infty}$ là nghiệm yếu trong $[0,T]\times B_{r_k}$. Do đó, u_∞ là nghiệm yếu của bài toán (3.1). Thật vậy, với mọi hàm thử $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$, tồn tại r_k sao cho $v \in C_0^\infty(B_{r_k})$, sử dụng $u_{k\infty}$ là nghiện yếu của (3.1) trong $Q_{r_k,T}$, ta có u_∞ là nghiệm yếu của bài toán (3.1) trong $[0,T]\times\mathbb{R}^N$.

(ii) Tính duy nhất và sự phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Giả sử u và v là hai nghiệm yếu của bài toán (3.1) với dữ kiện ban đầu lần lượt là $u_0, v_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Đặt $w = u - v$, ta có

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - P_{s,\gamma}w + \widetilde{f}(X,u) - \widetilde{f}(X,v) - \ell w + \lambda w &= 0, \\ \qquad w(0) &= u_0 - v_0, \end{cases} \tag{3.10}$$

trong đó $\widetilde{f}(X,s) = f(X,s) + \ell s$. Do $w(t)$ không thuộc vào không gian $W := S^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, nên ta không thể chọn $w(t)$ là hàm thử như trong [4].

Ta sẽ sử dụng kĩ thuật trong [32] để chứng minh. Xét $B_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm cắt được xác định như sau:

$$B_k(s) = \begin{cases} k & \text{if } s > k, \\ s & \text{if } |s| \le k, \\ -k & \text{if } s < -k. \end{cases}$$

Xét ánh xạ Nemytskii $\widehat{B}_k : W \to W$ xác định bởi

$$\widehat{B}_k(w)(x) = B_k(w(x)) \quad \text{với mọi } x \in \mathbb{R}^N.$$

Từ Bổ đề 2.3 trong [32], ta có $\|\widehat{B}_k(w) - w\|_W \to 0$ khi $k \to \infty$. Nhân phương trình đầu của bài toán (3.10) với $\widehat{B}_k(w)$, rồi lấy tích phân trên $\mathbb{R}^N \times (\varepsilon, t)$,với $t \in (0, T)$, ta được

$$
\begin{aligned}
&\int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{d\tau}\Big(w(s)\widehat{B}_k(w)(\tau)\Big)dxd\tau - \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} w\frac{d}{d\tau}\Big(\widehat{B}_k(w)(\tau)\Big)dxd\tau \\
&+ \frac{1}{2}\int_\varepsilon^t \int_{\{x\in\mathbb{R}^N:|w(x,\tau)|\le k\}} |\nabla_{s,\gamma} w|^2 dxd\tau + \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \Big(\widetilde{f}(X,u) - \widetilde{f}(X,v)\Big)\widehat{B}_k(w)dxd\tau \\
&- \ell\int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} w\widehat{B}_k(w)dxd\tau + \lambda\int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} w\widehat{B}_k(w)dxd\tau = 0.
\end{aligned}
$$

Do $w\frac{d}{dt}(\widehat{B}_k(w)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\widehat{B}_k(w))^2$, ta có

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} w(t)\widehat{B}_k(w)(t)dx - \frac{1}{2}\|\widehat{B}_k(w)(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&+ \frac{1}{2}\int_\varepsilon^t \int_{\{x\in\mathbb{R}^N:|w(x,\tau)|\le k\}} |\nabla_{s,\gamma} w|^2 dxd\tau + \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{f}'(X,\xi)w\widehat{B}_k(w)dxd\tau \\
=&\int_{\mathbb{R}^N} w(\varepsilon)\widehat{B}_k(w)(\varepsilon)dx - \frac{1}{2}\|\widehat{B}_k(w)(\varepsilon)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (\ell - \lambda)\int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^N} w\widehat{B}_k(w)dxd\tau.
\end{aligned}
$$

Chú ý rằng $\widetilde{f}'(X,s) \ge 0$ và $sB_k(s) \ge 0$ với mọi $s \in \mathbb{R}$, cho $\varepsilon \to 0$ và $k \to \infty$ trong đẳng thức trên, ta được

$$
\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le \|w(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (2\ell - \lambda)\int_0^t \|w(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}d\tau.
$$

Do đó, áp dụng bất đẳng thức Gronwall dạng tích phân, ta có

$$
\begin{aligned}
\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\le \|w(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}e^{(2\ell-\lambda)t} \\
&\le \|w(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}e^{(2\ell-\lambda)T} \text{ với mọi } t \in [0, T].
\end{aligned}
$$

Vì vậy, nghiệm phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu, đặc biệt, nghiệm là duy nhất khi $u_0 = v_0$. □

3.3. Sự tồn tại của tập hút toàn cục

Từ Định lí 3.1, ta có thể xác định một nửa nhóm liên tục $S(t) : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ liên kết với bài toán (3.1) như sau

$$S(t)u_0 := u(t),$$

trong đó $u(\cdot)$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (3.1) với điều kiện ban đầu u_0. Chúng ta sẽ chứng minh nửa nhóm $S(t)$ có tập hút toàn cục $\mathscr{A}$ trong không gian $L^2(\mathbb{R}^N)$ và $S^1(\mathbb{R}^N)$.

3.3.1. Sự tồn tại các tập hấp thụ bị chặn

Bổ đề 3.1. *Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ có một tập hấp thụ bị chặn trong $L^2(\mathbb{R}^N)$.*

Chứng minh. Nhân phương trình đầu của (3.1) với u, ta có

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{s,\gamma} u|^2 dX + \int_{\mathbb{R}^N} f(X,u)u dX + \lambda \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} gu dX. \tag{3.11}$$

Sử dụng (3.3), ta được

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{s,\gamma} u|^2 dX + 2(\lambda-\mu)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\leq 2\int_{\mathbb{R}^N} gu dX + C \\ \leq (\lambda-\mu)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{\lambda-\mu}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + C.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Do đó, ta có

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + (\lambda-\mu)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{\lambda-\mu}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + C.$$

Do đó, từ bất đẳng thức Gronwall, ta được

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|u(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} e^{-(\lambda-\mu)t} + R_1,$$

trong đó $R_1 = R_1(\lambda, \mu, C, \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)})$. Do đó, chọn $\rho_1 = 2R_1$, ta có

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_1, \tag{3.13}$$

với mọi $t \geq T_1 = T(B)$. Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 3.2. *Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ có một tập hấp thụ bị chặn trong $S^1(\mathbb{R}^N)$.*

Chứng minh. Từ (3.12), ta có

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{s,\gamma} u|^2 dX \leq \frac{1}{\lambda - \mu}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + C.$$

Lấy tích phân trên khoảng $(t, t+1)$ và sử dụng Bổ đề 3.1, ta được

$$\int_t^{t+1} \|\nabla_{s,\gamma} u(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} d\tau \leq \rho_2 = \rho_2(C, \rho_1, \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}), \tag{3.14}$$

với mọi $t \geq T_1$. Nhân (3.1) với $-P_{s,\gamma}u$ và lấy tích phân trên $\mathbb{R}^N$, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_{s,\gamma} u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|P_{s,\gamma} u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
=& -\int_{\mathbb{R}^N} f'(X,u)|\nabla_{s,\gamma} u|^2 dX - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{s,\gamma} u|^2 dX - \int_{\mathbb{R}^N} g P_{s,\gamma} u dX \\
\leq& \ell\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{s,\gamma} u|^2 dX - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{s,\gamma} u|^2 dX + \frac{1}{2}\|P_{s,\gamma} u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\frac{d}{dt}\|\nabla_{s,\gamma} u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq 4\ell\|\nabla_{s,\gamma} u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.15}$$

Kết hợp (3.14),(3.15) và sử dụng bất đẳng thức Gronwall đều, ta có

$$\|\nabla_{s,\gamma} u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_2 \text{ với mọi } t \geq T_2 = T_1 + 1. \tag{3.16}$$

Từ (3.13) và (3.16), ta có điều phải chứng minh. □

Bổ đề 3.3. *Giả sử các điều kiện* $(\mathbf{F})-(\mathbf{G})$ *thỏa mãn. Khi đó, với mọi tập con bị chặn B trong $L^2(\mathbb{R}^N)$, tồn tại hằng số $T = T(B) > 0$ sao cho*

$$\|u_t(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_3 \ \textit{ với mọi } \ u_0 \in B, \textit{ và } \tau \geq T,$$

trong đó $u_t(\tau) = \dfrac{d}{dt}(S(t)u_0)|_{t=\tau}$ *và ρ_3 là hằng số dương không phụ thuộc vào B.*

Chứng minh. Lấy đạo hàm (3.1) theo thời gian, ta được

$$u_{tt} - P_{s,\gamma} u_t + f'_u(X,u)u_t + \lambda u_t = 0.$$

Nhân vô hướng đẳng thức trên với u_t trong $L^2(\mathbb{R}^N)$ và sử dụng giả thiết (3.2), ta suy ra

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \tag{3.17}$$

Nhân phương trình đầu của (3.1) với u_t, ta được

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\nabla_{s,\gamma}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} F(X,u)dX - \int_{\mathbb{R}^N} gudX\right)\\ &= -\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq 0.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Mặt khác, lấy tích phân (3.11) từ t tới $t+1$ và sử dụng (3.13), ta có

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+1}\left[\|\nabla_{s,\gamma}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \lambda\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} f(X,u)udX - \int_{\mathbb{R}^N} gudX\right]d\tau\\ &\leq \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_1,\end{aligned}$$

với mọi $t \geq T_1$. Mặt khác, sử dụng kiều kiện (3.4) và ước lượng (3.13), ta có

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+1}\left[\|\nabla_{s,\gamma}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \lambda\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} f(X,u)udX - \int_{\mathbb{R}^N} gudX\right]d\tau\\ &\geq \int_t^{t+1}\left[\|\nabla_{s,\gamma}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \lambda\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} F(X,u)dX\right.\\ &\qquad\qquad \left. - \frac{\ell}{2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \int_{\mathbb{R}^N} gudX\right]d\tau\\ &\geq \int_t^{t+1}\left[\frac{1}{2}\|\nabla_{s,\gamma}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} F(X,u)dX - \int_{\mathbb{R}^N} gudX\right]d\tau - \frac{\ell}{2}\rho_1,\end{aligned}$$

với mọi $t \geq T_1$. Do đó,

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+1}\left[\frac{1}{2}\|\nabla_{s,\gamma}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} F(X,u)dX - \int_{\mathbb{R}^N} gudX\right]d\tau\\ &\leq (1+\frac{\ell}{2})\rho_1, \quad \text{với mọi } t \geq T_1.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall đều, từ (3.18) và (3.19), ta được

$$\frac{1}{2}\|\nabla_{s,\gamma}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} F(X,u)dX - \int_{\mathbb{R}^N} gudX \leq \rho_3, \tag{3.20}$$

với mọi $t \geq T_2 = T_1 + 1$. Lấy tích phân (3.18) từ t đến $t+1$ và sử dụng (3.20), ta có

$$\int_t^{t+1} \|u_t(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} d\tau \leq \rho_3, \quad \text{với mọi } t \geq T_2. \tag{3.21}$$

Kết hợp (3.17) với (3.21) và áp dụng bất đẳng thức Gronwall đều, ta được

$$\|u_t(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_3,$$

với mọi $\tau \geq T_3 = T_2 + 1$. Bổ đề được chứng minh. □

Bây giờ, ta sẽ chỉ ra sự tồn tại tập hấp thụ bị chặn trong $S^2(\mathbb{R}^N)$.

Bổ đề 3.4. *Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ có một tập hấp thụ bị chặn trong $S^2(\mathbb{R}^N)$, nghĩa là, tồn tại hằng số $\rho_4 > 0$ sao cho với mọi tập bị chặn $B \subset L^2(\mathbb{R}^N)$, tồn tại $T_B > 0$ thỏa mãn*

$$\|P_{s,\gamma}u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_4, \;\; \textit{với mọi } t \geq T_B, u_0 \in B.$$

Chứng minh. Nhân vô hướng phương trình đầu của (3.1) với $-P_{s,\gamma}u + \lambda u$ trong $L^2(\mathbb{R}^N)$, ta có

$$\begin{aligned}
&\|P_{s,\gamma}u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \lambda^2\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} f(X,u)udX \\
&\leq 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} uP_{s,\gamma}udX - \int_{\mathbb{R}^N} u_t(-P_{s,\gamma}u + \lambda u)dX + \int_{\mathbb{R}^N} f(X,u)P_{s,\gamma}udX \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} g(-P_{s,\gamma}u + \lambda u)dX.
\end{aligned}$$

Sử dụng (3.3) và lấy tích phân từng phần số hạng thứ ba bên vế phải của bất đẳng thức trên, ta được

$$\begin{aligned}
&\|P_{s,\gamma}u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \lambda^2\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \lambda\mu\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq 2\lambda \int_{\mathbb{R}^N} uP_{s,\gamma}udX - \int_{\mathbb{R}^N} u_t(-P_{s,\gamma}u + \lambda u)dX \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} f'_u(X,u)(|\nabla_x u|^2 + |\nabla_y u|^2 + |x|^{2s}|y|^{2\gamma}|\nabla_z u|^2)dX
\end{aligned}$$

$$+\int_{\mathbb{R}^N} g(-P_{s,\gamma}u+\lambda u)dX+\lambda\int_{\mathbb{R}^N} C_1(X)dX.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và giả thiết (3.2), ta có

$$\|P_{s,\gamma}u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\le C(1+\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\|u\|^2_{S^1(\mathbb{R}^N)}+\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}).$$

Từ Bổ đề 3.1 và Bổ đề 3.3, tồn tại $\rho_4>0$ sao cho

$$\|P_{s,\gamma}u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\le \rho_4,$$

với mọi t đủ lớn. Ta có điều phải chứng minh. □

Tiếp theo, để chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục trong $L^2(\mathbb{R}^N)$ và $S^1(\mathbb{R}^N)$, ta sẽ sử dụng ba hàm thử $\varphi_R,\theta_R,\gamma_R$ thỏa mãn

$$\varphi_R=\varphi\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right),\theta_R=\theta\left(\frac{|y|^2}{R^2}\right),\gamma_R=\gamma\left(\frac{|z|^2}{R^{2(1+s+\gamma)}}\right)$$

với $\varphi,\theta,\gamma\in C^\infty[0,+\infty), 0\le\varphi,\theta,\gamma\le 1,\ \varphi,\theta,\gamma=0$ trong $[0,\frac{1}{2}]$, và $\varphi,\theta,\gamma=1$ trong $[1,+\infty)$. Khi đó tồn tại hằng số $C>0$ sao cho $|\varphi'(\cdot)|,|\theta'(\cdot)|,|\gamma'(\cdot)|\le C$.

Ngoài ra, ta đặt

$$B_R^*=B_{\mathbb{R}^{N_1}}(0,R)\times B_{\mathbb{R}^{N_2}}(0,R)\times B_{\mathbb{R}^{N_3}}(0,R^{1+s+\gamma})$$

và

$$\Sigma_R=\mathbb{R}^N\backslash\big(B_{\mathbb{R}^{N_1}}(0,R/2)\times B_{\mathbb{R}^{N_2}}(0,R/2)\times B_{\mathbb{R}^{N_3}}(0,R^{1+s+\gamma}/2)\big).$$

Trong Chương này, chúng tôi xét bài toán trên toàn không gian $\mathbb{R}^N, N\ge 2$. Khi đó nửa nhóm $S(t)$ không còn là nửa nhóm compact như ở Chương 2, do đó để chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục trong $L^2(\mathbb{R}^N)$ chúng tôi sử dụng phương pháp đáng giá phần đuôi của nghiệm do B. Wang đưa ra (xem [66]).

3.3.2. Sự tồn tại tập hút toàn cục trong $L^2(\mathbb{R}^N)$

Bổ đề 3.5. *Giả sử các điều kiện* **(F) - (G)** *được thỏa mãn. Khi đó, với mọi $\epsilon>0$ và mọi tập bị chặn $B\subset L^2(\mathbb{R}^N)$, tồn tại $T=T(\epsilon,B)>0$ và $K=K(\epsilon,B)>0$ sao cho $t\ge T$ và $R\ge K$,*

$$\int_{\mathbb{R}^N\backslash B_R^*}|u(X,t)|^2dX\le\epsilon.$$

Chứng minh. Nhân vô hướng (3.1) với $(\varphi_R\theta_R\gamma_R)u$ trong $L^2(\mathbb{R}^N)$, ta được

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|u|^2dX-\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)uP_{s,\gamma}udX+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|u|^2dX$$
$$+\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)f(X,u)udX=\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)ugdX.$$

Sử dụng (3.2) và (3.3), ta có

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|u|^2dX+(\lambda-\mu)\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|u|^2dX$$
$$\leq\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)uP_{s,\gamma}udX+\int_{\Sigma_R}|C_1(X)|dX+\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)ugdX. \quad (3.22)$$

Mặt khác, ta có

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)uP_{s,\gamma}udX\leq\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^2+|P_{s,\gamma}u|^2)dX, \quad (3.23)$$

và

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)ugdX=\int_{\Sigma_R}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)ugdX$$
$$\leq\frac{\lambda-\mu}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|u|^2dX+\frac{1}{2(\lambda-\mu)}\int_{\Sigma_R}|g|^2dX. \quad (3.24)$$

Kết hợp (3.23),(3.24) với (3.22), ta suy ra

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|u|^2dX+(\lambda-\mu)\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|u|^2dX$$
$$\leq 2\int_{\Sigma_R}|C_1(X)|dX+\frac{1}{\lambda-\mu}\int_{\Sigma_R}|g|^2dX+\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^2+|P_{s,\gamma}u|^2)dX. \quad (3.25)$$

Nhân (3.25) với $e^{(\lambda-\mu)t}$ và lấy tích phân trên (T,t), ta thu được

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|u(t)|^2dX\leq e^{-(\lambda-\mu)(t-T)}\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|u(T)|^2dX$$
$$+2e^{-(\lambda-\mu)t}\int_T^t e^{(\lambda-\mu)\xi}\int_{\Sigma_R}|C_1(X)|dXd\xi$$
$$+\frac{1}{\lambda-\mu}e^{-(\lambda-\mu)t}\int_T^t e^{(\lambda-\mu)\xi}\int_{\Sigma_R}|g|^2dXd\xi$$

$$
\begin{aligned}
&+ e^{-(\lambda-\mu)t}\int_T^t e^{(\lambda-\mu)\xi}\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^2+|P_{s,\gamma}u|^2)dXd\xi\\
\leq & e^{-(\lambda-\mu)(t-T)}\|u(T)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\frac{2}{\lambda-\mu}\int_{\Sigma_R}|C_1(X)|dX+\frac{1}{(\lambda-\mu)^2}\int_{\Sigma_R}|g|^2dX\\
&+ e^{-(\lambda-\mu)t}\int_T^t e^{(\lambda-\mu)\xi}\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^2+|P_{s,\gamma}u|^2)dXd\xi. \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

Ta lưu ý rằng, cho trước $\epsilon > 0$, tồn tại $T_1 = T_1(\epsilon) > 0$ sao cho với mọi $t \geq T_1$,

$$
e^{-(\lambda-\mu)(t-T)}\|u(T_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon}{4}. \qquad (3.27)
$$

Do $C_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, tồn tại $K_1 = K_1(\epsilon) > 0$ sao cho với mọi $R \geq K_1$,

$$
\frac{2}{\lambda-\mu}\int_{\Sigma_R}|C_1(X)|dX \leq \frac{\epsilon}{4}. \qquad (3.28)
$$

Mặt khác, do $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, tồn tại $K_2 = K_2(\epsilon) > K_1$ sao cho với mọi $R \geq K_2$,

$$
\frac{1}{(\lambda-\mu)^2}\int_{\Sigma_R}|g|^2dX \leq \frac{\epsilon}{4}. \qquad (3.29)
$$

Đối với số hạng cuối ở bên vế phải của (3.26), từ Bổ đề 3.4 , tồn tại $T_2 > 0$ sao cho với mọi $\xi \geq T_2$, ta được

$$
\int_{\mathbb{R}^N}(|u(X,\xi)|^2+|P_{s,\gamma}u(X,\xi)|^2)dX \leq \rho_4. \qquad (3.30)
$$

Do đó, tồn tại $K_3 = K_3(\epsilon) > K_2$ sao cho với mọi $R \geq K_3$ và $t \geq T_2$,

$$
e^{-(\lambda-\mu)t}\int_{T_2}^t e^{(\lambda-\mu)\xi}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^2+|P_{s,\gamma}u|^2)dX\Big)d\xi \leq \frac{\epsilon}{4}. \qquad (3.31)
$$

Đặt $T = \max\{T_1, T_2\}$. Sau đó, kết hợp các biểu thức từ (3.26) đến (3.31), ta có

$$
\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|u(X,t)|^2dX \leq \epsilon,
$$

với mọi $R \geq K \geq K_3$ và $t \geq T$. Do đó

$$
\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R^*}|u(X,t)|^2dX \leq \int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|u(X,t)|^2dX \leq \epsilon,
$$

với mọi $R \geq K$ và $t \geq T$. Từ đó, ta có điều phải chứng minh. □

Sử dụng Bổ đề 3.5 ta chứng minh được tính compact tiệm cận của $S(t)$ trong $L^2(\mathbb{R}^N)$ như sau.

Bổ đề 3.6. *Giả sử các điều kiện* **(F) - (G)** *thỏa mãn. Khi đó, nửa nhóm $S(t)$ là compact tiệm cận trong $L^2(\mathbb{R}^N)$, nghĩa là, với mọi dãy bị chặn $\{x_n\} \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ và mọi dãy $t_n \geq 0, t_n \to \infty, \{S(t_n)x_n\}$ có một dãy con hội tụ tương ứng với tôpô của $L^2(\mathbb{R}^N)$.*

Chứng minh. Chúng ta sử dụng ước lượng đều phần đuôi của nghiệm để chứng minh tính compact tương đối của $\{u_n(t_n) := S(t_n)x_n\}$, tức là, chứng minh rằng với mọi $\epsilon > 0$, dãy $\{u_n(t_n)\}$ có một phủ hữu hạn bao gồm các hình cầu bán kính bé hơn ϵ.

Cho $K > 0$, ta kí hiệu

$$B_K^* = B_{\mathbb{R}^{N_1}}(0,K) \times B_{\mathbb{R}^{N_2}}(0,K) \times B_{\mathbb{R}^{N_3}}(0,K^{1+s+\gamma}) \text{ và } B_K^c = \mathbb{R}^N \backslash B_K^*.$$

Khi đó, từ Bổ đề 3.5, với mọi $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại $K = K(\epsilon) > 0$ và $T = T(\epsilon) > 0$ sao cho với $t \geq T$,

$$\|u_n(t)\|_{L^2(B_K^c)} \leq \epsilon.$$

Khi $t_n \to \infty$, tồn tại $N_1 = N_1(\epsilon) > 0$ sao cho $t_n \geq T$ với mọi $n \geq N_1$,

$$\|u_n(t_n)\|_{L^2(B_K^c)} \leq \epsilon. \tag{3.32}$$

Từ Bổ đề 3.2, tồn tại $C > 0$ và $N_2 > 0$ sao cho với mọi $n \geq N_2$,

$$\|u_n(t_n)\|_{S^1(B_K^*)} \leq C.$$

Vì phép nhúng $S^1(B_K^*) \hookrightarrow L^2(B_K^*)$ là compact (xem [63]), nên dãy $\{u_n(t_n)\}$ là compact tương đối trong $L^2(B_K^*)$. Do đó, với $\epsilon > 0$ cho trước, $\{u_n(t_n)\}$ có một phủ hữu hạn các hình cầu bán kính bé hơn ϵ trong $L^2(B_K^*)$, cùng với (3.32) ta chứng minh rằng $\{u_n(t_n)\}$ có một phủ hữu hạn các hình cầu bán kính bé hơn ϵ trong $L^2(\mathbb{R}^N)$. Do đó, $\{u_n(t_n)\}$ là compact tương đối trong $L^2(\mathbb{R}^N)$. □

Bây giờ, ta sẽ chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục trong $L^2(\mathbb{R}^N)$. Kí hiệu

$$B = \left\{u : \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_1\right\},$$

trong đó ρ_1 là hằng số dương trong chứng minh của Bổ đề 3.1. Khi đó, B là một tập hấp thụ bị chặn của $S(t)$ trong $L^2(\mathbb{R}^N)$. Ngoài ra, theo bổ đề 3.6, nửa nhóm $S(t)$ là compact tiệm cận trong $L^2(\mathbb{R}^N)$. Do đó ta chứng minh được Định lí quan trọng sau.

Định lí 3.2. *Giả sử các điều kiện* **(F) - (G)** *thỏa mãn. Khi đó, nửa nhóm* $S(t)$ *sinh bởi bài toán* (3.1) *có một tập hút toàn cục* $\mathscr{A}_{L^2}$ *trong* $L^2(\mathbb{R}^N)$.

3.3.3. Sự tồn tại tập hút toàn cục trong $S^1(\mathbb{R}^N)$

Sử dụng kĩ thuật đánh giá phần đuôi của nghiệm do B. Wang đưa ra trong [66] ta nhân vô hướng (3.1) với $-\theta\left(\frac{|X|^2_{s,\gamma}}{R^2}\right)P_{s,\gamma}u$ trong $L^2(\mathbb{R}^N)$. Tuy nhiên, $|X|_{s,\gamma}$ là chuẩn tương thích với toán tử $P_{s,\gamma}$ (xem [40]) có biểu thức

$$|X|_{s,\gamma} := \left(|x|^{2(1+s)}|y|^{2\gamma} + |x|^{2s}|y|^{2(1+\gamma)} + (1+s+\gamma)^2|z|^2\right)^{\frac{1}{2(1+s+\gamma)}}.$$

Khi đó, sử dụng tích phân từng phần trong quá trình đánh giá sẽ làm xuất hiện các hệ số phức tạp có chứa s và γ, mà ta không thể ước lượng được chúng. Để vượt qua khó khăn đó, chúng tôi đã thay hàm $\theta\left(\frac{|X|^2_{s,\gamma}}{R^2}\right)$ bằng tích của ba hàm $\varphi_R, \theta_R, \gamma_R$ đã được trình bày ở trên. Do đó ta có được kết quả sau.

Bổ đề 3.7. *Giả sử các điều kiện* **(F) - (G)** *thỏa mãn. Khi đó, với mọi* $\epsilon > 0$ *và mọi tập bị chặn* $B \subset L^2(\mathbb{R}^N)$*, tồn tại* $T = T(\epsilon, B) > 0$ *và* $K = K(\epsilon, B) > 0$ *sao cho với mọi* $t \geq T$ *và* $R \geq K$*,*

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R^*} |\nabla_{s,\gamma} u|^2 dX \leq \epsilon.$$

Chứng minh. Nhân vô hướng (3.1) với $-(\varphi_R\theta_R\gamma_R)P_{s,\gamma}u$ trong $L^2(\mathbb{R}^N)$, ta được

$$-\int_{\mathbb{R}^N} u_t(\varphi_R\theta_R\gamma_R)P_{s,\gamma}u dX + \int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|P_{s,\gamma}u|^2 dX - \lambda\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)uP_{s,\gamma}u dX$$
$$-\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)f(X,u)P_{s,\gamma}u dX = -\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)P_{s,\gamma}u g dX.$$

Mặt khác, ta có

$$-\int_{\mathbb{R}^N} u_t(\varphi_R\theta_R\gamma_R)P_{s,\gamma}u dX = \int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)\left(\nabla_{s,\gamma}u_t, \nabla_{s,\gamma}u\right)_{\mathbb{R}^N} dX$$

$$+\int_{\mathbb{R}^N} u_t \Big(\nabla_{s,\gamma}(\varphi_R\theta_R\gamma_R), \nabla_{s,\gamma}u\Big)_{\mathbb{R}^N} dX$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi_R\theta_R\gamma_R)|\nabla_{s,\gamma}u|^2 dX$$

$$+\int_{\mathbb{R}^N} u_t \Big(\nabla_{s,\gamma}(\varphi_R\theta_R\gamma_R), \nabla_{s,\gamma}u\Big)_{\mathbb{R}^N} dX;$$

$$-\lambda\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi_R\theta_R\gamma_R)uP_{s,\gamma}u dX = \lambda\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|\nabla_{s,\gamma}u|^2 dX$$

$$+\lambda\int_{\mathbb{R}^N} u\Big(\nabla_{s,\gamma}(\varphi_R\theta_R\gamma_R), \nabla_{s,\gamma}u\Big)_{\mathbb{R}^N} dX;$$

$$-\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi_R\theta_R\gamma_R)f(X,u)P_{s,\gamma}u dX = \int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)f'_u(X,u)|\nabla_{s,\gamma}u|^2 dX$$

$$+\int_{\mathbb{R}^N} f(X,u)\Big(\nabla_{s,\gamma}(\varphi_R\theta_R\gamma_R), \nabla_{s,\gamma}u\Big)_{\mathbb{R}^N} dX;$$

$$-\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi_R\theta_R\gamma_R)P_{s,\gamma}ug dX = -\int_{\Sigma_R}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)P_{s,\gamma}ug dX$$

$$\le \int_{\Sigma_R}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|P_{s,\gamma}u|^2 dX + \frac{1}{4}\int_{\Sigma_R}|g|^2 dX.$$

Do đó, ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi_R\theta_R\gamma_R)|\nabla_{s,\gamma}u|^2 dX + \int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|P_{s,\gamma}u|^2 dX\\
&+\lambda\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|\nabla_{s,\gamma}u|^2 dX\\
\le & -\int_{\mathbb{R}^N} u_t \Big(\nabla_{s,\gamma}(\varphi_R\theta_R\gamma_R), \nabla_{s,\gamma}u\Big)_{\mathbb{R}^N} dX\\
&-\lambda\int_{\mathbb{R}^N} u\Big(\nabla_{s,\gamma}(\varphi_R\theta_R\gamma_R), \nabla_{s,\gamma}u\Big)_{\mathbb{R}^N} dX + \ell\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|\nabla_{s,\gamma}u|^2 dX\\
&-\int_{\mathbb{R}^N} f(X,u)\Big(\nabla_{s,\gamma}(\varphi_R\theta_R\gamma_R), \nabla_{s,\gamma}u\Big)_{\mathbb{R}^N} dX\\
&+\int_{\Sigma_R}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|P_{s,\gamma}u|^2 dX + \frac{1}{4}\int_{\Sigma_R}|g|^2 dX. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Vì $\varphi'(s), \theta'(s), \gamma'(s) = 0$ với mọi $0 \le s < \frac{1}{2}$ và $s > 1$, ta có

$$
\begin{aligned}
&\left| -\int_{\mathbb{R}^N} u_t \Big(\nabla_{s,\gamma}(\varphi_R \theta_R \gamma_R), \nabla_{s,\gamma} u \Big)_{\mathbb{R}^N} dX \right| \\
\le & \left| \int_{\mathbb{R}^N} u_t \theta_R \gamma_R \Big(\nabla_x u, \nabla_x \varphi_R \Big)_{\mathbb{R}^N} dX \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^N} u_t \varphi_R \gamma_R \Big(\nabla_y u, \nabla_y \theta_R \Big)_{\mathbb{R}^N} dX \right| \\
& + \left| \int_{\mathbb{R}^N} u_t \varphi_R \theta_R |x|^{2s|} |y|^{2\gamma} \Big(\nabla_z u, \nabla_z \gamma_R \Big)_{\mathbb{R}^N} dX \right| \\
\le & \frac{2}{R^2} \left| \int_{\mathbb{R}^N} u_t \theta_R \gamma_R \varphi'(\frac{|x|^2}{R^2})(x \cdot \nabla_x u) dX \right| \\
& + \frac{2}{R^2} \left| \int_{\mathbb{R}^N} u_t \varphi_R \gamma_R \theta'(\frac{|y|^2}{R^2})(y \cdot \nabla_y u) dX \right| \\
& + \frac{2}{R^{2(1+s+\gamma)}} \left| \int_{\mathbb{R}^N} u_t \varphi_R \theta_R \gamma'(\frac{|z|^2}{R^{2(1+s+\gamma)}}) |x|^{2s} |y|^{2\gamma} (z \cdot \nabla_z u) dX \right| \\
\le & \frac{2}{R^2} \left| \int_{B_R^*} u_t \theta_R \gamma_R \varphi'(\frac{|x|^2}{R^2})(x \cdot \nabla_x u) dX \right| \\
& + \frac{2}{R^2} \left| \int_{B_R^*} u_t \varphi_R \gamma_R \theta'(\frac{|y|^2}{R^2})(y \cdot \nabla_y u) dX \right| \\
& + \frac{2}{R^{2(1+s+\gamma)}} \left| \int_{B_R^*} u_t \varphi_R \theta_R \gamma'(\frac{|z|^2}{R^{2(1+s+\gamma)}}) |x|^{2s} |y|^{2\gamma} (z \cdot \nabla_z u) dX \right| \\
\le & \frac{2C}{R^2} \left(\int_{B_R^*} |u_t|^2 dX \right)^{1/2} \left(\int_{B_R^*} |x|^2 |\nabla_x u|^2 dX \right)^{1/2} \\
& + \frac{2C}{R^2} \left(\int_{B_R^*} |u_t|^2 dX \right)^{1/2} \left(\int_{B_R^*} |y|^2 |\nabla_y u|^2 dX \right)^{1/2} \\
& + \frac{2C}{R^{2(1+s+\gamma)}} \left(\int_{B_R^*} |u_t|^2 dX \right)^{1/2} \left(\int_{B_R^*} |x|^{4s} |y|^{4\gamma} |z|^2 |\nabla_z u|^2 dX \right)^{1/2} \\
\le & \frac{2C}{R} \left(\int_{B_R^*} |u_t|^2 dX \right)^{1/2} \left(\int_{B_R^*} |\nabla_x u|^2 dX \right)^{1/2} \\
& + \frac{2C}{R} \left(\int_{B_R^*} |u_t|^2 dX \right)^{1/2} \left(\int_{B_R^*} |\nabla_y u|^2 dX \right)^{1/2} \\
& + \frac{2C}{R} \left(\int_{B_R^*} |u_t|^2 dX \right)^{1/2} \left(\int_{B_R^*} |x|^{2s} |y|^{2\gamma} \nabla_z u|^2 dX \right)^{1/2} \\
\le & \frac{2C}{R} \left[\frac{1}{2} \|u_t\|^2_{L^2(B_R^*)} + \frac{1}{2} \int_{B_R^*} |\nabla_x u|^2 dX \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2C}{R}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(B_R^*)}+\frac{1}{2}\int_{B_R^*}|\nabla_y u|^2 dX\right]\\
&+\frac{2C}{R}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(B_R^*)}+\frac{1}{2}\int_{B_R^*}|x|^{2s}|y|^{2\gamma}|\nabla_z u|^2 dX\right]\\
\leq&\frac{3C}{R}\|u_t\|^2_{L^2(B_R^*)}+\frac{C}{R}\int_{B_R^*}|\nabla_{s,\gamma}u|^2 dX\\
\leq&\frac{3C}{R}\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_{s,\gamma}u|^2 dX.
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Đánh giá tương tự (3.34), ta có

$$
\begin{aligned}
\left|-\lambda\int_{\mathbb{R}^N}u\Big(\nabla_{s,\gamma}(\varphi_R\theta_R\gamma_R),\nabla_{s,\gamma}u\Big)_{\mathbb{R}^N}dX\right|\leq&\frac{3\lambda C}{R}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\
&+\frac{\lambda C}{R}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_{s,\gamma}u|^2 dX,
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

và

$$
\begin{aligned}
\left|-\int_{\mathbb{R}^N}f(X,u)\Big(\nabla_{s,\gamma}(\varphi_R\theta_R\gamma_R),\nabla_{s,\gamma}u\Big)_{\mathbb{R}^N}dX\right|\leq&\frac{3C}{R}\|f(X,u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\
&+\frac{C}{R}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_{s,\gamma}u|^2 dX.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Kết hợp các bất đẳng thức từ (3.33) đến (3.36),ta suy ra

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|\nabla_{s,\gamma}u|^2 dX+2\lambda\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|\nabla_{s,\gamma}u|^2 dX\\
\leq&\frac{1}{2}\int_{\Sigma_R}|g|^2 dX+2\ell\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_{s,\gamma}u|^2 dX+\frac{6C}{R}\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\
&+\frac{6\lambda C}{R}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\frac{6C}{R}\|f(X,u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+2\frac{(2+\lambda)C}{R}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_{s,\gamma}u|^2 dX\\
\leq&\frac{1}{2}\int_{\Sigma_R}|g|^2 dX+\frac{6C}{R}\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\frac{6C}{R}\|f(X,u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\
&+C_1\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^2+|\nabla_{s,\gamma}u|^2)dX,
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

trong đó $C_1=\max\{\frac{6\lambda C}{R};2\ell+2\frac{(2+\lambda)C}{R}\}$. Nhân (3.37) với $e^{2\lambda t}$ và lấy tích phân trên (T,t), ta thu được

$$
\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|\nabla_{s,\gamma}u|^2 dX
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq e^{-2\lambda t}\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|\nabla_{s,\gamma}u(T)|^2dX+\frac{1}{2}e^{-2\lambda t}\int_T^t e^{2\lambda\xi}\int_{\Sigma_R}|g|^2dXd\xi\\
&\quad+\frac{6C}{R}e^{-2\lambda t}\int_T^t e^{2\lambda\xi}\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}d\xi+\frac{6C}{R}e^{-2\lambda t}\int_T^t e^{2\lambda\xi}\|f(X,u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}d\xi\\
&\quad+C_1e^{-2\lambda t}\int_T^t e^{2\lambda\xi}\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^2+|\nabla_{s,\gamma}u|^2)dXd\xi\\
&\leq e^{-2\lambda t}\|u(T)\|^2_{S^1(\mathbb{R}^N)}+\frac{1}{4\lambda}\int_{\Sigma_R}|g|^2dX\\
&\quad+\frac{6C}{R}e^{-2\lambda t}\int_T^t e^{2\lambda\xi}\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}d\xi+\frac{6C}{R}e^{-2\lambda t}\int_T^t e^{2\lambda\xi}\|f(X,u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}d\xi\\
&\quad+C_1e^{-2\lambda t}\int_T^t e^{2\lambda\xi}\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^2+|\nabla_{s,\gamma}u|^2)dXd\xi. \qquad (3.38)
\end{aligned}
$$

Chú ý rằng với $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại $T_1 = T_1(\epsilon) > 0$ sao cho với mọi $t \geq T_1$,

$$e^{-2\lambda t}\|u(T_1)\|^2_{S^1(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{\epsilon}{5}. \qquad (3.39)$$

Mặt khác, từ $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, tồn tại $K_1 = K_1(\epsilon)$ sao cho với mọi $R \geq K_1$,

$$\frac{1}{4\lambda}\int_{\Sigma_R}|g|^2dX \leq \frac{\epsilon}{5}. \qquad (3.40)$$

Đối với số hạng thứ ba và thứ năm ở vế phải của (3.38), từ Bổ đề 3.1, 3.2 và 3.3 tồn tại $K_2 = K_2(\epsilon) \geq K_1$ sao cho với mọi $R \geq K_2$ và mọi $t \geq T_2 > 0$, ta có

$$C_1e^{-2\lambda t}\int_{T_2}^t e^{2\lambda\xi}\int_{\mathbb{R}^N}(|u|^2+|\nabla_{s,\gamma}u|^2)dXd\xi \leq \frac{\epsilon}{5}, \qquad (3.41)$$

$$\frac{6C}{R}e^{-2\lambda t}\int_{T_2}^t e^{2\lambda\xi}\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}d\xi \leq \frac{\epsilon}{5}. \qquad (3.42)$$

Mặt khác, từ (3.1) ta có $f(X,u) = -u_t + P_{s,\gamma}u - \lambda u + g$. Sử dụng các Bổ đề 3.3 và 3.4, ta được $f(X,u(t)) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ với t đủ lớn. Do đó, tồn tại $K_3 = K_3(\epsilon) \geq K_2$ sao cho với mọi $R \geq K_3$ và mọi $t \geq T_3 > 0$, ta có

$$\frac{6C}{R}e^{-2\lambda t}\int_{T_3}^t e^{2\lambda\xi}\int_{\mathbb{R}^N}|f(X,u)|^2dXd\xi \leq \frac{\epsilon}{5}. \qquad (3.43)$$

Đặt $T = \max\{T_1, T_2, T_3\}$. Khi đó, từ (3.38) đến (3.43), ta có

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\varphi_R\theta_R\gamma_R)|\nabla_{s,\gamma}u|^2dX \leq \epsilon,$$

với mọi $R \geq K \geq K_3$ và $t \geq T$. Do đó

$$\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R^*} |\nabla_{s,\gamma} u|^2 dX \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi_R \theta_R \gamma_R) |\nabla_{s,\gamma} u|^2 dX \leq \epsilon,$$

với mọi $R \geq K$ và $t \geq T$. Khi đó, ta suy ra điều phải chứng minh. □

Tiếp theo, ta chứng minh tính compact tiệm cận của nửa nhóm $S(t)$ trong $S^1(\mathbb{R}^N)$.

Bổ đề 3.8. *Giả sử các điều kiện* **(F) - (G)** *thỏa mãn. Khi đó, $S(t)$ là compact tiệm cận trong $S^1(\mathbb{R}^N)$, nghĩa là, với mọi dãy bị chặn $\{x_n\} \subset S^1(\mathbb{R}^N)$ và dãy $t_n \geq 0, t_n \to \infty, \{S(t_n)x_n\}$ có một dãy con hội tụ tương ứng với tôpô của $S^1(\mathbb{R}^N)$.*

Chứng minh. Tương tự Bổ đề 3.6, với $K > 0$ cho trước, kí hiệu

$$B_K^* = B_{\mathbb{R}^{N_1}}(0,K) \times B_{\mathbb{R}^{N_2}}(0,K) \times B_{\mathbb{R}^{N_3}}(0,K^{1+s+\gamma}) \text{ và } B_K^c = \mathbb{R}^N \backslash B_K^*.$$

Khi đó, từ Bổ đề 3.5 và 3.7, với $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại $K = K(\epsilon) > 0$ và $T = T(\epsilon) > 0$ sao cho với $t \geq T$,

$$\|u_n(t)\|_{S^1(B_K^c)} \leq \epsilon.$$

Khi $t_n \to \infty$, tồn tại $N_1 = N_1(\epsilon) > 0$ sao cho $t_n \geq T$ với mọi $n \geq N_1$,

$$\|u_n(t_n)\|_{S^1(B_K^c)} \leq \epsilon. \tag{3.44}$$

Theo Bổ đề 3.4, tồn tại $C > 0$ và $N_2 > 0$ sao cho với mọi $n \geq N_2$,

$$\|u_n(t_n)\|_{S^2(B_K^*)} \leq C.$$

Vì phép nhúng $S^2(B_K^*) \hookrightarrow S^1(B_K^*)$ là compact (xem [8]), nên dãy $\{u_n(t_n)\}$ là compact tương đối trong $S^1(B_K^*)$. Do đó, với $\epsilon > 0$ cho trước, $\{u_n(t_n)\}$ có một phủ hữu hạn các hình cầu bán kính bé hơn ϵ trong $S^1(B_K^*)$. Cùng với (3.44) ta chứng minh rằng $\{u_n(t_n)\}$ có một phủ hữu hạn các hình cầu bán kính bé hơn ϵ trong $S^1(\mathbb{R}^N)$. Do đó, $\{u_n(t_n)\}$ là compact tương đối trong $S^1(\mathbb{R}^N)$. □

Bây giờ, áp dụng Định lí 1.1 ở chương 1 ta chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục của nửa nhóm $S(t)$ trong $S^1(\mathbb{R}^N)$.

Định lí 3.3. *Giả sử các điều kiện* **(F) - (G)** *thỏa mãn. Khi đó, nửa nhóm* $S(t)$ *sinh bởi bài toán* (3.1) *có một tập hút toàn cục* $\mathscr{A}_{S^1}$ *trong* $S^1(\mathbb{R}^N)$.

Chứng minh. Kí hiệu

$$B = \left\{ u : \|u\|_{S^1(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_2 \right\},$$

trong đó ρ_2 là hằng số dương trong chứng minh của Bổ đề 3.2. Khi đó, B là một tập hấp thụ bị chặn của nửa nhóm $S(t)$ trong $S^1(\mathbb{R}^N)$. Ngoài ra, theo Bổ đề 3.8, nửa nhóm $S(t)$ là compact tiệm cận trong $S^1(\mathbb{R}^N)$. Do đó, ta thu được kết quả cần chứng minh. □

Chú ý cuối chương. Trước khi kết thúc chương này, chúng tôi đưa ra một số bình luận về những điểm mới chính của Chương 3. Cụ thể:

- Lớp phi tuyến $f(X,u)$ nghiên cứu trong Chương 3 đã loại bỏ giả thiết về điều kiện chặn trên được nghiên cứu trong nhiều công trình thời gian qua (xem [3, 4, 9, 38, 39, 44, 61, 64] với miền bị chặn và [1, 8] với miền không bị chặn). Đặc biệt, lớp phi tuyến này chứa cả lớp phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng tiêu hao kiểu Sobolev; tăng trưởng tiêu hao kiểu đa thức, và thậm chí thỏa mãn cả điều kiện tăng trưởng kiểu mũ $f(X,u) = e^u$.

- Các kết quả trong chương này vẫn còn đúng khi thay $\mathbb{R}^N$ bởi một miền không bị chặn Ω tùy ý (khi đó ta cần bổ sung điều kiện biên Dirichlet thuần nhất trên $\partial\Omega$). Điểm khác biệt cơ bản của bài toán trong chương này với bài toán trong Chương 2 là các phép nhúng không còn compact (do đó nửa nhóm $S(t)$ sinh bởi bài toán không còn compact) và điều này gây ra những khó khăn rất lớn khi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và sự tồn tại tập hút toàn cục. Để vượt qua những khó khăn này, chúng tôi đã dùng Bổ đề compact Aubin-Lions-Simon khi chứng minh sự tồn tại nghiệm, và kết hợp phương pháp đánh giá phần đuôi của nghiệm do B. Wang đưa ra trong [66] với phương pháp đánh giá tiên nghiệm tiệm cận để chứng minh tính compact tiệm cận của nửa nhóm $S(t)$ trong $L^2(\mathbb{R}^N)$ và $S^1(\mathbb{R}^N)$.

Cụ thể, một trong các điểm kĩ thuật là chọn ba hàm φ_R, θ_R và γ_R giúp ta vượt qua khó khăn khi đáng giá phần đuôi của nghiệm.

Kết luận Chương 3

Trong chương này chúng tôi đã chứng minh được sự tồn tại và duy nhất của nghiệm yếu, sự tồn tại tập hút toàn cục trong các không gian $L^2(\mathbb{R}^N)$ và $S^1(\mathbb{R}^N)$ đối với nửa nhóm sinh ra từ bài toán (3.1). Đầu tiên, bằng việc sử dụng phương pháp Galerkin, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu toàn cục và sau đó xây dựng được nửa nhóm gắn với bài toán (3.1). Tiếp theo, để chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục, chúng tôi đã sử dụng phương pháp đánh giá phần đuôi của nghiệm do B. Wang đưa ra năm 1999 và kết hợp với phương pháp đánh giá tiên nghiệm tiệm cận.

Chương 4

TÍNH ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC CỦA LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC SUY BIẾN MẠNH

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu tính điều khiển được về 0 của phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trong trường hợp nhiều chiều. Đầu tiên, chúng tôi đặt bài toán và phát biểu kết quả chính của chương. Sau đó, chúng tôi đi chứng minh các kết quả bổ trợ bao gồm: tính đặt đúng của bài toán, khai triển Fourier, đánh giá tốc độ tán xạ, và đặc biệt là việc thiết lập bất đẳng thức Carleman mới. Tiếp theo, sử dụng phương pháp HUM, khai triển Fourier, các đánh giá về tốc độ tán xạ và bất đẳng thức Carleman mới vừa thiết lập, việc chứng minh tính điều khiển được đưa về tính quan sát được đều đối với tần số của hệ số Fourier của hệ liên hợp sau khi đã biến đổi Fourier. Tính không điều khiển được về 0 trong trường hợp suy biến quá mạnh được chứng minh trong phần cuối của chương.

Nội dung của chương này dựa trên công trình [CT3] trong Danh mục công trình khoa học liên quan đến luận án.

4.1. Đặt bài toán và phát biểu kết quả chính

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu tính điều khiển được về 0 của lớp phương trình parabolic tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ sau:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u - \Delta_y u - |x|^{2s}|y|^{2\gamma}\Delta_z u = v(x,y,z,t)1_\omega, & (x,y,z,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u = 0, & (x,y,z,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z), & (x,y,z) \in \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

trong đó $\Omega := \Omega_{12} \times \Omega_3$, Ω_{12} miền con trơn, mở, bị chặn của $\mathbb{R}^{N_1+N_2}$ sao cho $(0_{\mathbb{R}^{N_1}}, 0_{\mathbb{R}^{N_2}}) \in \Omega_{12}$, Ω_3 là miền con trơn, mở, bị chặn của $\mathbb{R}^{N_3}$; $(x,y,z) =$

$(x_1, \ldots, x_{N_1}, y_1, \ldots, y_{N_2}, z_1, \ldots, z_{N_3}) \in \mathbb{R}^{N_1+N_2} \times \mathbb{R}^{N_3}$; $\omega \subset \Omega$ và $s, \gamma \geq 0, s+\gamma > 0$; 1_ω là hàm đặc trưng của tập con mở khác rỗng ω của Ω. Toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}u = \Delta_x u + \Delta_y u + |x|^{2s}|y|^{2\gamma}\Delta_z u$ đã được giới thiệu trong Chương 1.

Ta nói rằng bài toán (4.1) là điều khiển được về 0 (tại thời điểm T) nếu với mỗi $u_0 \in L^2(\Omega)$ cho trước, tồn tại điều khiển $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ sao cho nghiệm $u(x,y,z,t)$ của bài toán (4.1) thỏa mãn $u(\cdot,\cdot,\cdot,T) = 0$.

Mục tiêu chính của chương này là chứng minh kết quả sau.

Định lí 4.1. *Cho $\omega = \omega_{12} \times \Omega_3$, trong đó ω_{12} là tập con mở khác rỗng của Ω_{12}.*

(1) Nếu $s+\gamma \in (0, 1/2)$ thì bài toán (4.1) điều khiển được về 0 với mọi thời gian $T > 0$.

(2) Nếu $s = \gamma = 1/2$ thì tồn tại $T^* > 0$ thỏa mãn bài toán (4.1) là điều khiển được về 0 với thời gian $T \geq T^*$.

(3) Nếu $s+\gamma > 1$ thì bài toán (4.1) không điều khiển được về 0.

Tính điều khiển được về 0 của phương trình parabolic chứa toán tử suy biến Grushin đã được nghiên cứu gần đây bởi Beauchard, Cannarsa và Guglielmi [13] trong trường hợp hai chiều với miền $\Omega = (-1;1) \times (0,1)$. Trong đó, tính điều khiển được liên kết chặt chẽ với tính quan sát được một chiều của các hệ số Fourier của hệ liên hợp. Ngoài ra, tính điều khiển được về 0 của bài toán trên cũng được nghiên cứu trong trường hợp hình hộp nhiều chiều $\Omega = (-1;1)^{N_1} \times (0;1)^{N_2}$ bởi các công trình của các tác giả C. T. Anh và V. M. Toi [5] và Beachard, Cannarsa và Yamamoto [14]. Khi đó, các tác giả phải sử dụng lí thuyết chuỗi Fourier cho hàm nhiều biến. Cụ thể, các tác giả đã thiết lập bất đẳng thức Carleman mới tương ứng với bài toán. Mục đích của chương này là mở rộng các kết quả đó sang bài toán chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ (chứa lớp toán tử Grushin) trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Khi đó tính suy biến xảy ra tại giao của hai mặt $x = 0$ và $y = 0$, điều này gây ra khó khăn khi thiết lập bất đẳng thức Carleman mới.

4.2. Một số kết quả bổ trợ

4.2.1. Tính đặt đúng của bài toán

Trước tiên, ta định nghĩa nghiệm yếu của bài toán (4.1).

Định nghĩa 4.1. Hàm u được gọi là một nghiệm yếu của bài toán (4.1) trên $(0,T)$ với điều kiện ban đầu $u(0)=u_0$ nếu và chỉ nếu

$$u \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;S_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(0,T;S^{-1}(\Omega))$$

và

$$\left\langle u_t - \Delta_x u - \Delta_y u - |x|^{2s}|y|^{2\gamma}\Delta_z u, \varphi \right\rangle = \langle v(x,y,z,t)1_\omega, \varphi \rangle$$

với mọi hàm thử $\varphi \in L^2(0,T;S_0^1(\Omega))$ và với hầu khắp $t \in (0,T)$.

Sử dụng phương pháp Galerkin, ta có thể dễ dàng chứng minh được kết quả sau (xem [1, 64]).

Định lí 4.2. *Với mỗi $u_0 \in L^2(\Omega)$ và $v \in L^2(0,T;L^2(\omega))$ cho trước, bài toán* (4.1) *có duy nhất một nghiệm yếu thỏa mãn*

$$u \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;S_0^1(\Omega)).$$

Hơn nữa,

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(0,T;S_0^1(\Omega))} \le C\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega))}\right),$$

ở đây C là hằng số dương không phụ thuộc vào u_0 và v.

4.2.2. Khai triển Fourier và tốc độ tán xạ

Ta xét $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ là dãy các giá trị riêng không giảm của toán tử $-\Delta_z$ trong $H^2(\Omega_3) \cap H_0^1(\Omega_3)$ và các vectơ riêng liên quan $(\varphi_n(z))_{n\in\mathbb{N}^*}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} -\Delta_z \varphi_n(z) = \chi_n \varphi_n(z), & z \in \Omega_3, \\ \varphi_n(z) = 0, & z \in \partial\Omega_3. \end{cases}$$

Với mọi nghiệm yếu $u(x,y,z,t)$ của hệ (4.1) và mọi điều khiển $v(x,y,z,t)$, ta xét

$$u_n(x,y,t) = \int_{\Omega_3} u(x,y,z,t)\varphi_n(z)dz; \quad v_n(x,y,t) = \int_{\Omega_3} v(x,y,z,t)\varphi_n(z)dz. \quad (4.2)$$

Thay (4.2) vào (4.1), ta nhận được mệnh đề sau.

Mệnh đề 4.1. *Với $u_0 \in L^2(\Omega)$ cho trước và u là nghiệm yếu tương ứng duy nhất của bài toán (4.1). Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, hàm $u_n(x,y,t)$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta_x u_n - \Delta_y u_n + \chi_n |x|^{2s}|y|^{2\gamma} u_n = v_n 1_{\omega_{12}}(x,y) & \text{trong } \Omega_{12} \times (0,T), \\ u_n = 0 & \text{trên } \partial\Omega_{12} \times (0,T), \\ u_n(x,y,0) = u_{0,n}(x,y) & \text{trong } \Omega_{12}, \end{cases} \quad (4.3)$$

với $u_{0,n}(x,y) = \int_{\Omega_3} u_0(x,y,z)\varphi_n(z)dz.$

Mệnh đề 4.1 được chứng minh tương tự Mệnh đề 2 trong [13].

Ta biết rằng giá trị riêng nhỏ nhất của $-\Delta\varphi(x,y) + \chi_n |x|^{2s}|y|^{2\gamma}\varphi(x,y)$ trong $H^2(\Omega_{12}) \cap H_0^1(\Omega_{12})$ được cho bởi

$$\lambda_{n,s,\gamma} := \min_{\substack{\varphi \in H_0^1(\Omega_{12}) \\ \varphi \neq 0}} \left\{ \frac{\int_{\Omega_{12}} \left(|\nabla\varphi(x,y)|^2 + \chi_n |x|^{2s}|y|^{2\gamma}|\varphi|^2 \right) dxdy}{\int_{\Omega_{12}} |\varphi|^2 dxdy} \right\},$$

với $\Delta\varphi(x,y) = \Delta_x\varphi(x,y) + \Delta_y\varphi(x,y)$. Khi đó, dáng điệu của $\lambda_{n,s,\gamma}$ (khi $|n| \to +\infty$) được cho bởi mệnh đề sau.

Mệnh đề 4.2. *Với mọi $s,\gamma \geq 0, s+\gamma > 0$, tồn tại $c_* = c_*(s,\gamma) > 0$ và $c^* = c^*(s,\gamma) > 0$ sao cho*

$$c_* \chi_n^{\frac{1}{1+s+\gamma}} \leq \lambda_{n,s,\gamma} \leq c^* \chi_n^{\frac{1}{1+s+\gamma}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.4)$$

Chứng minh. Mệnh đề được chứng minh tượng tự theo các bước như trong [14, Mệnh đề 4]. Đầu tiên, ta chứng minh tính chặn dưới.

Xét $\tau_n = \chi_n^{\frac{1}{2(1+s+\gamma)}}$. Đổi biến $\varphi(x,y) = \tau_n^{\frac{N_1+N_2}{2}} \phi\left(\tau_n(x,y)\right)$, ta được

$$\begin{aligned}
\lambda_{n,s,\gamma} = & \inf_{\substack{\varphi\in C_0^\infty(\Omega_{12}) \\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega_{12})}=1}} \left\{ \int_{\Omega_{12}} \left(|\nabla\varphi(x,y)|^2 + \chi_n |x|^{2s}|y|^{2\gamma}\varphi(x,y)\right) dxdy \right\} \\
= & \tau_n^2 \inf_{\substack{\phi\in C_0^\infty(\tau_n\Omega_{12}) \\ \|\phi\|_{L^2(\tau_n\Omega_{12})}=1}} \left\{ \int_{\tau_n\Omega_{12}} \left(|\nabla\phi(\tilde{x},\tilde{y})|^2 + |\tilde{x}|^{2s}|\tilde{y}|^{2\gamma}|\phi(\tilde{x},\tilde{y})|^2\right) d\tilde{x}d\tilde{y} \right\} \\
\geq & c_*\tau_n^2 = c_*\chi_n^{\frac{1}{1+s+\gamma}},
\end{aligned}$$

trong đó

$$c_* := \inf_{\substack{\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N_1+N_2}) \\ \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^{N_1+N_2})}=1}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{N_1+N_2}} \left(|\nabla\phi(\tilde{x},\tilde{y})|^2 + |\tilde{x}|^{2s}|\tilde{y}|^{2\gamma}|\phi(\tilde{x},\tilde{y})|^2\right) d\tilde{x}d\tilde{y} \right\}$$

là đại lượng dương (xem [56]).

Bây giờ, ta chứng minh tính chặn trên của $\lambda_{n,s,\gamma}$ bằng cách chọn các hàm thử thích hợp. Với mọi $k > 1$ đủ lớn sao cho $\overline{B}_{1/k}(0) \subset \Omega_{12}$, ta xét hàm

$$\varphi_k(x,y) = \begin{cases} 1 - k|(x,y)| & \text{nếu } |(x,y)| \leq \dfrac{1}{k}, \\ 0 & \text{nếu } |(x,y)| > \dfrac{1}{k}. \end{cases}$$

Chú ý rằng $\varphi_k \in H_0^1(\Omega_{12})$ với mọi $k > 0$. Ta có

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_{12}} |\varphi_k(x,y)|^2 dxdy = & \int_{|(x,y)|\leq 1/k} (1 - k|(x,y)|)^2 dxdy \\
= & \int_{|(x,y)|\leq 1/k} dxdy - 2k \int_{|(x,y)|\leq 1/k} |(x,y)| dxdy \\
& + k^2 \int_{|(x,y)|\leq 1/k} |(x,y)|^2 dxdy.
\end{aligned}$$

Sử dụng phép biến đổi trong tọa độ cầu, ta có

$$\int_{|(x,y)|\leq 1/k} dxdy = C_{N_1+N_2} k^{-N_1-N_2}, \tag{4.5}$$

trong đó

$$C_{N_1+N_2} = \begin{cases} \dfrac{\pi^{(N_1+N_2)/2}}{\left(\frac{N_1+N_2}{2}\right)!} & \text{nếu } N_1+N_2 \text{ là chẵn}, \\ \dfrac{2^{\frac{N_1+N_2+1}{2}} \pi^{\frac{N_1+N_2-1}{2}}}{(N_1+N_2)!} & \text{nếu } N_1+N_2 \text{ là lẻ}, \end{cases}$$

và

$$-2k\int_{|(x,y)|\le 1/k}|(x,y)|dxdy = k^{-N_1-N_2}\frac{-4\pi}{N_1+N_2+1}\mathscr{C}_{N_1+N_2},$$

$$k^2\int_{|(x,y)|\le 1/k}|(x,y)|^2dxdy = k^{-N_1-N_2}\frac{2\pi}{N_1+N_2+2}\mathscr{C}_{N_1+N_2},$$

trong đó

$$\mathscr{C}_{N_1+N_2} := \int_{(0,\pi)^{N_1+N_2-2}}\sin^{N_1+N_2-2}\phi_1\ldots\sin\phi_{N_1+N_2-2}d\phi_1 d\phi_2\cdots d\phi_{N_1+N_2-2}.$$

Do đó

$$\int_{\Omega_{12}}|\varphi_k(x,y)|^2dxdy = \mathscr{C}_{1,N_1+N_2}k^{-N_1-N_2}, \tag{4.6}$$

với

$$\mathscr{C}_{1,N_1+N_2} := C_{N_1+N_2} - \pi\left(\frac{4}{N_1+N_2+1} - \frac{2}{N_1+N_2+2}\right)\mathscr{C}_{N_1+N_2} > 0.$$

Do $|\nabla\varphi_k(x,y)|^2 = k^2$ nên như trong (4.5), ta có

$$\int_{\Omega_{12}}|\nabla\varphi_k(x,y)|^2dxdy = C_{N_1+N_2}k^{2-N_1-N_2}.$$

Tương tự như (4.6), ta được hằng số dương $\mathscr{C}_{2,N_1+N_2}(s,\gamma)$ sao cho

$$\int_{\Omega_{12}}|x|^{2s}|y|^{2\gamma}|\varphi_k(x,y)|^2dxdy = \mathscr{C}_{2,N_1+N_2}(s,\gamma)k^{-N_1-N_2-2(s+\gamma)}.$$

Do vậy,

$$\lambda_{n,s,\gamma} \le h_{n,s,\gamma}(k) := \frac{C_{N_1+N_2}}{\mathscr{C}_{1,N_1+N_2}}\left(k^2 + \chi_n\frac{\mathscr{C}_{2,N_1+N_2}(s,\gamma)}{C_{N_1+N_2}}k^{-2(s+\gamma)}\right)$$

với mọi $k > 1$. Vì $h_{n,s,\gamma}$ đạt cực tiểu tại

$$\overline{k} = \left((s+\gamma)\frac{\mathscr{C}_{2,N_1+N_2}(s,\gamma)}{C_{N_1+N_2}}\right)^{\frac{1}{2(1+s+\gamma)}}\chi_n,$$

ta có

$$\lambda_{n,s,\gamma} \le h_{n,s,\gamma}(\overline{k}) = c^*(s,\gamma)\chi_n^{\frac{1}{1+s+\gamma}}$$

với

$$c^*(s,\gamma) = \left((s+\gamma)^{\frac{1}{1+s+\gamma}} + (s+\gamma)^{-\frac{s+\gamma}{1+s+\gamma}}\right)\frac{C_{N_1+N_2}}{\mathscr{C}_{1,N_1+N_2}}\left(\frac{\mathscr{C}_{2,N_1+N_2}(s,\gamma)}{C_{N_1+N_2}}\right)^{\frac{1}{1+s+\gamma}}.$$

Mệnh đề được chứng minh. □

4.2.3. Bất đẳng thức Carleman

Với $s, \gamma, s+\gamma \in (0,1]$, $T > 0$ và với mọi $w_T \in L^2(\Omega_{12})$ cho trước, ta đi thiết lập bất đẳng thức Carleman cho nghiệm $w = w(x,y,t)$ của bài toán sau:

$$\begin{cases} \partial_t w + \Delta_x w + \Delta_y w - \chi_n |x|^{2s}|y|^{2\gamma} w = 0, & (x,y,t) \in \Omega_{12} \times (0,T), \\ w = 0, & (x,y,t) \in \partial\Omega_{12} \times (0,T), \\ w(x,y,T) = w_T(x,y), & (x,y) \in \Omega_{12}, \end{cases} \tag{4.7}$$

Lấy $\widetilde{\omega}_{12}$ là tập mở khác rỗng của Ω_{12} sao cho $\overline{\widetilde{\omega}}_{12} \subset \omega_{12} \subset \Omega_{12}$. Để thiết lập bất đẳng thức Carleman, ta xét hàm trọng

$$\sigma(x,y,t) := \frac{\beta(x,y)}{t(T-t)} = \frac{e^{2\lambda\|\psi\|_{L^\infty(\Omega_{12})}} - e^{\lambda\psi(x,y)}}{t(T-t)},$$

với $(x,y,t) \in \mathbb{R}^{N_1+N_2} \times (0,T)$, trong đó λ là hằng số dương, và $\psi \in C^4(\overline{\Omega}_{12})$ thỏa mãn

$$\psi > 0 \ \text{ trên } \ \overline{\Omega}_{12},$$

$$\psi = 0 \ \text{ trên } \ \partial\Omega_{12},$$

$$|\nabla\psi(x,y)| > 0, \ \forall (x,y) \in \overline{\Omega}_{12} \setminus \widetilde{\omega}_{12},$$

và hàm trọng β có tính chất sau (xem [14, Mệnh đề 13]):

Tồn tại các hằng số $C_1, C_2 > 0$ sao cho

$$\frac{\partial\beta}{\partial\nu} \geq 0 \ \text{ trên } \partial\Omega_{12}, \tag{4.8}$$

$$-\Delta\beta(x,y)|\xi|^2 - 2D^2\beta(x,y)(\xi,\xi) \geq C_1|\xi|^2,$$
$$\text{với mọi } \xi \in \mathbb{R}^{N_1+N_2}, (x,y) \in \Omega_{12} \setminus \widetilde{\omega}_{12}, \tag{4.9}$$

$$\Delta\beta(x,y)|\nabla\beta(x,y)|^2 - 2D^2\beta(x,y)\left(\nabla\beta(x,y), \nabla\beta(x,y)\right) \geq C_2,$$
$$\text{với mọi } (x,y) \in \Omega_{12} \setminus \widetilde{\omega}_{12}, \tag{4.10}$$

trong đó $D^2\beta(x,y)$ là ma trận Hessian của hàm vô hướng β tại điểm (x,y) và $D^2\beta(x,y)(\xi,\xi) = \xi^T D^2\beta(x,y)\xi$ là dạng bậc hai liên kết.

Cho $s, \gamma, s+\gamma \in (0,1]$, $T > 0$, và cố định $n \in \mathbb{N}^*$ trong tất cả các chứng minh. Để đơn giản kí hiệu, ta xét toán tử

$$P_{n,s,\gamma} w = \frac{\partial w}{\partial t} + \Delta w - \chi_n |x|^{2s}|y|^{2\gamma} w.$$

Khi đó, ta có bất đẳng thức Carleman cho nghiệm w của bài toán (4.7).

Định lí 4.3. *(Bất đẳng thức Carleman). Tồn tại các hằng số dương $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_1(\beta)$ và $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2(\beta)$ sao cho $w \in C^0([0,T];L^2(\Omega_{12})) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega_{12}))$ thỏa mãn*

$$\mathcal{K}_2 \iint\limits_{\Omega_{12}\times(0,T)} e^{-2M\sigma}\left(\frac{M}{t(T-t)}|\nabla w|^2 + \frac{M^3}{(t(T-t))^3}|w|^2\right)dxdydt$$
$$\leq \iint\limits_{\omega_{12}\times(0,T)} e^{-2M\sigma}\frac{M^3}{(t(T-t))^3}|w|^2dxdydt + \iint\limits_{Q} e^{-2M\sigma}|P_{n,s,\gamma}w|^2dxdydt, \quad (4.11)$$

trong đó

$$M = M(\chi_n, T, \beta) := \begin{cases} \mathcal{K}_1 \max\left\{T + T^2; \chi_n^{2/3}T^2\right\} & \text{nếu } 0 < s+\gamma < 1/2, \\ \mathcal{K}_1 \max\left\{T + T^2; \chi_n^{1/2}T^2\right\} & \text{nếu } s = \gamma = 1/2. \end{cases}$$

Chứng minh. Với hàm σ như trên, ta đặt

$$\varphi(x,y,t) = w(x,y,t)e^{-M\sigma(x,y,t)} \quad (4.12)$$

trong đó $M = M(T,n,\beta)$ sẽ được chọn sau. Khi đó, ta có

$$e^{-M\sigma}P_{n,s,\gamma}w = \mathcal{G}_1\varphi + \mathcal{G}_2\varphi + \mathcal{G}_3\varphi \quad (4.13)$$

với

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1\varphi &:= \Delta\varphi + M\sigma_t\varphi + M^2|\nabla\sigma|^2\varphi - \varepsilon\chi_n|x|^{2s}|y|^{2\gamma}\varphi, \\
\mathcal{G}_2\varphi &:= \varphi_t + 2M\nabla\sigma\cdot\nabla\varphi + 2M\Delta\sigma\varphi, \\
\mathcal{G}_3\varphi &:= -M\Delta\sigma\varphi + (\varepsilon-1)\chi_n|x|^{2s}|y|^{2\gamma}\varphi.
\end{aligned}$$

Từ (4.12) và định nghĩa của σ, ta thấy rằng

$$\varphi(\cdot,\cdot,0) = \varphi(\cdot,\cdot,T) = 0 \text{ trong } L^2(\Omega_{12}), \quad (4.14)$$

và

$$\varphi(\cdot,\cdot,0) = \varphi(\cdot,\cdot,T) = 0 \text{ trong } H_0^1(\Omega_{12}). \quad (4.15)$$

Lấy chuẩn hai vế trong $L^2(Q)$ của đẳng thức (4.13), ta nhận được

$$\iint\limits_{Q}\left(\mathcal{G}_1\varphi\mathcal{G}_2\varphi - \frac{1}{2}|\mathcal{G}_3\varphi|^2\right)dxdydt \leq \frac{1}{2}\iint\limits_{Q} e^{-2M\sigma}|P_{n,s,\gamma}w|^2dxdydt, \quad (4.16)$$

ở đó $Q = \Omega_{12} \times (0, T)$. Đặt

$$I = \iint\limits_{Q} \left(\mathscr{G}_1\varphi \mathscr{G}_2\varphi - \frac{1}{2}|\mathscr{G}_3\varphi|^2 \right) dxdydt.$$

Khi đó, ta có

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

với

$$I_1 = \iint\limits_{Q} \Delta\varphi(\varphi_t + 2M\nabla\sigma \cdot \nabla\varphi + 2M\Delta\sigma\varphi)dxdydt,$$

$$I_2 = \iint\limits_{Q} (M\sigma_t + M^2|\nabla\sigma|^2)\varphi(\varphi_t + 2M\nabla\sigma \cdot \nabla\varphi + 2M\Delta\sigma\varphi)dxdydt,$$

$$I_3 = -\varepsilon \iint\limits_{Q} \chi_n|x|^{2s}|y|^{2\gamma}\varphi(\varphi_t + 2M\nabla\sigma \cdot \nabla\varphi + 2M\Delta\sigma\varphi)dxdydt$$
$$- \frac{1}{2}\iint\limits_{Q} |\mathscr{G}_3\varphi|^2 dxdydt.$$

Bước 1. Tính toán cho từng số hạng của I.

Số hạng I_1: Lấy tích phân từng phần và sử dụng (4.15) cùng với điều kiện trên biên, ta có

$$\iint\limits_{Q} \Delta\varphi\varphi_t dxdydt = -\iint\limits_{Q} \nabla\varphi \cdot \partial_t\nabla\varphi dxdydt$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\int_{\Omega_{12}} |\nabla\varphi|^2 dxdydt = 0. \qquad (4.17)$$

Sử dụng công thức Green và chú ý rằng $\nabla\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}\nu$ trên $\partial\Omega_{12}$, ta được

$$2M\iint\limits_{Q} \Delta\varphi\nabla\sigma \cdot \nabla\varphi dxdydt = M\iint\limits_{Q} \left(|\nabla\varphi|^2\Delta\sigma - 2D^2\sigma(\nabla\varphi, \nabla\varphi)\right) dxdydt$$
$$+ 2M\int_0^T \int_{\partial\Omega_{12}} \frac{\partial\sigma}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 dsdt, \qquad (4.18)$$

trong đó ds xác định vết của độ đo Lebesgue trên $\partial\Omega_{12}$. Sử dụng công thức Green một lần nữa và $\varphi = 0$ trên $\partial\Omega_{12}$, ta có

$$\begin{aligned}
2M \iint\limits_Q \Delta\varphi\Delta\sigma\varphi dxdydt &= -2M \iint\limits_Q \nabla\varphi \cdot \nabla(\varphi\Delta\sigma) dxdydt \\
&= M \iint\limits_Q \left(-2|\nabla\varphi|^2\Delta\sigma + \Delta^2\sigma|\varphi|^2\right) dxdydt. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Kết hợp (4.17), (4.18) và (4.19), ta thu được

$$\begin{aligned}
I_1 =& M \iint\limits_Q \left[-|\nabla\varphi|^2\Delta\sigma - 2D^2\sigma(\nabla\varphi, \nabla\varphi)\right] dxdydt \\
&+ M \iint\limits_Q \Delta^2\sigma|\varphi|^2 dxdydt + 2M \int_0^T \int_{\partial\Omega_{12}} \frac{\partial\sigma}{\partial\nu} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 dsdt. \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Số hạng I_2: Lấy tích phân từng phần và sử dụng (4.14), ta có

$$\iint\limits_Q (M\sigma_t + M^2|\nabla\sigma|^2)\varphi\varphi_t dxdydt = -\frac{1}{2} \iint\limits_Q (M\sigma_t + M^2|\nabla\sigma|^2)_t |\varphi|^2 dxdydt.$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned}
&2M \iint\limits_Q (M\sigma_t + M^2|\nabla\sigma|^2)\varphi\nabla\sigma \cdot \nabla\varphi dxdydt \\
=& -M^2 \iint\limits_Q \nabla \cdot \left((\sigma_t + M|\nabla\sigma|^2)\nabla\sigma\right) |\varphi|^2 dxdydt \\
=& -M^2 \iint\limits_Q \left[\Delta\sigma(\sigma_t + M|\nabla\sigma|^2) + \nabla\sigma \cdot \nabla(\sigma_t) + 2MD^2\sigma(\nabla\sigma, \nabla\sigma)\right] |\varphi|^2 dxdydt.
\end{aligned}$$

và

$$2M^3 \iint\limits_Q |\nabla\sigma|^2\varphi^2\Delta\sigma dxdydt = \iint\limits_Q \left(2M^2\sigma_t\Delta\sigma + 2M^3|\nabla\sigma|^2\Delta\sigma\right) |\varphi|^2 dxdydt.$$

Do vậy,

$$I_2 = \iint\limits_Q \left(-\frac{1}{2}(M\sigma_t + M^2|\nabla\sigma|^2)_t + M^2\Delta\sigma\sigma_t - M^2\nabla\sigma \cdot \nabla(\sigma_t)\right) |\varphi|^2 dxdydt$$

$$+M^3\iint_Q \left(\Delta\sigma|\nabla\sigma|^2 - 2D^2\sigma(\nabla\sigma,\nabla\sigma)\right)|\varphi|^2 dxdydt. \quad (4.21)$$

Số hạng I_3: Lấy tích phân từng phần, từ (4.14) và điều kiện biên, ta có

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon\iint_Q \chi_n|x|^{2s}|y|^{2\gamma}\varphi(\varphi_t + 2M\nabla\sigma\cdot\nabla\varphi + 2M\Delta\sigma\varphi)dxdydt\\
=&\varepsilon\iint_Q \left[M\chi_n\nabla\cdot\left(|x|^{2s}|y|^{2\gamma}\nabla\sigma\right) + 2M\chi_n|x|^{2s}|y|^{2\gamma}\Delta\sigma\right]|\varphi|^2 dxdydt.
\end{aligned}$$

Số hạng cuối trong I_3 có thể ước lượng bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy như sau

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\iint_Q |\mathcal{G}_3\varphi|^2 dxdydt &= -\frac{1}{2}\iint_Q \left|M\Delta\sigma\varphi + (\varepsilon-1)\chi_n|x|^{2s}|y|^{2\gamma}\varphi\right|^2 dxdydt\\
&\geq -\iint_Q \left(M^2|\Delta\sigma|^2|\varphi|^2 + (\varepsilon-1)^2\chi_n^2|x|^{4s}|y|^{4\gamma}|\varphi|^2\right)dxdydt.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
I_3 \geq&\varepsilon\iint_Q \left[M\chi_n\nabla\cdot\left(|x|^{2s}|y|^{2\gamma}\nabla\sigma\right) + 2M\chi_n|x|^{2s}|y|^{2\gamma}\Delta\sigma\right]|\varphi|^2 dxdydt\\
&-\iint_Q \left(M^2|\Delta\sigma|^2|\varphi|^2 + (\varepsilon-1)^2\chi_n^2|x|^{4s}|y|^{4\gamma}|\varphi|^2\right)dxdydt \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

Kết hợp (4.20), (4.21) và (4.22) thì (4.16) trở thành

$$\begin{aligned}
&2M\int_0^T\int_{\partial\Omega_{12}}\frac{\partial\sigma}{\partial\nu}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 dsdt + M\iint_Q\left(-|\nabla\varphi|^2\Delta\sigma - 2D^2\sigma(\nabla\varphi,\nabla\varphi)\right)dxdydt\\
&+\iint_Q\left\{f + \varepsilon M\chi_n\left[\nabla\cdot\left(|x|^{2s}|y|^{2\gamma}\nabla\sigma\right) + |x|^{2s}|y|^{2\gamma}\Delta\sigma\right]\right\}|\varphi|^2 dxdydt\\
&-(\varepsilon-1)^2\iint_Q \chi_n^2|x|^{4s}|y|^{4\gamma}|\varphi|^2 dxdydt \leq \frac{1}{2}\iint_Q e^{-2M\sigma}|P_{n,s,\gamma}w|^2 dxdydt, \quad (4.23)
\end{aligned}$$

trong đó

$$f = -\frac{1}{2}(M\sigma_t + M^2|\nabla\sigma|^2)_t + M^2\Delta\sigma\sigma_t - M^2\nabla\sigma\cdot\nabla(\sigma_t) + M\Delta^2\sigma$$

$$- M^2|\Delta\sigma|^2 + M^3\left(\Delta\sigma|\nabla\sigma|^2 - 2D^2\sigma(\nabla\sigma,\nabla\sigma)\right).$$

Bước 2. Ước lượng các số hạng trong (4.23). Sử dụng (4.10), (4.23) trở thành

$$M\iint_Q \left(-|\nabla\varphi|^2\Delta\sigma - 2D^2\sigma(\nabla\varphi,\nabla\varphi)\right) dxdydt$$

$$+\iint_Q \left\{f + \varepsilon M\chi_n\left[\nabla\cdot\left(|x|^{2s}|y|^{2\gamma}\nabla\sigma\right) + |x|^{2s}|y|^{2\gamma}\Delta\sigma\right]\right\}|\varphi|^2 dxdydt$$

$$-(\varepsilon-1)^2\iint_Q \chi_n^2|x|^{4s}|y|^{4\gamma}|\varphi|^2 dxdydt \le \frac{1}{2}\iint_Q e^{-2M\sigma}|P_{n,s,\gamma}w|^2 dxdydt. \quad (4.24)$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} f = \frac{1}{(t(T-t))^3}\Big\{ & M^3\left[\Delta\beta|\nabla\beta|^2 - 2D^2\beta(\nabla\beta,\nabla\beta)\right] \\ & + M^2\left[-|\Delta\beta|^2 t(T-t) + (2t-T)\left(\beta\Delta\beta + 2|\nabla\beta|^2\right)\right] \\ & + M\left[(t(T-t))^2\Delta^2\beta - (T^2 - 3Tt + 3t^2)\beta\right]\Big\}. \end{aligned}$$

Sử dụng (4.8), (4.9) và hàm β xác định, trơn lớp C^4 trong $\overline{\Omega}_{12}$, tồn tại các hằng số dương $C_3 = C_3(\beta), C_4 = C_4(\beta)$ và $c = c(\beta)$ thỏa mãn

$$-|\nabla\varphi|^2\Delta\sigma - 2D^2\sigma(\nabla\varphi,\nabla\varphi) \ge C_1|\nabla\varphi|^2,$$
$$\text{với mọi } (x,y,t) \in (\overline{\Omega}_{12}\setminus\widetilde{\omega}_{12})\times(0,T), \quad (4.25)$$

$$\left|-|\nabla\varphi|^2\Delta\sigma - 2D^2\sigma(\nabla\varphi,\nabla\varphi)\right| \le C_3|\nabla\varphi|^2$$
$$\text{với mọi } (x,y,t) \in \overline{\widetilde{\omega}}_{12}\times(0,T), \quad (4.26)$$

$$f \ge \frac{1}{(t(T-t))^3}\left[C_2M^3 - c(T+T^2)M^2 - c(T+T^2)^2M\right],$$
$$\text{với mọi } (x,y,t) \in (\overline{\Omega}_{12}\setminus\widetilde{\omega}_{12})\times(0,T), \quad (4.27)$$

$$|f| \le \frac{1}{(t(T-t))^3}\left[C_4M^3 + c(T+T^2)M^2 + c(T+T^2)^2M\right],$$
$$\text{với mọi } (x,y,t) \in \overline{\widetilde{\omega}}_{12}\times(0,T). \quad (4.28)$$

Từ (4.27) và (4.28), tồn tại các hằng số dương $m_1 = m_1(\beta)$, $C_2' = C_2'(\beta)$ và $C_4'(\beta)$ sao cho $M \ge M_1(T,\beta) := m_1(\beta)(T+T^2)$, ta có

$$f \ge \frac{C_2'M^3}{(t(T-t))^3}, \quad \text{với mọi } (x,y,t) \in (\overline{\Omega}_{12}\setminus\widetilde{\omega}_{12})\times(0,T), \quad (4.29)$$

$$|f| \le \frac{C_4' M^3}{(t(T-t))^3}, \quad \text{với mọi } (x,y,t) \in \overline{\widetilde{\omega}}_{12} \times (0,T). \tag{4.30}$$

Do đó, từ (4.25), (4.26), (4.29) và (4.30), ta nhận được từ (4.24) với $M \ge M_1(T,\beta)$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega_{12}\setminus\widetilde{\omega}_{12}} \frac{C_1 M}{t(T-t)} |\nabla\varphi|^2 dxdydt + \int_0^T \int_{\Omega_{12}\setminus\widetilde{\omega}_{12}} \frac{C_2' M^3}{(t(T-t))^3} |\varphi|^2 dxdydt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega_{12}\setminus\widetilde{\omega}_{12}} \varepsilon M \chi_n \left[\nabla\cdot\left(|x|^{2s}|y|^{2\gamma}\nabla\sigma\right) + |x|^{2s}|y|^{2\gamma}\Delta\sigma \right] |\varphi|^2 dxdydt \\
&- (\varepsilon-1)^2 \int_0^T \int_{\Omega_{12}\setminus\widetilde{\omega}_{12}} \chi_n^2 |x|^{4s}|y|^{4\gamma} |\varphi|^2 dxdydt \\
\le &\iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12}\times(0,T)} \frac{C_4' M^3}{(t(T-t))^3} |\varphi|^2 dxdydt \\
&- \iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12}\times(0,T)} \varepsilon M \chi_n \left[\nabla\cdot\left(|x|^{2s}|y|^{2\gamma}\nabla\sigma\right) + |x|^{2s}|y|^{2\gamma}\Delta\sigma \right] |\varphi|^2 dxdydt \\
&+ \iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12}\times(0,T)} \frac{C_3 M}{t(T-t)} |\nabla\varphi|^2 dxdydt + \frac{1}{2} \iint\limits_{Q} e^{-2M\sigma} |P_{n,s,\gamma} w|^2 dxdydt \\
&+ (\varepsilon-1)^2 \iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12}\times(0,T)} \chi_n^2 |x|^{4s}|y|^{4\gamma} |\varphi|^2 dxdydt.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Bước 3. Kết thúc chứng minh trong trường hợp: $0 < s+\gamma < 1/2$. Lấy $\varepsilon = 0$, (4.31) trở thành

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega_{12}\setminus\widetilde{\omega}_{12}} \frac{C_1 M}{t(T-t)} |\nabla\varphi|^2 dxdydt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega_{12}\setminus\widetilde{\omega}_{12}} \left(\frac{C_2' M^3}{(t(T-t))^3} - \chi_n^2 |x|^{4s}|y|^{4\gamma} \right) |\varphi|^2 dxdydt \\
\le &\iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12}\times(0,T)} \frac{C_3 M}{t(T-t)} |\nabla\varphi|^2 dxdydt + \frac{1}{2} \iint\limits_{Q} e^{-2M\sigma} |P_{n,s,\gamma} w|^2 dxdydt \\
&+ \iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12}\times(0,T)} \left(\frac{C_4' M^3}{(t(T-t))^3} + \chi_n^2 |x|^{4s}|y|^{4\gamma} \right) |\varphi|^2 dxdydt.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Lấy

$$M \ge M_2 = M_2(T,\chi_n,\beta) := \frac{T^2}{4} \chi_n^{2/3} \sqrt[3]{\frac{2R^{4(s+\gamma)}}{C_2'}},$$

với $R > 0$ thỏa mãn $\Omega_{12} \subset B_R(0)$, ta thu được

$$\chi_n^2 |x|^{4s} |y|^{4\gamma} \leq \frac{C_2' M^3}{2(t(T-t))^3}, \quad \text{với mọi } (x, y, t) \in \Omega_{12} \times (0, T). \tag{4.33}$$

Từ bây giờ ta lấy $M = \mathscr{K}_1 \max\{T + T^2; \chi_n^{2/3} T^2\}$ với

$$\mathscr{K}_1 := \max\left\{ m_1, \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{2R^{4(s+\gamma)}}{C_2'}} \right\}.$$

Vì vậy, $M \geq M_1$ và M_2. Do đó, sử dụng (4.33) ta nhận được từ (4.32):

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega_{12} \setminus \widetilde{\omega}_{12}} \left(\frac{C_1 M}{t(T-t)} |\nabla \varphi|^2 + \frac{C_2' M^3}{2(t(T-t))^3} |\varphi|^2 \right) dx dy dt \\
\leq &\iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12} \times (0,T)} \left(\frac{C_3 M}{t(T-t)} |\nabla \varphi|^2 + \frac{C_5 M^3}{(t(T-t))^3} |\varphi|^2 \right) dx dy dt \\
&+ \frac{1}{2} \iint\limits_{Q} e^{-2M\sigma} |P_{n,s,\gamma} w|^2 dx dy dt,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

trong đó $C_5 = C_4' + C_2'/2$. Do (4.12) và bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{C_1 M}{t(T-t)} |\nabla \varphi|^2 + \frac{C_2' M^3}{2(t(T-t))^3} |\varphi|^2 \\
=&e^{-2M\sigma} \left(\frac{C_1 M}{t(T-t)} |\nabla w - M w \nabla \sigma|^2 + \frac{C_2' M^3}{2(t(T-t))^3} |w|^2 \right) \\
\geq &e^{-2M\sigma} \left(\frac{C_6 M}{t(T-t)} |\nabla w|^2 + \frac{C_2' M^3}{4(t(T-t))^3} |w|^2 \right),
\end{aligned} \tag{4.35}$$

với mọi $(x, y, t) \in (\Omega_{12} \setminus \widetilde{\omega}_{12}) \times (0, T)$, ở đây $C_6 = C_2'/(4C_1 \|\nabla \beta\|_\infty^2 + C_2')$, và

$$\begin{aligned}
&\frac{C_3 M}{t(T-t)} |\nabla \varphi|^2 + \frac{C_5 M^3}{(t(T-t))^3} |\varphi|^2 \\
=&e^{-2M\sigma} \left(\frac{C_3 M}{t(T-t)} |\nabla w - M w \nabla \sigma|^2 + \frac{C_5 M^3}{(t(T-t))^3} |w|^2 \right) \\
\leq &e^{-2M\sigma} \left(\frac{2C_3 M}{t(T-t)} |\nabla w|^2 + \frac{C_7 M^3}{(t(T-t))^3} |w|^2 \right),
\end{aligned} \tag{4.36}$$

với mọi $(x, y, t) \in \widetilde{\omega}_{12} \times (0, T)$, và $C_7 = 2C_3 \|\nabla \beta\|_\infty^2 + C_5$.

Từ (4.35), (4.36) và sử dụng (4.12) thì (4.34) được viết theo w như sau:

$$\int_0^T \int_{\Omega_{12}\setminus\widetilde{\omega}_{12}} e^{-2M\sigma}\left(\frac{C_6 M}{t(T-t)}|\nabla w|^2 + \frac{C_2' M^3}{4(t(T-t))^3}|w|^2\right) dxdydt$$

$$\leq \iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12}\times(0,T)} e^{-2M\sigma}\left(\frac{2C_3 M}{t(T-t)}|\nabla w|^2 + \frac{C_7 M^3}{(t(T-t))^3}|w|^2\right) dxdydt$$

$$+\frac{1}{2}\iint\limits_Q e^{-2M\sigma}|P_{n,s,\gamma}w|^2 dxdydt. \tag{4.37}$$

Thêm cùng đại lượng vào hai vế của (4.37), ta được

$$\iint\limits_{\Omega_{12}\times(0,T)} e^{-2M\sigma}\left(\frac{C_6 M}{t(T-t)}|\nabla w|^2 + \frac{C_2' M^3}{4(t(T-t))^3}|w|^2\right) dxdydt$$

$$\leq \iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12}\times(0,T)} e^{-2M\sigma}\left(\frac{C_8 M}{t(T-t)}|\nabla w|^2 + \frac{C_9 M^3}{(t(T-t))^3}|w|^2\right) dxdydt$$

$$+\frac{1}{2}\iint\limits_Q e^{-2M\sigma}|P_{n,s,\gamma}w|^2 dxdydt, \tag{4.38}$$

trong đó $C_8 = C_6 + 2C_3$ và $C_9 = C_7 + C_2'/2$.

Bây giờ, ta xét $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^{N_1+N_2}, \mathbb{R}_+)$ sao cho $0 \leq \rho \leq 1$ trong $\overline{\Omega}_{12}$ và

$$\rho \equiv 1 \ \text{ trong } \ \widetilde{\omega}_{12}, \quad \rho \equiv 0 \ \text{ với } (x,y) \notin \omega_{12}.$$

Lấy tích phân từng phần ta có

$$-\iint\limits_Q P_{n,s,\gamma}w\,\frac{\rho w e^{-2M\sigma}}{t(T-t)} dxdydt$$

$$=\iint\limits_Q \left(-\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + \chi_n |x|^{2s}|y|^{2\gamma} w\right)\frac{\rho w e^{-2M\sigma}}{t(T-t)} dxdydt$$

$$=-\iint\limits_Q \frac{1}{2}|w|^2 e^{-2M\sigma}\rho\left(\frac{M\sigma_t}{t(T-t)} + \frac{T-2t}{(t(T-t))^2}\right) dxdydt$$

$$+\iint\limits_Q \frac{\rho e^{-2M\sigma}}{t(T-t)}|\nabla w|^2 dxdydt + \iint\limits_Q \chi_n |x|^{2s}|y|^{2\gamma}\frac{|w|^2\rho e^{-2M\sigma}}{t(T-t)} dxdydt$$

$$-\iint\limits_Q \frac{|w|^2 e^{-2M\sigma}}{2t(T-t)}\left(\Delta\rho - 4M\nabla\rho\cdot\nabla\sigma + \rho(4M^2|\nabla\sigma|^2 - 2M\Delta\sigma)\right) dxdydt.$$

Vì vậy,

$$\iint\limits_Q \frac{\rho C_8 M e^{-2M\sigma}}{t(T-t)}|\nabla w|^2 dxdydt \le -\iint\limits_Q P_{n,s,\gamma}w\, \frac{\rho C_8 M w e^{-2M\sigma}}{t(T-t)} dxdydt$$
$$-\iint\limits_Q \frac{\rho C_8 M|w|^2 e^{-2M\sigma}}{2t(T-t)}\left(M\sigma_t + \frac{T-2t}{t(T-t)}\right)dxdydt$$
$$-\iint\limits_Q \frac{C_8 M|w|^2 e^{-2M\sigma}}{2t(T-t)}\Big(\Delta\rho - 4M\nabla\rho\cdot\nabla\sigma + \rho(4M^2|\nabla\sigma|^2 - 2M\Delta\sigma)\Big)dxdydt$$
$$\le \frac{1}{2}\iint\limits_Q e^{-2M\sigma}|P_{n,s,\gamma}w|^2 dxdydt + \iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12}\times(0,T)} \frac{C_{10}M^3 e^{-2M\sigma}|w|^2}{(t(T-t))^3}dxdydt.$$

với $C_{10} = C_{10}(\beta,\rho)$. Ở đây, ta đã sử dụng bất đẳng thức Cauchy với chú ý $M \ge T + T^2$ và $\operatorname{supp}(\rho), \operatorname{supp}(\Delta\rho), \operatorname{supp}(\nabla\rho) \subset \widetilde{\omega}_{12}$. Do đó

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12}\times(0,T)} \frac{C_8 M e^{-2M\sigma}}{t(T-t)}|\nabla w|^2 dxdydt &\le \iint\limits_Q \frac{\rho C_8 M e^{-2M\sigma}}{t(T-t)}|\nabla w|^2 dxdydt \\ &\le \frac{1}{2}\iint\limits_Q e^{-2M\sigma}|P_{n,s,\gamma}w|^2 dxdydt + \iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12}\times(0,T)} \frac{C_{10}M^3 e^{-2M\sigma}|w|^2}{(t(T-t))^3}dxdydt.\end{aligned} \tag{4.39}$$

Thế (4.39) vào (4.38), ta suy ra

$$\iint\limits_{\Omega_{12}\times(0,T)} e^{-2M\sigma}\left(\frac{C_6 M}{t(T-t)}|\nabla w|^2 + \frac{C_2' M^3}{4(t(T-t))^3}|w|^2\right)dxdydt$$
$$\le \iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12}\times(0,T)} e^{-2M\sigma}\frac{C_{11}M^3}{(t(T-t))^3}|w|^2 dxdydt + \iint\limits_Q e^{-2M\sigma}|P_{n,s,\gamma}w|^2 dxdydt,$$

với $C_{11} = C_9 + C_{10}$. Vì vậy, ta được bất đẳng thức Carleman (4.11) với hằng số

$$\mathscr{K}_2 = \frac{\min\{C_6, C_2'/4\}}{\max\{C_{11}, 1\}}.$$

Bước 4. Kết thúc chứng minh trong trường hợp: $s = \gamma = 1/2$. Trong trường hợp này, ta lấy $\varepsilon = 1$ thì (4.31) trở thành

$$\int_0^T\int_{\Omega_{12}\setminus\widetilde{\omega}_{12}} \frac{C_1 M}{t(T-t)}|\nabla\varphi|^2 dxdydt + \int_0^T\int_{\Omega_{12}\setminus\widetilde{\omega}_{12}} \frac{C_2' M^3}{(t(T-t))^3}|\varphi|^2 dxdydt$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^T\int_{\Omega_{12}\setminus\widetilde{\omega}_{12}} M\chi_n\left[\nabla\cdot\left(|x|\,|y|\nabla\sigma\right)+|x|\,|y|\Delta\sigma\right]|\varphi|^2 dxdydt\\
&\le \iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12}\times(0,T)}\left(\frac{C_4' M^3}{(t(T-t))^3}-M\chi_n\left[\nabla\cdot\left(|x|\,|y|\nabla\sigma\right)+|x|\,|y|\Delta\sigma\right]\right)|\varphi|^2 dxdydt\\
&+\iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12}\times(0,T)}\frac{C_3 M}{t(T-t)}|\nabla\varphi|^2 dxdydt+\frac{1}{2}\iint\limits_{Q} e^{-2M\sigma}|P_{n,s,\gamma}w|^2 dxdydt. \qquad (4.40)
\end{aligned}
$$

Ta có

$$
\chi_n M\left|\nabla\cdot\left(|x|\,|y|\nabla\sigma\right)+|x|\,|y|\Delta\sigma\right|\le\frac{C_{13}\chi_n M}{t(T-t)},\quad \forall(x,y,t)\in\Omega_{12}\times(0,T),
$$

trong đó $C_{13}=R\sup\limits_{\Omega_{12}}|\nabla\beta|+2R^2\sup\limits_{\Omega_{12}}|\Delta\beta|$ với $R>0$ sao cho $\Omega_{12}\subset B_R(0)$. Lấy

$$
M\ge M_2:=\sqrt{\frac{C_{13}}{2C_2'}}\chi_n^{1/2}T^2
$$

thì

$$
\chi_n M\left|\nabla\cdot\left(|x|\,|y|\nabla\sigma\right)+|x|\,|y|\Delta\sigma\right|\le\frac{C_2' M^3}{2(t(T-t))^3}, \qquad (4.41)
$$

với mọi $(x,y,t)\in\Omega_{12}\times(0,T)$. Do vậy, từ bây giờ ta lấy $M=\mathscr{K}_1\max\{T+T^2;\chi_n^{\frac{1}{2}}T^2\}$ với

$$
\mathscr{K}_1:=\max\left\{m_1(\beta);\sqrt{\frac{C_{13}}{2C_2'}}\right\}.
$$

Do đó, $M\ge M_1$ và $M\ge M_2$. Vì vậy, sử dụng (4.41) ta nhận được từ (4.40):

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\Omega_{12}\setminus\widetilde{\omega}_{12}}\left(\frac{C_1 M}{t(T-t)}|\nabla\varphi|^2+\frac{C_2' M^3}{2(t(T-t))^3}|\varphi|^2\right)dxdydt\\
&\le\iint\limits_{\widetilde{\omega}_{12}\times(0,T)}\left(\frac{C_3 M}{t(T-t)}|\nabla\varphi|^2+\frac{C_5 M^3}{(t(T-t))^3}|\varphi|^2\right)dxdydt\\
&+\frac{1}{2}\iint\limits_{Q} e^{-2M\sigma}|P_{n,s,\gamma}w|^2 dxdydt,
\end{aligned}
$$

với $C_5=C_4'+C_2'/2$, bất đẳng thức này chính là (4.34). Vậy ta có điều phải chứng minh. □

4.3. Chứng minh kết quả chính

4.3.1. Lược đồ chứng minh Định lí 4.1

Từ phương pháp HUM, tính điều khiển được về 0 của bài toán (4.1) tương đương với tính quan sát được của bài toán liên hợp sau

$$\begin{cases} w_t + \Delta_x w + \Delta_y w + |x|^{2s}|y|^{2\gamma}\Delta_z w = 0, & (x,y,z,t) \in \Omega \times (0,T), \\ w = 0, & (x,y,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ w(x,y,z,T) = w_T(x,y,z), & (x,y,z) \in \Omega. \end{cases} \tag{4.42}$$

Định nghĩa 4.2. Bài toán (4.42) là quan sát được trong miền $\omega = \omega_{12} \times \Omega_3$ tại thời điểm T nếu tồn tại $C > 0$, sao cho với mọi $w_T \in L^2(\Omega)$, nghiệm w của bài toán (4.42) thỏa mãn

$$\|w(x,y,z,0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \int_0^T \int_\omega |w(x,y,z,t)|^2 dxdydt.$$

Giả sử w là nghiệm của (4.42). Ta có khai triển nghiệm $w = w(x,y,z,t)$ thành chuỗi Fourier theo z là

$$w_n(x,y,t) = \int_{\Omega_3} w(x,y,z,t)\varphi_n(z)dz; \quad w_{T,n}(x,y) = \int_{\Omega_3} w_T(x,y,z)\varphi_n(z)dz.$$

Khi đó $w_n(x,y,t)$ là nghiệm của bài toán sau (bài toán liên hợp của (4.3)).

$$\begin{cases} \partial_t w_n + \Delta_x w_n + \Delta_y w_n - \chi_n |x|^{2s}|y|^{2\gamma} w_n = 0, & (x,y,t) \in \Omega_{12} \times (0,T), \\ w_n = 0, & (x,y,t) \in \partial\Omega_{12} \times (0,T), \\ w_n(x,y,T) = w_{T,n}(x,y), & (x,y) \in \Omega_{12}, \end{cases} \tag{4.43}$$

Ta chú ý rằng, với hầu khắp $t \in (0,T)$, và với mọi tập mở ω_{12} của Ω_{12}, ta có

$$\int_{\omega_{12}\times\Omega_3} |w(x,y,z,t)|^2 dxdydz = \sum_n \int_{\omega_{12}} |w_n(x,y,t)|^2 dxdy.$$

Điều này có được từ đẳng thức Bessel-Parseval. Do đó, tính quan sát được của bài toán (4.42) tương đương tính quan sát được đều theo $n \in \mathbb{N}^*$ của bài toán (4.43). Ta có Định nghĩa sau đây về tính quan sát được đều.

Định nghĩa 4.3. (Tính quan sát được đều). Cho ω_{12} là tập mở của Ω_{12}. Bài toán (4.43) là quan sát được trong ω_{12} đều theo $n \in \mathbb{N}^*$ nếu tồn tại $C > 0$, sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}^*, w_{T,n} \in L^2(\Omega_{12})$, nghiệm của (4.43) thỏa mãn

$$\int_{\Omega_{12}} |w_n(x,y,0)|^2 dxdy \leq C \int_0^T \int_{\omega_{12}} |w_n(x,y,t)|^2 dxdydt. \tag{4.44}$$

Do đó, để xét tính điều khiển được về 0 của bài toán (4.1) ta xét tính quan sát được đều theo $n \in \mathbb{N}^*$ của bài toán (4.43). Cụ thể ta phải đánh giá được (4.44).

4.3.2. Chứng minh tính điều khiển được trong Định lí 4.1

Định lí sau đây cho ta các kết luận về tính điều khiển được trong Định lí 4.1. Chứng minh dựa trên bất đẳng thức Carleman (4.11) được thiết lập cho nghiệm của bài toán (4.43) và tốc độ tán xạ (4.4).

Định lí 4.4. *Cho ω_{12} là miền con mở khác rỗng của Ω_{12}.*

- *Nếu $s + \gamma \in (0, 1/2)$ thì bài toán* (4.43) *quan sát được trong ω_{12} đều theo $n \in \mathbb{N}^*$ với mọi $T > 0$.*
- *Nếu $s = \gamma = 1/2$ thì tồn tại $T^* > 0$ sao cho bài toán* (4.43) *quan sát được trong ω_{12} đều theo $n \in \mathbb{N}^*$ với mọi $T \geq T^*$.*

Chứng minh. Với w_n là nghiệm của bài toán (4.43) thì $P_{n,s,\gamma} w_n = 0$. Do đó, áp dụng bất đẳng thức Carleman (4.11) cho nghiệm w_n của bài toán (4.43), ta được

$$\mathcal{K}_2 \iint\limits_{\Omega_{12}\times(0,T)} e^{-2M\sigma} \frac{M^3}{(t(T-t))^3} |w_n|^2 dxdydt \leq \iint\limits_{\omega_{12}\times(0,T)} e^{-2M\sigma} \frac{M^3}{(t(T-t))^3} |w_n|^2 dxdydt. \tag{4.45}$$

Đầu tiên ta có

$$e^{-2M\sigma} \frac{M^3}{(t(T-t))^3} \leq \mathcal{C}_2, \quad \text{với mọi } (x,y,t) \in \omega_{12} \times (0,T),$$

trong đó $\mathscr{C}_2 := \sup\left\{e^{-2\beta_*\xi}\xi^3 \mid \xi \in \mathbb{R}_+\right\}$ với $\beta_* = \min\{\beta(x,y) \mid (x,y) \in \overline{\omega}_{12}\}$.
Vì

$$\frac{3T^2}{16} \leq t(T-t) \leq \frac{T^2}{4} \text{ với mọi } t \in [T/4, 3T/4],$$

ta có

$$\frac{e^{-2\sigma(x,y,t)}}{(t(T-t))^3} \geq \frac{e^{-\mathscr{C}_3 M/T^2}}{T^6/64} \text{ với mọi } (x,y,t) \in \overline{\Omega}_{12} \times [T/4, 3T/4],$$

trong đó $\mathscr{C}_3 = \mathscr{C}_3(\beta) = \frac{32}{3}\sup\{\beta(x) \mid x \in \overline{\Omega}_{12}\}$. Do vậy, ta nhận được từ (4.45):

$$\mathscr{K}_2 \frac{M^3 e^{-\mathscr{C}_3 M/T^2}}{T^6/64} \int_{T/4}^{3T/4} \int_{\Omega_{12}} |w_n|^2 dxdydt \leq \mathscr{C}_2 \int_0^T \int_{\omega_{12}} |w_n|^2 dxdydt. \quad (4.46)$$

Nhân phương trình thứ nhất trong (4.43) với $-w_n$, lấy tích phân trong Ω_{12} và nhờ Mệnh đề 4.2, ta có

$$\int_{\Omega_{12}} |w_n(x,y,0)|^2 dxdy \leq e^{-c_*\chi_n^{\frac{1}{1+s+\gamma}}\frac{T}{2}} \int_{\Omega_{12}} |w_n(x,y,t)|^2 dxdy, \quad (4.47)$$

với mọi $t \in [T/4, 3T/4]$. Lấy tích phân (4.47) từ $T/4$ tới $3T/4$, ta nhận được

$$\int_{\Omega_{12}} |w_n(x,y,0)|^2 dxdy \leq \frac{2}{T} e^{-c_*\chi_n^{\frac{1}{1+s+\gamma}}\frac{T}{2}} \int_{T/4}^{3T/4} \int_{\Omega_{12}} |w_n(x,y,t)|^2 dxdydt. \quad (4.48)$$

Từ (4.46), (4.48) và chú ý rằng $M \geq \mathscr{K}_1(T+T^2) \geq \mathscr{K}_1 T^2$, ta có

$$\int_{\Omega_{12}} |w_n(x,y,0)|^2 dxdy \leq \frac{\mathscr{K}}{T} \exp\left(\mathscr{C}_3 \frac{M}{T^2} - c_*\chi_n^{\frac{1}{1+s+\gamma}}\frac{T}{2}\right) \int_0^T \int_{\omega_{12}} |w_n|^2 dxdydt$$

với $\mathscr{K} = 2\mathscr{C}_2/(64\mathscr{K}_2\mathscr{K}_1^3)$, c_* và $\mathscr{C}_3$ không phụ thuộc vào χ_n, T.

• Nếu $\chi_n < \begin{cases} (1+1/T)^{3/2} & \text{khi } s+\gamma \in (0, 1/2), \\ (1+1/T)^2 & \text{khi } s = \gamma = 1/2, \end{cases}$ thì $M = \mathscr{K}_1(T+T^2)$, do đó,

$$\int_{\Omega_{12}} |w_n(x,y,0)|^2 dxdy \leq \frac{\mathscr{K}}{T} \exp\left(\mathscr{C}_3 \mathscr{K}_1 \left(1 + \frac{1}{T}\right)\right) \int_0^T \int_{\omega_{12}} |w_n|^2 dxdydt.$$

• Nếu $\chi_n \geq \begin{cases} (1+1/T)^{3/2} & \text{khi } s+\gamma \in (0,1/2), \\ (1+1/T)^2 & \text{khi } s=\gamma=1/2, \end{cases}$ thì,

$$M = \begin{cases} \mathscr{K}_1 \chi_n^{2/3} T^2 & \text{nếu } s+\gamma \in (0,1/2), \\ \mathscr{K}_1 \chi_n^{1/2} T^2 & \text{nếu } s=\gamma=1/2. \end{cases}$$

Do vậy

$$\frac{\mathscr{C}_3 M}{T^2} - c_* \chi_n^{\frac{1}{1+s+\gamma}} \frac{T}{2} = \begin{cases} -c_* \chi_n^{\frac{1}{1+s+\gamma}} \frac{T}{2} + \mathscr{K}_1 \mathscr{C}_3 \chi_n^{2/3}, & \text{nếu } s+\gamma \in (0,1/2), \\ -\chi_n^{1/2} \left(c_* \frac{T}{2} - \mathscr{K}_1 \mathscr{C}_3 \right), & \text{nếu } s=\gamma=1/2, \end{cases}$$

với $c_*, \mathscr{C}_3, \mathscr{K}_1$ chỉ phụ thuộc vào β và s, γ.

Bây giờ với $s+\gamma \in (0,1/2)$ và $T > 0$ bất kì. Giá trị cực đại của hàm $\zeta \mapsto \mathscr{K}_1 \mathscr{C}_3 \zeta^{2/3} - c_* \zeta^{\frac{1}{1+s+\gamma}} \frac{T}{2}$ trên $(0,+\infty)$ có dạng $\mathscr{C} T^{-\frac{2(1+s+\gamma)}{1-2(s+\gamma)}}$ với hằng số $\mathscr{C} > 0$ (không phụ thuộc vào T). Do vậy,

$$\int_{\Omega_{12}} |w_n(x,y,0)|^2 dxdy \leq \frac{\mathscr{K}}{T} \exp\left(\mathscr{C} T^{-\frac{2(1+s+\gamma)}{1-2(s+\gamma)}} \right) \int_0^T \int_{\omega_{12}} |w_n|^2 dxdydt,$$

trong đó $\mathscr{K}, \mathscr{C}$ không phụ thuộc vào χ_n, điều này cho ta kết quả trong trường hợp $s+\gamma \in (0,1/2)$.

Bây giờ, xét trường hợp $s=\gamma=1/2$. Ta thấy rằng $\frac{\mathscr{C}_3 M}{T^2} - c_* \chi_n^{\frac{1}{1+s+\gamma}} \frac{T}{2} \leq 0$ khi $T \geq T^* := 2\mathscr{K}_1 \mathscr{C}_3 / c_*$. Bởi vậy,

$$\int_{\Omega_{12}} |w_n(x,y,0)|^2 dxdy \leq \frac{\mathscr{K}}{T} \int_0^T \int_{\omega_{12}} |w_n|^2 dxdydt.$$

Định lí được chứng minh. □

4.3.3. Chứng minh tính không điều khiển được trong Định lí 4.1

Bây giờ ta chứng minh kết quả không điều khiển được trong Định lí 4.1 bằng cách chứng minh bài toán (4.43) không quan sát được đều theo $n \in \mathbb{N}^*$.

Định lí 4.5. *Cho* Ω_{12} *là dạng* $(-1,1)^{N_1+N_2}$*. Nếu* $s+\gamma>1$*, và* $\omega_{12}=(a,b)^{N_1+N_2}$*, với*

$$\left[\frac{\min\{(N_1-1)^{\frac{s+1}{2}}N_2^{\frac{\gamma+1}{2}},(N_2-1)^{\frac{\gamma+1}{2}}N_1^{\frac{s+1}{2}}\}}{N_1^{\frac{s+1}{2}}N_2^{\frac{\gamma+1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2+s+\gamma}}<a<b\le 1,$$

thì bài toán (4.43) *không quan sát được trong* ω_{12} *đều theo* $n\in\mathbb{N}^*$.

Ta chứng minh định lí này bằng cách chọn các hàm thử sao cho tính quan sát đều không xảy ra.

Chứng minh. Cho $s+\gamma\in(1,+\infty)$ cố định. Với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, ta xác định bởi λ_n (thay cho $\lambda_{n,s,\gamma}$), giá trị riêng đầu tiên của toán tử $P_{n,s,\gamma}$, và bởi φ_n (thay thế cho $\varphi_{n,s,\gamma}$) là hàm riêng dương tương ứng, nghĩa là

$$\begin{cases}-\Delta\varphi_n+\left(\chi_n|x|^{2s}|y|^{2\gamma}-\lambda_n\right)\varphi_n=0 & \text{trong } \Omega_{12},\\ \varphi_n=0 & \text{trên } \partial\Omega_{12},\\ \varphi_n\ge 0,\ \|\varphi_n\|_{L^2(\Omega_{12})}=1.\end{cases}\tag{4.49}$$

Khi đó, hàm

$$w_n(x,y,t):=\varphi_n(x,y)e^{-\lambda_n(T-t)}\quad\forall(x,y,t)\in\Omega_{12}\times[0,T]$$

là nghiệm của bài toán liên hợp (4.43). Hơn nữa, ta có

$$\int_{\Omega_{12}}|w_n(x,y,0)|^2dxdy=e^{-2\lambda_nT},$$

$$\int_0^T\int_{\omega_{12}}|w_n(x,y,t)|^2dxdydt=\frac{1-e^{-2\lambda_nT}}{2\lambda_n}\int_{\omega_{12}}|\varphi_n(x,y)|^2dxdy.$$

Do vậy, để chứng minh tính không quan sát được đều, ta chỉ cần chứng tỏ rằng

$$\frac{e^{2\lambda_nT}}{\lambda_n}\int_{\omega_{12}}|\varphi_n|^2dxdy\to 0 \text{ khi } \chi_n\to+\infty.\tag{4.50}$$

Để làm điều đó, ta sẽ so sánh φ_n với một nghiệm tường minh của bài toán trên một miền con phù hợp của $\overline{\Omega}_{12}$.

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt

$$\tilde{\lambda}_n := \left(\frac{\lambda_n}{\chi_n^{\frac{s+\gamma}{1+s+\gamma}} \kappa} \right)^{\frac{1}{2(s+\gamma)}}, \tag{4.51}$$

trong đó

$$\kappa \leq 2\pi \sqrt{\frac{(s+1)(N_1+s-1)(\gamma+1)(N_2+\gamma-1)}{c^* \left((s+1)^2 N_2 + (\gamma+1)^2 N_1\right)}},$$

với $c^* = c^*(s,\gamma)$ được định nghĩa trong Mệnh đề 4.2.

Đặt $\Omega_{x_0,1} = (x_0, 1)^{N_1+N_2}$ với mọi $0 < x_0 < 1$. Ta xác định

$$\partial\Omega_{\tilde{\lambda}_n,1}(\tilde{\lambda}_n) = \left\{(x,y) \in \Omega_{\tilde{\lambda}_n,1} \mid \text{tồn tại một tọa độ bằng } \tilde{\lambda}_n\right\},$$
$$\partial\Omega_{\tilde{\lambda}_n,1}(1) = \left\{(x,y) \in \Omega_{\tilde{\lambda}_n,1} \mid \text{tồn tại một tọa độ bằng } 1\right\}.$$

Bổ đề 4.1. *Cho $\Phi_n \in C^2((\tilde{\lambda}_n, 1)^{N_1+N_2}; \mathbb{R})$ là nghiệm của*

$$\begin{cases} -\Delta\Phi_n + \left(\chi_n |x|^{2s}|y|^{2\gamma} - \lambda_n\right)\Phi_n \geq 0, & \text{trong } \Omega_{\tilde{\lambda}_n,1}, \\ \Phi_n \geq 0 & \text{trên } \partial\Omega_{\tilde{\lambda}_n,1}(1), \\ \nu \cdot \nabla\Phi_n < -\sqrt{\tilde{\lambda}_n}\lambda_n & \text{trên } \partial\Omega_{\tilde{\lambda}_n,1}(\tilde{\lambda}_n). \end{cases} \tag{4.52}$$

Khi đó, tồn tại $n_* \in \mathbb{N}^*$ sao cho với mọi $\chi_n \geq n_*$,

$$\int_{\omega_{12}} |\varphi_n|^2 dxdy \leq \int_{\omega_{12}} |\Phi_n|^2 dxdy.$$

Chứng minh. Ta chú ý rằng, nhờ đánh giá chặn trên của $\lambda_{n,s,\gamma}$ trong Mệnh đề 4.2, với $s+\gamma > 1$, $\tilde{\lambda}_n \to 0$ khi $\chi_n \to +\infty$. Đặc biệt, tồn tại $n_* \geq 1$ sao cho $\omega_{12} \subset (\tilde{\lambda}_n, 1)^{N_1+N_2}$. Hơn nữa, ta có thể chứng minh được rằng $|\nu \cdot \nabla\varphi_n| \leq \sqrt{\tilde{\lambda}_n}\lambda_n$ trên $\partial\Omega_{\tilde{\lambda}_n,1}(\tilde{\lambda}_n)$. Thật vậy, ta thấy rằng $\varphi_n(x,y) = \varphi_n(-(x,y))$, do đó $\nabla\varphi_n(0,0) = 0$. Do vậy, trên $\partial\Omega_{\tilde{\lambda}_n,1}(\tilde{\lambda}_n)$, sử dụng (4.49) và bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$|\nu \cdot \nabla\varphi_n| = \left|\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_j}(0,\ldots,0,\tilde{\lambda}_n,0,\ldots,0)\right| = \left|\int_0^{\tilde{\lambda}_n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}(0,\ldots,0,\xi,0,\ldots,0)d\xi\right|$$

$$= \int_0^{\tilde{\lambda}_n} \lambda_n |\varphi_n(0,\ldots,0,\xi,0,\ldots,0)| d\xi$$

$$\leq \lambda_n \sqrt{\int_0^{\tilde{\lambda}_n} d\xi} \sqrt{\int_0^{\tilde{\lambda}_n} |\varphi_n(0,\ldots,0,\xi,0,\ldots,0)|^2 d\xi} \leq \lambda_n \sqrt{\tilde{\lambda}_n} \|\varphi_n\|_{L^2(\Omega_{12})} = \lambda_n \sqrt{\tilde{\lambda}_n}.$$

Hơn nữa, ta có $\varphi_n(x,y) \leq \Phi_n(x,y)$ với mọi $(x,y) \in [\tilde{\lambda}_n, 1]^{N_1+N_2}$, $\chi_n \geq n_*$. Thật vậy, nếu không thì tồn tại $(x_*, y_*) \in [\tilde{\lambda}_n, 1]^{N_1+N_2}$ sao cho

$$(\Phi_n - \varphi_n)(x_*, y_*) = \min\left\{(\Phi_n - \varphi_n)(x,y) \mid (x,y) \in [\tilde{\lambda}_n, 1]^{N_1+N_2}\right\} < 0.$$

Vì $(\Phi_n - \varphi_n)(x,y) \geq 0$ trên $\partial\Omega_{\tilde{\lambda}_n,1}(1)$ và $\nu \cdot \nabla(\Phi_n - \varphi_n)(x,y) < 0$ trên $\partial\Omega_{\tilde{\lambda}_n,1}(\tilde{\lambda}_n)$, ta có $(x_*, y_*) \in (\tilde{\lambda}_n, 1)^{N_1+N_2}$. Mặt khác, hàm $\Phi_n - \varphi_n$ có cực tiểu tại (x_*, y_*), do đó $\nabla(\Phi_n - \varphi_n)(x_*, y_*) = 0$ và $\Delta(\Phi_n - \varphi_n)(x_*, y_*) > 0$. Do vậy,

$$-\Delta(\Phi_n - \varphi_n)(x_*, y_*) + \left(\chi_n |x_*|^{2s} |y_*|^{2\gamma} - \lambda_n\right)(\Phi_n - \varphi_n)(x_*, y_*) < 0,$$

Suy ra mâu thuẫn. Ta được điều phải chứng minh. □

Bây giờ, để chứng minh (4.50), bằng cách áp dụng Bổ đề 4.1, ta tìm một nghiệm trên Φ_n của (4.52) ở dạng

$$\Phi_n = C_n e^{-\mu_n |x|^{s+1} |y|^{\gamma+1}}, \tag{4.53}$$

với $C_n, \mu_n > 0$. Ta thấy điều kiện thứ hai trong (4.52) được thỏa mãn. Bây giờ, ta chứng minh điều kiện thứ nhất và điều kiện thứ ba trong (4.52) cũng thỏa mãn. Ta có

$$\begin{aligned} &\nabla\Phi_n(x,y) \\ =& -\mu_n \left((s+1)|x|^{s-1}|y|^{\gamma+1}(x_1, ..., x_{N_1}), (\gamma+1)|x|^{s+1}|y|^{\gamma-1}(y_1, \ldots, y_{N_2})\right)\Phi_n, \end{aligned} \tag{4.54}$$

và

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_n(x,y) = \Big[&\mu_n^2 |x|^{2s}|y|^{2\gamma}\left((s+1)^2|y|^2 + (\gamma+1)^2|x|^2\right) \\ &- \mu_n\Big((s+1)(N_1+s-1)|x|^{s-1}|y|^{\gamma+1} \\ &+ (\gamma+1)(N_2+\gamma-1)|x|^{s+1}|y|^{\gamma-1}\Big)\Big]\Phi_n. \end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức thứ nhất của (4.52) thỏa mãn nếu và chỉ nếu với mọi $(x,y) \in (\tilde{\lambda}_n, 1)^{N_1+N_2}$,

$$\begin{aligned} &\left(\chi_n - \mu_n^2\left((s+1)^2|y|^2 + (\gamma+1)^2|x|^2\right)\right)|x|^{2s}|y|^{2\gamma} \\ &+ \mu_n\left((s+1)(N_1+s-1)|x|^{s-1}|y|^{\gamma+1} + (\gamma+1)(N_2+\gamma-1)|x|^{s+1}|y|^{\gamma-1}\right) \geq \lambda_n. \end{aligned}$$

Vì $(x,y) \in (\tilde{\lambda}_n, 1)^{N_1+N_2}$ nếu (4.52) thỏa mãn với mọi $(x,y) \in (\tilde{\lambda}_n, 1)^{N_1+N_2}$ nếu

$$\begin{aligned}\Big[\chi_n - \mu_n^2\Big((s+1)^2 N_2 + (\gamma+1)^2 N_1\Big)\Big]|x|^{2s}|y|^{2\gamma}&\\ + 2\mu_n\sqrt{(s+1)(N_1+s-1)(\gamma+1)(N_2+\gamma-1)}|x|^s|y|^\gamma \geq \lambda_n& \quad (4.55)\end{aligned}$$

thỏa mãn với mọi $(x,y) \in (\tilde{\lambda}_n, 1)^{N_1+N_2}$. Đặc biệt, sử dụng định nghĩa của $\tilde{\lambda}_n$ thì (4.55) thỏa mãn với mọi $(x,y) \in (\tilde{\lambda}_n, 1)^{N_1+N_2}$ khi đó ta lấy

$$\mu_n = \frac{\chi_n^{1/2}}{\sqrt{(s+1)^2 N_2 + (\gamma+1)^2 N_1}} := C_1(s,\gamma)\chi_n^{1/2}. \quad (4.56)$$

Bây giờ, từ (4.54) ta có

$$C(N_1, N_2, s, \gamma, \tilde{\lambda}_n) := \min\left\{(N_1 - 1 + \tilde{\lambda}_n^2)^{\frac{s+1}{2}} N_2^{\frac{\gamma+1}{2}}, (N_2 - 1 + \tilde{\lambda}_n^2)^{\frac{\gamma+1}{2}} N_1^{\frac{s+1}{2}}\right\}$$

sao cho

$$\nu \cdot \nabla\Phi_n(x,y) \leq -C_n\mu_n\tilde{\lambda}_n^{s+\gamma+1}\min\{s+1, \gamma+1\}e^{-\mu_n C(N_1,N_2,s,\gamma,\tilde{\lambda}_n)},$$

với $(x,y) \in \partial\Omega_{\tilde{\lambda}_n,1}(\tilde{\lambda}_n)$, do đó, bất đẳng thức thứ ba của (4.52) thỏa mãn nếu ta chọn

$$C_n := \frac{2\lambda_n e^{\mu_n C(N_1,N_2,s,\gamma,\tilde{\lambda}_n)}}{\min\{s+1,\gamma+1\}\mu_n\tilde{\lambda}_n^{s+\gamma+1/2}}. \quad (4.57)$$

Bây giờ ta chứng minh (4.50). Nhờ Bổ đề 4.1, (4.53), (4.56) và (4.57), với mọi $\chi_n \geq n_*$,

$$\begin{aligned}\frac{e^{2\lambda_n T}}{\lambda_n}\int_{\omega_{12}}|\varphi(x,y)|^2 dxdy &\leq \frac{e^{2\lambda_n T}}{\lambda_n}\int_{\omega_{12}}|\Phi_n(x,y)|^2 dxdy\\ \leq \frac{e^{2\lambda_n T}}{\lambda_n}C_n^2 e^{-2\mu_n N_1^{\frac{s+1}{2}}N_2^{\frac{\gamma+1}{2}}a^{2+s+\gamma}}&\\ \leq \frac{e^{2\lambda_n T}}{\lambda_n}\frac{4\lambda_n^2 e^{2\mu_n C(N_1,N_2,s,\gamma,\tilde{\lambda}_n)}}{\min\{s+1,\gamma+1\}^2\mu_n^2\tilde{\lambda}_n^{2(s+\gamma)+1}}e^{-2\mu_n N_1^{\frac{s+1}{2}}N_2^{\frac{\gamma+1}{2}}a^{2+s+\gamma}}.&\end{aligned}$$

Từ đẳng thức (4.56) ta có

$$\begin{aligned}\frac{e^{2\lambda_n T}}{\lambda_n}\int_{\omega_{12}}|\varphi(x,y)|^2 dxdy \leq \exp\Big\{2\chi_n^{1/2}\Big[\frac{\lambda_n}{\chi_n^{1/2}}T - C_1(s,\gamma)\Big(N_1^{\frac{s+1}{2}}N_2^{\frac{\gamma+1}{2}}a^{2+s+\gamma}&\\ - C(N_1,N_2,s,\gamma,\tilde{\lambda}_n)\Big)\Big]\Big\}\frac{4\lambda_n}{\min\{s+1,\gamma+1\}^2\mu_n^2\tilde{\lambda}_n^{2(s+\gamma)+1}}.& \quad (4.58)\end{aligned}$$

Nếu $s+\gamma>1$, ta nhận được từ đánh giá chặn trên của $\lambda_{n,s,\gamma}$ trong Mệnh đề 4.2 và (4.51):

$$\frac{\lambda_n}{\chi_n^{1/2}} \text{ và } \tilde{\lambda}_n \to 0 \text{ khi } \chi_n \to +\infty.$$

Do đó, với mọi $T>0$, tồn tại $\tilde{n}_* \geq n_*$ sao cho, với mọi $\chi_n \geq \tilde{n}_*$,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_n}{\chi_n^{1/2}}T - C_1(s,\gamma)\left(N_1^{\frac{s+1}{2}}N_2^{\frac{\gamma+1}{2}}a^{2+s+\gamma} - C(N_1,N_2,s,\gamma,\tilde{\lambda}_n)\right)\\ < -\frac{1}{2}C_1(s,\gamma)\Big(N_1^{\frac{s+1}{2}}N_2^{\frac{\gamma+1}{2}}a^{2+s+\gamma}\\ - \min\left\{(N_1-1)^{\frac{s+1}{2}}N_2^{\frac{\gamma+1}{2}},(N_2-1)^{\frac{\gamma+1}{2}}N_1^{\frac{s+1}{2}}\right\}\Big)a^{2+s+\gamma}.\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức trên cho (4.58) và chú ý rằng

$$N_1^{\frac{s+1}{2}}N_2^{\frac{\gamma+1}{2}}a^{2+s+\gamma} - \min\left\{(N_1-1)^{\frac{s+1}{2}}N_2^{\frac{\gamma+1}{2}},(N_2-1)^{\frac{\gamma+1}{2}}N_1^{\frac{s+1}{2}}\right\} > 0,$$

ta nhận được (4.50). □

Chú ý 4.1. Khi chúng ta chứng minh khẳng định trái chiều, một trong các điểm kĩ thuật là chọn $\tilde{\lambda}_n = \left(\frac{\lambda_n}{\chi_n^{\frac{s+\gamma}{1+s+\gamma}}\kappa}\right)^{\frac{1}{2(s+\gamma)}}$ thỏa mãn $\tilde{\lambda}_n \to 0$ khi $\chi_n \to +\infty$ và số mũ của χ_n giúp ta vượt qua khó khăn khi tìm kiếm một nghiệm tường minh Φ_n của (4.52).

Chú ý cuối chương. Kết quả trong chương này là mở rộng các kết quả gần đây (xem [5, 13, 14]) về tính điều khiển được cho lớp phương trình parabolic chứa toán tử suy biến Grushin sang lớp toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$. Chúng tôi đã áp dụng lược đồ chứng minh được sử dụng trong [5, 13] và đặc biệt là cách tiếp cận trong [14]. Tuy nhiên, do tính suy biến mạnh của toán tử $P_{s,\gamma}$ dẫn đến xuất hiện số hạng $\chi_n|x|^{2s}|y|^{2\gamma}w$ trong toán tử $P_{n,s,\gamma}$, đã gây ra một số khó khăn khi thiết lập bất đẳng thức Carleman. Ta đã biết để thu được tính quan sát đều theo n thì cần có bất đẳng thức Carleman. Vì dáng điệu của $\lambda_{n,s,\gamma}$ phụ thuộc theo χ_n (xem Mệnh đề 4.2) nên bất đẳng thức Carleman có hằng số M phụ thuộc vào χ_n, tùy theo s,γ quyết định đến tính quan sát đều (xem trong chứng minh của Định lí 4.4). Để vượt qua khó khăn đó ngoài việc lựa chọn các hàm trọng phù hợp, chúng tôi khai thác một số kĩ thuật được sử dụng trong chứng minh Bổ đề 5.2 trong [27] và Mệnh đề 2.5 trong [5]. Tuy nhiên cũng bởi khó khăn của tính suy biến mạnh, mà việc thiết lập bất đẳng thức Carleman chưa đạt được trong các trường hợp suy biến quá mạnh.

Kết luận Chương 4

Trong chương này, chúng tôi đã nghiên cứu tính điều khiển được về 0 của phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Các kết quả đạt được là:

- Khi $s + \gamma \in (0, 1/2)$: Chứng minh được tính điều khiển được về 0 tại mọi thời điểm $T > 0$.
- Khi $s = \gamma = 1/2$: Chứng minh được tính điều khiển được về 0 khi thời gian điều khiển đủ lớn.
- Khi $s + \gamma > 1$: Chứng minh được tính không điều khiển được về 0.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi đã nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, dáng điệu tiệm cận nghiệm và tính điều khiển được về 0 đối với lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh. Các kết quả đạt được của luận án bao gồm:

- Chứng minh được sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu, sự tồn tại tập hút toàn cục đối với một lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh Δ_λ trên miền bị chặn.
- Chứng minh được sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu, sự tồn tại tập hút toàn cục đối với một lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trên toàn không gian $\mathbb{R}^N$.
- Chứng minh được tính điều khiển được về 0 tại mọi thời điểm $T > 0$ khi $s + \gamma \in (0, 1/2)$ (trường hợp suy biến yếu). Khi $s = \gamma = 1/2$ (trường hợp suy biến mạnh) chứng minh được tính điều khiển được về 0 khi thời gian đủ lớn. Khi $s + \gamma > 1$ (trường hợp suy biến quá mạnh) chứng minh được tính không điều khiển được về 0 đối với bài toán điều khiển cho lớp phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trong trường hợp nhiều chiều.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở cần được tiếp tục nghiên cứu như:

- Nghiên cứu các tính chất của tập hút toàn cục nhận được của Chương 2 và Chương 3, chẳng hạn nghiên cứu tính trơn của tập hút, đánh giá số chiều fractal, sự phụ thuộc liên tục vào tham biến,...

- Nghiên cứu sự tồn tại tập hút toàn cục của lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh Δ_λ trên toàn không gian $\mathbb{R}^N$.

- Nghiên cứu tính điều khiển được cho bài toán (4.1) trong các trường hợp còn lại của s và γ: Liệu có điều khiển được về 0 khi $s+\gamma \in (1/2;1)$? Liệu có điều khiển được về 0 tại thời gian đủ lớn, không điều khiển được về 0 khi thời gian bé, khi $s+\gamma = 1, s, \gamma \neq 1/2$?

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN LUẬN ÁN

[CT1]. D. T. Quyet, L. T. Thuy and N. X. Tu (2017), Semilinear strongly degenerate parabolic equations with a new class of nonlinearities, *Vietnam J. Math.* 45 (3), 507–517.

[CT2]. N. X. Tu (2021), Global attractor for a semilinear strongly degenerate parabolic equation with exponential nonlinearity in unbounded domains, *Commun. Korean Math. Soc.,* accepted.

[CT3]. C. T. Anh and N. X. Tu, Null controllability of a strongly degenerate parabolic equation, *submitted.*

Tài liệu tham khảo

[1] C. T. Anh (2014), Global attractor for a semilinear strongly degenerate parabolic equation on $\mathbb{R}^N$, *Nonlinear Differ. Equ. Appl.* 21, 663–678 .

[2] C. T. Anh and T. Q. Bao (2012), Dynamics of non-autonomous nonclassical diffusion equations on $\mathbb{R}^n$, *Commun. Pure App. Anal.* 11, 1231–1252.

[3] C. T. Anh, P. Q. Hung, T. D. Ke and T. T. Phong (2008), Global attractor for a semilinear parabolic equation involving Grushin operator, *Electron. J. Differ. Equ.* 32, 1–11.

[4] C. T. Anh and T. D. Ke (2009), Existence and continuity of global attractor for a semilinear degenerate parabolic equation, *Electron. J. Differ. Equ.* 61, 1–13.

[5] C. T. Anh and V. M. Toi (2013), Null controllability of a parabolic equation involving the Grushin operator in some multi-dimensional domains, *Nonlinear Anal.* 93, 181–196.

[6] C. T. Anh and V. M. Toi (2015), Null controllability for semilinear degenerate/singular parabolic equations, *Fixed Point Theory.* 16, 15–30.

[7] C. T. Anh and V. M. Toi (2016), Null controllability in large time of a parabolic equation involving the Grushin operator with an inverse-square potential, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 23, no. 2, Art. 20, 26 pp.

[8] C. T. Anh and L. T. Tuyet (2013), On a semilinear strongly degenerate parabolic equation in an unbounded domain, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo.* 20, 91–113.

[9] C. T. Anh and L. T. Tuyet (2013), Strong solutions to a strongly degenerate semilinear parabolic equation, *Vietnam J. Math.* 41, 217–232.

[10] F. Boyer and P. Fabrie (2013), *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*, Applied Mathematical Sciences 183, Springer, New York.

[11] K. Beauchard (2013), Null controllability of degenerate parabolic equations of Grushin and Kolmogorov type, *Séminaire Laurent Schwartz-Équations aux dérivées partielles et applications. Année 2011-2012, Exp. No. XXXIV, 24 pp., Sémin. Équ. Dériv. Partielles, École Polytech., Palaiseau*.

[12] K. Beauchard (2014), Null controllability of Kolmogorov-type equations, *Mathematics of Control, Signals and Systems.* 26, 145–176.

[13] K. Beauchard, P. Cannarsa and R. Guglielmi (2014), Null controllability of Grushin-type operators in dimension two, *J. Eur. Math. Soc.* 16, 67–101.

[14] K. Beauchard, P. Cannarsa and M. Yamamoto (2014), Inverse source problem and null controllability for multidimensional parabolic operators of Grushin type, *Inverse Problems* 30 (2), 025006, 26 pp.

[15] K. Beauchard, L. Miller and M. Morancey (2015), 2D Grushin-type equations: minimal time and null controllable data, *J. Differential Equations* 259, 5813–584.

[16] J.-M. Coron (2007), *Control and Nonlinearity*, AMS, Providence, RI.

[17] P. Cannarsa, G. Fragnelli and J. Vancostenoble (2006), Regional controllability of semilinear degenerate parabolic equations in bounded domains, *J. Math. Anal. Appl.* 320, 804–818.

[18] P. Cannarsa, P. Martinez and J. Vancostenoble (2008), Carleman estimates for a class of degenerate parabolic operators, *SIAM J. Control Optim.* 47, 1–19.

[19] P. Cannarsa, P. Martinez and J. Vancostenoble (2009), Carleman estimates and null controllability for boundary-degenerate parabolic operators, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 347, 147–152.

[20] P. Cannarsa, P. Martinez and J. Vancostenoble (2005), Null controllability of degenerate heat equations, *Adv. Differential Equations* 10, 153–190.

[21] P. Cannarsa, P. Martinez and J. Vancostenoble (2016), Global Carleman Estimates for Degenerate Parabolic Operators with Applications, *Memoirs of AMS,* 239,(1133), ix+209p.

[22] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik (2002), Attractors for Equations of Mathematical Physics, *American Mathematical Society, Providence, RI*, xii+363p.

[23] S. Dolecki and D. L.Russell (1977), A general theory of observation and control, *SIAM J. Control Optimization.* 15, no. 2, 185-–220. MR 0451141 (56 #9428).

[24] A. Doubova, E. Fernández-Cara and E. Zuazua (2002), On the controllability of parabolic systems with a nonlinear term involving the state and the gradient, *SIAM J. Control Optim.* 42, 798–819.

[25] B. Franchi and E. Lanconelli, Une métrique associée une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, (French) [A metric associated with a class of degenerate elliptic operators] Conference on linear partial and pseudodifferential operators (Torino, 1982). *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 1983, Special Issue (1984), 105–114.

[26] C. Fabre, J. P. Puel and E. Zuazua (1995), Approximate controllability of the semilinear heat equation, *Proc. Royal Soc. Edinburgh* 125A, 31–61.

[27] E. Fernández-Cara (1997), Null controllability of the semilinear heat equation, *ESAIM: Control Optim. Calc. Var.* 2, 87–103.

[28] E. Fernández-Cara and S. Guerrero (2006), Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability, *SIAM J. Control Optim.* 45(4), 1399–1446

[29] E. Fernández-Cara and E. Zuazua (2000), Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*. 17, 583–616.

[30] A. V. Fursikov and O. Yu. Imanuvilov (1996), *Controllability of Evolution Equations*, Lecture Notes Series, Seoul. 34. Seoul: Seoul National Univ., 163 p.

[31] P. G. Geredeli (2015), On the existence of regular global attractor for $p-$Laplacian evolution equation, *Appl. Math. Optim,* 71, 517–532.

[32] P. G. Geredeli and A. Khanmamedov (2013), Long-time dynamics of the parabolic $p-$Laplacian equation, *Commun. Pure Appl. Anal,* 12, 735–754.

[33] M. González-Burgos and L. de Teresa (2007), Some results on controllability for linear and nonlinear heat equations in unbounded domains, *Adv. Differential Equations* 12, 1201–1240.

[34] V. V. Grushin, (1971), On a class of elliptic pseudo differential operators degenerate on a submanifold, *Math. USSR Sbornik*. 13, 155–183. (in Russian)

[35] S. Guerrero (2012), *An Introduction to the Theory of Control of Partial Differential Equations*, Lecture Notes.

[36] L. Hörmander (1967), Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math*. 119, 147–171.

[37] A. E. Kogoj and E. Lancenolli (2012), On semilinear Δ_λ-Laplace equation, *Nonlinear Anal.* 75, 4637–4649.

[38] A. E. Kogoj and S. Sonner (2013), Attractors for a class of semi-linear degenerate parabolic equations, *J. Evol. Equ.* 13, 675–691.

[39] A. E. Kogoj and S. Sonner (2014), Attractors met X-elliptic operators. *J. Math. Anal. Appl.* 420, 407–434.

[40] A. E. Kogoj and S. Sonner (2015), Hardy type inequalities for Δ_λ-Laplacians. *Complex Variables and Elliptic Equations.* 61 (3), 422–442.

[41] A. Koenig (2017), Non-null-controllability of the Grushin operator in 2D, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 355, 1215–1235.

[42] J. Le Rousseau and I. Moyano (2016), Null-controllability of the Kolmogorov equation in the whole phase space, *J. Differential Equations.* 260, 3193–3233.

[43] G. Lebeau and L. Robbiano (1995), Contrôle exact de l'équation de la chaleur, *Comm. P.D.E.* 20, 335–356.

[44] D. Li and C. Sun (2016), Attractors for a class of semi-linear degenerate parabolic equations with critical exponent. *J. Evol. Equ.* 16, 997–1015.

[45] J.-L. Lions (1969), *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires,*Dunod, Paris.

[46] J.-L. Lions (1988), Exact controllability, stabilizability and perturbations for distributed systems, *SIAM Rev.* 30, 1–68.

[47] J.-L. Lions (1988), *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes D́istribues*, Tome 1, Rech. Math. Appl. 8, Masson, Paris.

[48] J.-L. Lions (1988), *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes D́istribues*, Tome 2, Rech. Math. Appl. 9, Masson, Paris.

[49] L. H. Loomis and S. Sternberg (1990), *Advanced Calculus,* Paperback edition of the 1990 revised edition [MR1140004 (92i:00002)] of the 1968 original. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2014. xii+580 pp. ISBN: 978-981-4583-93-0.

[50] D. T. Luyen and N.M. Tri (2016), Behavior at large time intervals of solutions of degenerate hyperbolic equations with damping. (Russian) *Sibirsk. Mat. Zh.* 57 (2016), 809-829; *translation in Sib. Math. J.* 57, 632–649.

[51] D. T. Luyen and N.M. Tri (2016), Global attractor of the Cauchy problem for a semilinear degenerate damped hyperbolic equation involving the Grushin operator, *Ann. Polon. Math.* 117, 141–162.

[52] P. Martinez and J. Vancostenoble (2006), Carleman estimates for one-dimensional degenerate heat equations, *J. Evol. Equ.* 6, 325–362.

[53] L. Miller (2005), On the null-controllability of the heat equation in unbounded domains, *Bull. Sci. Math.* 129, 175–185.

[54] M. Morancey (2015), Approximate controllability for a 2D Grushin equation with potential having an internal singularity, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. 65, 1525–1556.

[55] J. P. Raymond and H. Zidani (1999), Hamiltonian Pontryagin's principles for control problems governed by semilinear parabolic equations, *Appl. Math. Optim.* 39, 143-–177.

[56] M. Reed and B. Simon (1980), *Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis* 2nd edn (New York: Academic).

[57] J. C. Robinson (2001), *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge.

[58] D. L. Russell (1978), Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: Recent progress and open questions, *SIAM Rev.* 20, pp. 639–739.

[59] Z. Shao (2011), Existence and continuity of strong solutions of partly dissipative reaction diffusion systems, *Discrete Contin. Dyn. Systs.,* Supplement, 1319–1328.

[60] R. Temam (1997), *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin.

[61] M. X. Thao (2016), On the global attractor for a semilinear strongly degenerate parabolic equation, *Acta Math. Vietnam.* 41, 283–297.

[62] N. T. C. Thuy and N. M. Tri (2002), Some existence and nonexistence results for boundary value problems for semilinear elliptic degenerate operators, *Russ. J. Math. Phys.* 9, 365–370.

[63] P. T. Thuy and N. M. Tri (2012), Nontrivial solutions to boundary value problems for semilinear strongly degenerate elliptic differential equations, *Nonlinear Differ. Equ. Appl.* 19, 279–298.

[64] P. T. Thuy and N. M. Tri (2013), Long-time behavior of solutions to semilinear parabolic equations involving strongly degenerate elliptic differential operators, *Nonlinear Differential Equations Appl.* 20, 1213–1224.

[65] J. Vancostenoble (2011), Improved Hardy-Poincaré inequality and shap Carleman estimates for degenerate/singular parabolic problems, *Disc. Cont. Dyna. Syst. Ser. S.* 4 , 761–790.

[66] B. Wang (1999), Attractors for reaction-diffusion equations in unbounded domains, *Physica D.* 179, 41–52.

[67] C. Wang and R. Du (2013), Approximate controllability of a class of semilinear degenerate systems with convection term, *J. Differential Equations* 254, 3665–3689.

[68] L. Yan, B. Wu, S. Lu and Y. Wang (2020), Null controllability and inverse source problem for stochastic Grushin equation with boundary degeneracy and singularity, *arXiv: 2001.01877*.

[69] C. K. Zhong, M. H. Yang, C. Y. Sun (2006), The existence of global attractors for the norm-to-weak continuous semigroup and application to the nonlinear reaction-diffusion equations, *J. Differential Equations*, 223 (2), 367–399.

[70] E. Zuazua (1997), Finite dimensional null controllability for the semilinear heat equation, *J. Math. Pures et Appl.* 76, 570–594.