BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

NGUYỄN XUÂN TÚ

DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN VÀ BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN ĐỐI VỚI MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC SUY BIẾN MẠNH

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Toán giải tích**
Mã số: **9 46 01 02**

Hà Nội, 2021

Công trình được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2

Người hướng dẫn khoa học: GS. TS Cung Thế Anh

TS Trần Văn Bằng

Phản biện 1: PGS. TSKH Đoàn Thái Sơn, Viện Toán học, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam

Phản biện 2: PGS. TS Đỗ Đức Thuận, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Phản biện 3: PGS. TS Khuất Văn Ninh, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Luận án sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận án tiến sĩ cấp cơ sở họp tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 vào hồi . . . giờ . . . ngày . . . tháng . . . năm 2021.

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam;
- Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2.

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lí do chọn đề tài

Nhiều quá trình trong tự nhiên, khoa học, công nghệ và kĩ thuật dẫn đến việc nghiên cứu các lớp phương trình parabolic, như các quá trình truyền nhiệt, quá trình khuếch tán, các mô hình trong sinh thái học quần thể,... Vì vậy, việc nghiên cứu những lớp phương trình này có ý nghĩa quan trọng trong khoa học và công nghệ. Chính vì vậy nó đã và đang thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trên thế giới. Một trong những hướng tiếp cận đó là nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm khi thời gian ra vô cùng vì nó cho phép ta hiểu và dự đoán xu thế phát triển của hệ động lực trong tương lai, từ đó ta có thể có những điều chỉnh thích hợp để đạt được kết quả mong muốn. Bên cạnh đó việc nghiên cứu tính điều khiển được của các lớp phương trình parabolic cũng có ý nghĩa rất quan trọng vì dưới tác động các lớp hàm điều khiển chấp nhận được bài toán có thể điều khiển được về các vị trí mong muốn.

Trong những năm gần đây, sự tồn tại và các tính chất định tính của nghiệm, nói riêng là dáng điệu tiệm cận và tính điều khiển được đã được nghiên cứu cho nhiều lớp phương trình parabolic. Chẳng hạn, lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính trong trường hợp không suy biến hoặc suy biến yếu được nghiên cứu bởi nhiều tác giả trong cả miền bị chặn và không bị chặn (xem P. Cannarsa, P. Martinez và J. Vancostenoble (2008); V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik (2002);E. Fernández-Cara và S. Guerrero (2006); M. X. Thao (2016); N. T. C. Thuy và N. M. Tri (2012); C. K. Zhong, M. H. Yang và C.Y. Sun (2006),...). Cho đến nay, các kết quả về lí thuyết tập hút, lí thuyết điều khiển được đối với lớp phương trình parabolic không suy biến rất phong phú và khá hoàn thiện. Tuy nhiên, các kết quả tương ứng trong trường hợp phương trình parabolic suy biến mạnh chưa có nhiều. Khi xét trường hợp này do tính suy biến mạnh của hệ đã làm xuất hiện những khó khăn lớn về mặt toán học. Chẳng hạn, bài toán thiếu các định lí nhúng cần thiết, thiếu các kết quả cần thiết về tính chính quy nghiệm, thiếu các kết quả về nguyên lí cực trị, thiếu các ước lượng kiểu Carleman cần thiết.

Tính điều khiển của phương trình parabolic đã nhận được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trong hai thập niên gần đây. Lí thuyết điều khiển được đối với phương trình parabolic đều trong cả miền bị chặn và không bị chặn đã khá hoàn thiện. Trong thập kỉ gần đây, lý thuyết điều khiển được đối với phương trình parabolic suy biến đã được nghiên cứu nhiều bởi các nhà khoa học. Tuy nhiên, các kết quả chủ yếu trong một chiều (xem P. Cannarsa, G. Fragnelli và J. Vancostenoble (2006); P. Cannarsa, P. Martinez và J. Vancostenoble (2005); L. Miller (2005); C. Wang và R. Du (2013) và các tài liệu tham khảo trong đó). Theo hiểu biết của chúng tôi, có một vài kết quả đối với phương trình parabolic suy biến trong trường hợp nhiều chiều như chứa toán tử Grushin (xem C.T. Anh và V.M. Toi (2013); C.T. Anh và V.M. Toi (2016); K. Beauchard, P. Cannarsa và R. Guglielmi (2014); A. Koenig (2017); J. P. Raymond và H. Zidani (1999); E. Zuazua (1997)), phương trình dạng Kolmogorov (xem K. Beauchard (2013, 2014); J. Le Rousseau và I. Moyano (2016)) và phương trình parabolic suy biến (xem P. Cannarsa, P. Martinez và J. Vancostenoble (2009); C. Wang và R. Du (2013)).

Các phương trình parabolic suy biến mạnh xuất hiện một cách tự nhiên trong vật lí, hóa học, sinh học,... Hiện nay, việc nghiên cứu các lớp phương trình parabolic suy biến mạnh về dáng điệu tiệm cận nghiệm và bài toán điều khiển được đang là vấn đề mở, có nhiều ý nghĩa và thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới.

Với những phân tích trên, chúng ta thấy rằng đối với lớp phương trình parabolic suy biến mạnh, mặc dù đã có một số kết quả gần đây về lí thuyết tập hút và về tính điều khiển được, tuy nhiên, các kết quả thu được vẫn còn ít và còn nhiều vấn đề mở. Do đó, chúng tôi lựa chọn những vấn đề trên làm nội dung nghiên cứu của Luận án với tên gọi là "**Dáng điệu tiệm cận và bài toán điều khiển đối với một số lớp phương trình parabolic suy biến mạnh**".

2. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, dáng điệu tiệm cận nghiệm và bài toán điều khiển cho một số lớp phương trình parabolic suy biến mạnh bằng các phương pháp của Giải tích hàm.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

• *Đối tượng nghiên cứu*: Sự tồn tại nghiệm, dáng điệu tiệm cận nghiệm và bài toán điều khiển cho một số lớp phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh.

• *Phạm vi nghiên cứu:*

Nội dung 1: Nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm và dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh trên miền bị chặn.

Nội dung 2: Nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm và dáng điệu tiệm cận nghiệm của phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh trên toàn không gian $\mathbb{R}^N$.

Nội dung 3: Nghiên cứu bài toán điều khiển được đối với phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh trong miền nhiều chiều.

4. Phương pháp nghiên cứu

• *Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm*: Sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin, phương pháp compact và phương pháp năng lượng.

• *Nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm khi thời gian ra vô cùng:* Sử dụng các phương pháp của lí thuyết các hệ động lực tiêu hao vô hạn chiều.

• *Nghiên cứu bài toán điều khiển được:* Sử dụng phương pháp duy nhất Hilbert (HUM).

5. Kết quả của luận án

Các kết quả chính đạt được trong luận án bao gồm:

• Chứng minh được sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu, sự tồn tại tập hút toàn cục đối với lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử Δ_λ trên miền bị chặn.

• Chứng minh được sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu, sự tồn tại tập hút toàn cục đối với lớp phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trên toàn không gian $\mathbb{R}^N$.

• Chứng minh được tính điều khiển được về 0 tại mọi thời điểm $T > 0$ khi $s + \gamma \in (0, 1/2)$ (suy biến yếu). Khi $s = \gamma = 1/2$ (suy biến mạnh) với thời gian điều khiển đủ lớn $T \geq T^*$, ta chứng minh được tính điều khiển được về 0. Khi $s+\gamma > 1$ (suy biến quá mạnh) ta chứng minh được tính không điều khiển được về 0 đối với bài toán điều khiển cho lớp phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trong trường hợp nhiều chiều.

6. Cấu trúc của luận án

Ngoài phần mở đầu, kết luận, kiến nghị, danh mục các công trình công bố và danh mục tài liệu tham khảo, luận án gồm 4 chương:

• Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị.

• Chương 2. Tập hút toàn cục của một lớp phương trình parabolic suy biến mạnh trên miền bị chặn.

• Chương 3. Tập hút toàn cục của một lớp phương trình parabolic suy biến mạnh trên toàn không gian.

• Chương 4. Tính điều khiển được của lớp phương trình parabolic suy biến mạnh.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị gồm: Các lớp toán tử, các không gian hàm, lí thuyết tập hút toàn cục, bài toán điều khiển đối với phương trình parabolic, một số kết quả bổ trợ (Một số bất đẳng thức thường dùng, các bổ đề compact, các định lí hội tụ bị chặn) được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính của luận án ở các chương sau.

1.1. Các lớp toán tử

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu các lớp toán tử được nghiên cứu trong các bài toán của luận án gồm: Toán tử Δ_λ-Laplace được giới thiệu bởi Franchi và Lanconelli năm 1982 và gần đây năm 2013 được A. E. Kogoj và E. Lancenolli phát triển; Toán tử suy biến $P_{s,\gamma}$ là mở rộng của toán tử Grushin. Toán tử này suy biến tại những điểm của miền Ω có giao khác rỗng với các siêu phẳng $x = 0$ hoặc $y = 0$, và được giới thiệu bởi P. T. Thuy and N. M. Tri (2012).

1.2. Các không gian hàm

Trong luận án này chúng tôi sử dụng các không gian hàm: Không gian hàm Lebesgue: $L^p(\Omega), 1 \le p < +\infty$, $L^\infty(\Omega)$,$L^2(\Omega)$; Không gian hàm phụ thuộc thời gian: $C([0,T];X)$, $L^p(0,T;X), 1 \le p \le +\infty$; Không gian Sobolev có trọng: $\mathring{W}_\lambda^{1,2}(\Omega)$, $D(\Delta_\lambda)$, $S^1(\mathbb{R}^N)$ và $S^2(\mathbb{R}^N)$.

1.3. Lí thuyết tập hút toàn cục

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm về hệ động lực, tập hút toàn cục, và các định lí về sự tồn tại tập hút toàn cục sẽ được sử dụng trong luận án. Nội dung của mục này được viết dựa trên các tài liệu chuyên khảo của J. C. Robinson (2001) và R. Temam (1997).

1.4. Lí thuyết điều khiển được đối với phương trình parabolic tuyến tính

Trong mục này, chúng tôi trình bày về lí thuyết điều khiển được của hệ parabolic tuyến tính trong không gian vô hạn chiều.

1.4.1. Một số định nghĩa

Trong mục này, chúng tôi trình bày một số định nghĩa điều khiển được hay dùng liên quan đến bài toán điều khiển trong không gian vô hạn chiều: điều khiển được chính xác; điều khiển được chính xác đến quỹ đạo; điều khiển được về 0; điều khiển được xấp xỉ.

1.4.2. Phương pháp duy nhất Hilbert (HUM)

Trong mục này, chúng tôi trình bày phương pháp duy nhất Hilbert (HUM) mà được đưa ra đầu tiên bởi J.-L. Lions (1988) để đi nghiên cứu tính điều khiển được của hệ parabolic tuyến tính trong không gian vô hạn chiều.

1.5. Một số kết quả bổ trợ

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại một số bất đẳng thức sơ cấp nhưng rất quan trọng và thường xuyên được sử dụng trong luận án. Chúng tôi cũng trình bày lại một số bổ đề và định lí quan trọng thường được sử dụng để chứng minh các kết quả của luận án như: Bổ đề compact Aubin–Lions–Simon của F. Boyer và P. Fabrie (2013); Bổ đề 6.1 về sự hội tụ mạnh của hàm phi tuyến của P. G. Geredeli (2015); Đẳng thức Bessel-Parseval trong công trình của L. H. Loomis và S. Sternberg (1990) để nhiên cứu về tính điều khiển được.

Chương 2

TẬP HÚT TOÀN CỤC CỦA MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC SUY BIẾN MẠNH TRÊN MIỀN BỊ CHẶN

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu một lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh Δ_λ trên miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$, với lớp hàm phi tuyến kiểu mới không bị chặn trên đối với điều kiện tăng trưởng. Nội dung của chương này được viết dựa trên công trình [CT1] trong Danh mục công trình khoa học liên quan đến luận án.

2.1. Đặt bài toán

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu phương trình parabolic nửa tuyến tính suy biến mạnh sau

$$\begin{cases} u_t - \Delta_\lambda u + f(u) = g(x), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ với biên $\partial\Omega$ trơn. Để nghiên cứu bài toán (2.1), ta giả thiết điều kiện ban đầu $u_0 \in L^2(\Omega)$ cho trước, hàm phi tuyến f và ngoại lực g thỏa mãn các điều kiện sau:

(F) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục thỏa mãn

$$f'(u) \geq -\ell, \tag{2.2}$$

$$f(u)u \geq -\mu u^2 - C_1, \tag{2.3}$$

trong đó C_1, ℓ là các hằng số dương, $0 < \mu < \gamma_1$ với $\gamma_1 > 0$ là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta_\lambda$ trong miền Ω với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất;

(G) $g \in L^2(\Omega)$.

2.2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu

Định nghĩa 2.1. Hàm u được gọi là một nghiệm yếu của bài toán (2.1) trên $(0,T)$ với điều kiện ban đầu $u(0) = u_0 \in L^2(\Omega)$ nếu và chỉ nếu

$$u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)), f(u) \in L^1(Q_T),$$
$$\frac{du}{dt} \in L^2(0,T; (\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega))^*) + L^1(Q_T)$$

và $\left\langle \frac{du}{dt} - \Delta_\lambda u + f(u), w \right\rangle = \langle g, w \rangle$

với mọi hàm thử $w \in W := \overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ và với hầu khắp $t \in (0,T)$.

Kết quả về sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu của bài toán được trình bày trong định lí sau.

Định lí 2.1. *Giả sử điều kiện **(F)-(G)** được thỏa mãn. Khi đó, với bất kì $u_0 \in L^2(\Omega)$ và $T > 0$ cho trước, bài toán (2.1) có duy nhất nghiệm yếu u trên khoảng $(0,T)$. Hơn nữa, nghiệm yếu này phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu.*

2.3. Sự tồn tại của tập hút toàn cục

Định lí 2.1 cho phép ta xác định một nửa nhóm liên tục $S(t) : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ liên kết với bài toán (2.1) như sau

$$S(t)u_0 := u(t),$$

trong đó $u(\cdot)$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (2.1) với điều kiện ban đầu $u_0 \in L^2(\Omega)$.

2.3.1. Sự tồn tại các tập hấp thụ bị chặn

Bổ đề 2.1. *Giả sử các điều kiện **(F)-(G)** được thỏa mãn. Khi đó, nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ có một tập hấp thụ bị chặn trong $L^2(\Omega)$.*

Bổ đề 2.2. *Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ có một tập hấp thụ bị chặn trong $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_{\lambda}(\Omega)$.*

2.3.2. Tính compact tiệm cận của nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$

Bổ đề 2.3. *Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ có một tập hấp thụ bị chặn trong $D(\Delta_\lambda)$.*

Bổ đề 2.4. *Phép nhúng $D(\Delta_\lambda) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega)$ là compact.*

Sử dụng Bổ đề 2.2, Bổ đề 2.3 và Bổ đề 2.4 ta chứng minh được định lí sau:

Định lí 2.2. *Giả sử các điều kiện* **(F)–(G)** *được thỏa mãn. Khi đó, nửa nhóm $S(t)$ sinh bởi bài toán* (2.1) *có tập hút toàn cục $\mathscr{A}$ trong không gian $\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega)$.*

Chú ý cuối chương. Để kết thúc chương này, bây giờ chúng tôi đưa ra một số bình luận về kết quả của chương. Cụ thể:

- Lớp toán tử Δ_λ-Laplace nghiên cứu trong chương này chứa nhiều lớp toán tử elliptic suy biến như là toán tử suy biến Grushin và toán tử suy biến mạnh dạng $P_{s,\gamma}$. Toán tử Δ_λ có tính suy biến mạnh, vì vậy khi nghiên cứu lớp phương trình parabolic chứa toán tử này ta phải xây dựng các không gian Sobolev có trọng $\overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega)$, $D(\Delta_\lambda)$ và chứng minh được phép nhúng $D(\Delta_\lambda) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}_\lambda^{1,2}(\Omega)$ là compact.
- Sự khác biệt chính so với các công trình trước đó là số hạng phi tuyến $f(u)$ trong bài toán của chúng tôi chỉ thuộc không gian $L^1(Q_T)$ do không có giới hạn áp đặt cho điều kiện tăng trưởng trên của nó. Điều này dẫn đến một số khó khăn khi thiết lập các ước lượng tiên nghiệm, chuyển qua giới hạn đối với số hạng phi tuyến và chứng minh tính duy nhất của nghiệm.

Kết luận Chương 2.

Trong chương này, chúng tôi đã trình bày các kết quả về sự tồn tại, tính duy nhất và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào dữ kiện ban đầu, sự tồn tại tập hút toàn cục cùng với tính trơn của nó. Để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm chúng tôi đã sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin và phương pháp compact. Để chứng minh tính trơn của tập hút toàn cục, chúng tôi sử dụng phương pháp đánh giá tiên nghiệm tiệm cận.

Chương 3

TẬP HÚT TOÀN CỤC CỦA MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC SUY BIẾN MẠNH TRÊN TOÀN KHÔNG GIAN

Trong chương 3, chúng tôi nghiên cứu một lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trên toàn không gian $\mathbb{R}^N, N \geq 2$.

Nội dung của chương này được viết dựa trên công trình [CT2] trong Danh mục công trình khoa học đã công bố của luận án.

3.1. Đặt bài toán

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu phương trình parabolic nửa tuyến tính suy biến mạnh sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - P_{s,\gamma}u + f(X,u) + \lambda u = g(X), & X \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(X,0) = u_0(X), & X \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó $\lambda > 0, X = (x,y,z), \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \times \mathbb{R}^{N_3} (N_1, N_2, N_3 \geq 1)$, và $P_{s,\gamma}$ là toán tử suy biến mạnh đã được nêu ở Chương 1. Để nghiên cứu bài toán (3.1), ta giả thiết điều kiện ban đầu $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ cho trước, hàm phi tuyến f và ngoại lực g thỏa mãn các điều kiện sau:

(F) $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục thỏa mãn

$$f'_u(X,u) \geq -\ell, \tag{3.2}$$

$$f(X,u)u \geq -\mu u^2 - C_1(X), \tag{3.3}$$

trong đó $\ell > 0$, $0 < \mu < \lambda$, $C_1(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ là hàm không âm.

(G) $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

3.2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Định nghĩa 3.1. Hàm u gọi là một nghiệm yếu của bài toán (3.1) trên $(0,T)$ với điều kiện ban đầu $u(0)=u_0\in L^2(\mathbb{R}^N)$ nếu và chỉ nếu $u\in C([0,T];L^2(\mathbb{R}^N))\cap L^2(0,T;S^1(\mathbb{R}^N)), u_t\in L^2(0,T;S^{-1}(\mathbb{R}^N))\cap Ł^1(Q_T)$ và

$$\langle u_t,w\rangle-\langle P_{s,\gamma}u,w\rangle+\langle f(X,u),w\rangle+\lambda\langle u,w\rangle=\langle g,w\rangle,$$

với mọi hàm thử $w\in S^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ và với hầu khắp $t\in(0,T)$.

Định lí sau trình bày kết quả về sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu của bài toán (3.1).

Định lí 3.1. *Giả sử các điều kiện* **(F)-(G)** *được thỏa mãn. Khi đó, với bất kỳ $u_0\in L^2(\mathbb{R}^N)$ và $T>0$ cho trước, bài toán (3.1) có duy nhất nghiệm yếu u trên khoảng $(0,T)$. Hơn nữa, ánh xạ $u_0\mapsto u(t)$ là liên tục trên $L^2(\mathbb{R}^N)$.*

3.3. Sự tồn tại của tập hút toàn cục

Từ Định lí 3.1, ta có thể xác định một nửa nhóm liên tục $S(t):L^2(\mathbb{R}^N)\to L^2(\mathbb{R}^N)$ liên kết với bài toán (3.1) như sau

$$S(t)u_0:=u(t),$$

trong đó $u(\cdot)$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (3.1) với điều kiện ban đầu u_0. Chúng ta sẽ chứng minh nửa nhóm $S(t)$ có tập hút toàn cục $\mathscr{A}$ trong không gian $L^2(\mathbb{R}^N)$ và $S^1(\mathbb{R}^N)$.

3.3.1. Sự tồn tại các tập hấp thụ bị chặn

Bổ đề 3.1. *Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ có một tập hấp thụ bị chặn trong $L^2(\mathbb{R}^N)$.*

Bổ đề 3.2. *Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ có một tập hấp thụ bị chặn trong $S^1(\mathbb{R}^N)$.*

Bổ đề 3.3. *Giả sử các điều kiện $(\mathbf{F})-(\mathbf{G})$ thỏa mãn. Khi đó, với mọi tập con bị chặn B trong $L^2(\mathbb{R}^N)$, tồn tại hằng số $T=T(B)>0$ sao cho*

$$\|u_t(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\leq\rho_3\ \ \textit{với mọi}\ \ u_0\in B,\ \textit{và}\ \tau\geq T,$$

trong đó $u_t(\tau) = \dfrac{d}{dt}(S(t)u_0)|_{t=\tau}$ *và* ρ_3 *là hằng số dương không phụ thuộc vào* B.

Bây giờ, ta sẽ chỉ ra sự tồn tại tập hấp thụ bị chặn trong $S^2(\mathbb{R}^N)$.

Bổ đề 3.4. *Nửa nhóm* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *có một tập hấp thụ bị chặn trong* $S^2(\mathbb{R}^N)$*, nghĩa là, tồn tại hằng số* $\rho_4 > 0$ *sao cho với mọi tập bị chặn* $B \subset L^2(\mathbb{R}^N)$*, tồn tại* $T_B > 0$ *thỏa mãn*

$$\|P_{s,\gamma}u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \rho_4, \ \ \text{với mọi } t \geq T_B, u_0 \in B.$$

3.3.2. Sự tồn tại tập hút toàn cục trong $L^2(\mathbb{R}^N)$

Bổ đề 3.5. *Giả sử các điều kiện* **(F) - (G)** *được thỏa mãn. Khi đó, với mọi* $\epsilon > 0$ *và mọi tập bị chặn* $B \subset L^2(\mathbb{R}^N)$*, tồn tại* $T = T(\epsilon, B) > 0$ *và* $K = K(\epsilon, B) > 0$ *sao cho* $t \geq T$ *và* $R \geq K$,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R^*} |u(X,t)|^2 dX \leq \epsilon.$$

trong đó $B_R^* = B_{\mathbb{R}^{N_1}}(0,R) \times B_{\mathbb{R}^{N_2}}(0,R) \times B_{\mathbb{R}^{N_3}}(0,R^{1+s+\gamma})$.

Bổ đề sau đây chứng minh tính compact tiệm cận của $S(t)$ trong $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Bổ đề 3.6. *Giả sử các điều kiện* **(F) - (G)** *thỏa mãn. Khi đó, nửa nhóm* $S(t)$ *là compact tiệm cận trong* $L^2(\mathbb{R}^N)$*, nghĩa là, với mọi dãy bị chặn* $\{x_n\} \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ *và mọi dãy* $t_n \geq 0, t_n \to \infty, \{S(t_n)x_n\}$ *có một dãy con hội tụ tương ứng với tôpô của* $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Sau đây, chúng tôi chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục trong $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Định lí 3.2. *Giả sử các điều kiện* **(F) - (G)** *thỏa mãn. Khi đó, nửa nhóm* $S(t)$ *sinh bởi bài toán* (3.1) *có một tập hút toàn cục* $\mathscr{A}_{L^2}$ *trong* $L^2(\mathbb{R}^N)$.

3.3.3. Sự tồn tại tập hút toàn cục trong $S^1(\mathbb{R}^N)$

Bổ đề 3.7. *Giả sử các điều kiện* **(F) - (G)** *thỏa mãn. Khi đó, với mọi* $\epsilon > 0$ *và mọi tập bị chặn* $B \subset L^2(\mathbb{R}^N)$, *tồn tại* $T = T(\epsilon, B) > 0$ *và* $K = K(\epsilon, B) > 0$ *sao cho với mọi* $t \geq T$ *và* $R \geq K$,

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R^*} |\nabla_{s,\gamma} u|^2 dX \leq \epsilon.$$

Bổ đề sau đây chứng minh tính compact tiệm cận của nửa nhóm $S(t)$ trong $S^1(\mathbb{R}^N)$.

Bổ đề 3.8. *Giả sử các điều kiện* **(F) - (G)** *thỏa mãn. Khi đó,* $S(t)$ *là compact tiệm cận trong* $S^1(\mathbb{R}^N)$, *nghĩa là, với mọi dãy bị chặn* $\{x_n\} \subset S^1(\mathbb{R}^N)$ *và dãy* $t_n \geq 0, t_n \to \infty, \{S(t_n)x_n\}$ *có một dãy con hội tụ tương ứng với tôpô của* $S^1(\mathbb{R}^N)$.

Bây giờ, ta chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục của nửa nhóm $S(t)$ trong $S^1(\mathbb{R}^N)$.

Định lí 3.3. *Giả sử các điều kiện* **(F) - (G)** *thỏa mãn. Khi đó, nửa nhóm* $S(t)$ *sinh bởi bài toán* (3.1) *có một tập hút toàn cục* $\mathscr{A}_{S^1}$ *trong* $S^1(\mathbb{R}^N)$.

Chú ý cuối chương. Trước khi kết thúc chương này, chúng tôi đưa ra một số bình luận về những điểm mới chính của Chương 3. Cụ thể:

- Lớp phi tuyến $f(X, u)$ nghiên cứu trong Chương 3 đã loại bỏ giả thiết về điều kiện chặn trên được nghiên cứu trong nhiều công trình thời gian qua (xem C. T. Anh và T. D. Ke (2009); C. T. Anh và L. T. Tuyet (2013); A. E. Kogoj và S. Sonner (2013, 2014); D. Li và C. Sun (2016); M. X. Thao (2016); P. T. Thuy và N. M. Tri (2013) với miền bị chặn và C. T. Anh (2014); C. T. Anh và L. T. Tuyet (2013) với miền không bị chặn). Đặc biệt, lớp phi tuyến này chứa cả lớp phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng tiêu hao kiểu Sobolev; tăng trưởng tiêu hao kiểu đa thức, và thậm chí thỏa mãn cả điều kiện tăng trưởng kiểu mũ $f(X, u) = e^u$.

- Các kết quả trong chương này vẫn còn đúng khi thay $\mathbb{R}^N$ bởi một miền không bị chặn Ω tùy ý (khi đó ta cần bổ sung điều kiện biên Dirichlet thuần nhất trên $\partial\Omega$). Điểm khác biệt cơ bản của tình huống trong chương này với tình huống trong Chương 2 là các phép nhúng không còn compact (do đó nửa nhóm $S(t)$ sinh bởi bài toán không còn compact) và điều này gây ra những khó khăn rất lớn khi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và sự tồn tại tập hút toàn cục. Để vượt qua những khó khăn này, chúng tôi đã dùng Bổ đề compact Aubin–Lions–Simon khi chứng minh sự tồn tại nghiệm, và kết hợp thành công phương pháp đánh giá phần đuôi của nghiệm do B. Wang đưa ra năm 1999 với phương pháp đánh giá tiên nghiệm tiệm cân để chứng minh tính compact tiệm cận của nửa nhóm $S(t)$ trong $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Kết luận Chương 3

Trong chương này chúng tôi đã chứng minh được sự tồn tại tập hút toàn cục trong các không gian $L^2(\mathbb{R}^N)$ và $S^1(\mathbb{R}^N)$ đối với nửa nhóm sinh ra từ bài toán (3.1). Đầu tiên, bằng việc sử dụng phương pháp Galerkin, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại nghiệm yếu toàn cục và sau đó xây dựng được nửa nhóm gắn với bài toán (3.1). Tiếp theo, để vượt qua các khó khăn do tính không compact của phép nhúng gây ra, chúng tôi đã sử dụng phương pháp đánh giá phần đuôi của nghiệm do B. Wang đưa ra năm 1999 và kết hợp với phương pháp đánh giá tiên nghiệm tiệm cận.

Chương 4

TÍNH ĐIỀU KHIỂN ĐƯỢC CỦA LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC SUY BIẾN MẠNH

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu tính điều khiển được về 0 của phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trong trường hợp nhiều chiều. Đầu tiên, chúng tôi đặt bài toán và phát biểu kết quả chính của chương. Sau đó, chúng tôi đi chứng minh các kết quả bổ trợ bao gồm: tính đặt đúng của bài toán, khai triển Fourier, đánh giá tốc độ tán xạ, và đặc biệt là việc thiết lập bất đẳng thức Carleman mới. Tiếp theo, sử dụng phương pháp HUM, khai triển Fourier, các đánh giá về tốc độ tán xạ và bất đẳng thức Carleman mới vừa thiết lập, việc chứng minh tính điều khiển được đưa về tính quan sát được đều đối với tần số của hệ số Fourier của hệ liên hợp sau khi đã biến đổi Fourier.

Nội dung của chương này dựa trên công trình [CT3] trong Danh mục công trình khoa học liên quan đến luận án.

4.1. Đặt bài toán và phát biểu kết quả chính

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu tính điều khiển được về 0 của phương trình parabolic tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ sau:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u - \Delta_y u - |x|^{2s}|y|^{2\gamma}\Delta_z u = v(x,y,z,t)1_\omega, & (x,y,z,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u = 0, & (x,y,z,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z), & (x,y,z) \in \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

trong đó $\Omega := \Omega_{12} \times \Omega_3$, Ω_{12} miền con trơn, mở, bị chặn của $\mathbb{R}^{N_1+N_2}$ sao cho $(0_{\mathbb{R}^{N_1}}, 0_{\mathbb{R}^{N_2}}) \in \Omega_{12}$, Ω_3 là miền con trơn, mở, bị chặn của $\mathbb{R}^{N_3}$; $(x,y,z) = (x_1,\dots,x_{N_1},y_1,\dots,y_{N_2},z_1,\dots,z_{N_3}) \in \mathbb{R}^{N_1+N_2} \times \mathbb{R}^{N_3}$; $\omega \subset \Omega$ và $s,\gamma \geq 0, s+\gamma > 0$; 1_ω kí hiệu là hàm đặc trưng của tập con mở khác rỗng ω của Ω.

Ta nói rằng (4.1) là điều khiển được về 0 (tại thời điểm T) nếu với mỗi $u_0 \in L^2(\Omega)$ cho trước, tồn tại điều khiển $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ sao cho nghiệm $u(x,y,z,t)$ của (4.1) thỏa mãn $u(\cdot,\cdot,\cdot,T) = 0$.

Mục tiêu chính của chương này là chứng minh kết quả sau.

Định lí 4.1. *Cho $\omega = \omega_{12} \times \Omega_3$, ω_{12} là tập con mở khác rỗng của Ω_{12}.*

(1) Nếu $s+\gamma \in (0,1/2)$ thì bài toán (4.1) *điều khiển được về* 0 *với mọi thời gian $T > 0$.*

(2) Nếu $s = \gamma = 1/2$ thì tồn tại $T^* > 0$ thỏa mãn bài toán (4.1) *là điều khiển được về* 0 *với thời gian $T \geq T^*$.*

(3) Nếu $s+\gamma > 1$ thì bài toán (4.1) *không điều khiển được về* 0.

4.2. Một số kết quả bổ trợ

4.2.1. Tính đặt đúng của bài toán

Trước tiên, ta định nghĩa nghiệm yếu của bài toán (4.1).

Định nghĩa 4.1. Hàm u được gọi là một nghiệm yếu của bài toán (4.1) trên $(0,T)$ với điều kiện ban đầu $u(0) = u_0$ nếu và chỉ nếu

$$u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; S_0^1(\Omega)), u_t \in L^2(0,T; S^{-1}(\Omega))$$

và

$$\left\langle u_t - \Delta_x u - \Delta_y u - |x|^{2s}|y|^{2\gamma}\Delta_z u, \varphi \right\rangle = \langle v(x,y,z,t)1_\omega, \varphi \rangle$$

với mọi hàm thử $\varphi \in L^2(0,T; S_0^1(\Omega))$ và với hầu khắp $t \in (0,T)$.

Sử dụng phương pháp Galerkin, ta chứng minh được kết quả sau.

Định lí 4.2. *Với mỗi $u_0 \in L^2(\Omega)$ và $v \in L^2(0,T; L^2(\omega))$ cho trước, bài toán* (4.1) *có duy nhất một nghiệm yếu thỏa mãn*

$$u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; S_0^1(\Omega)).$$

Hơn nữa,

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(0,T;S^1_0(\Omega))} \le C\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(0,T;L^2(\omega))}\right),$$

ở đây C là hằng số dương không phụ thuộc vào u_0 và v.

4.2.2. Khai triển Fourier và tốc độ tán xạ

Ta xét $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ là dãy các giá trị riêng không giảm của toán tử $-\Delta_z$ trong $H^2(\Omega_3)\cap H^1_0(\Omega_3)$ và các vectơ riêng liên quan $(\varphi_n(y))_{n\in\mathbb{N}^*}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} -\Delta_z\varphi_n(z) = \chi_n\varphi_n(z), & z\in\Omega_3,\\ \varphi_n(z) = 0, & z\in\partial\Omega_3. \end{cases}$$

Với mọi nghiệm yếu $u(x,y,z,t)$ của hệ (4.1) và mọi điều khiển $v(x,y,z,t)$, ta xét

$$u_n(x,y,t) = \int_{\Omega_3} u(x,y,z,t)\varphi_n(z)dz; \quad v_n(x,y,t) = \int_{\Omega_3} v(x,y,z,t)\varphi_n(z)dz. \tag{4.2}$$

Thay (4.2) vào (4.1), ta nhận được mệnh đề sau.

Mệnh đề 4.1. *Với $u_0\in L^2(\Omega)$ cho trước và u là nghiệm yếu tương ứng duy nhất của bài toán (4.1). Khi đó, với mọi $n\in\mathbb{N}^*$, hàm $u_n(x,y,t)$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial t} - \Delta_x u_n - \Delta_y u_n + \chi_n|x|^{2s}|y|^{2\gamma}u_n = v_n 1_{\omega_{12}}(x,y) & \text{trong } \Omega_{12}\times(0,T),\\ u_n = 0 & \text{trên } \partial\Omega_{12}\times(0,T),\\ u_n(x,y,0) = u_{0,n}(x,y) & \text{trong } \Omega_{12}, \end{cases} \tag{4.3}$$

với $u_{0,n}(x,y) = \int_{\Omega_3} u_0(x,y,z)\varphi_n(z)dz$.

Ta biết rằng giá trị riêng nhỏ nhất của $-\Delta\varphi(x,y) + \chi_n|x|^{2s}|y|^{2\gamma}\varphi(x,y)$ trong $H^2(\Omega_{12})\cap H^1_0(\Omega_{12})$ được cho bởi

$$\lambda_{n,s,\gamma} := \min_{\substack{\varphi\in H^1_0(\Omega_{12})\\ \varphi\neq 0}} \left\{ \frac{\int_{\Omega_{12}}\left(|\nabla\varphi(x,y)|^2 + \chi_n|x|^{2s}|y|^{2\gamma}|\varphi|^2\right)dxdy}{\int_{\Omega_{12}}|\varphi|^2dxdy} \right\}.$$

Khi đó, dáng điệu (khi $|n|\to+\infty$) của $\lambda_{n,s,\gamma}$ được cho bởi mệnh đề sau.

Mệnh đề 4.2. *Với mọi $s,\gamma \geq 0, s+\gamma > 0$, tồn tại $c_* = c_*(s,\gamma) > 0$ và $c^* = c^*(s,\gamma) > 0$ sao cho*

$$c_*\chi_n^{\frac{1}{1+s+\gamma}} \leq \lambda_{n,s,\gamma} \leq c^*\chi_n^{\frac{1}{1+s+\gamma}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{4.4}$$

4.2.3. Bất đẳng thức Carleman

Định lí 4.3. *(Bất đẳng thức Carleman). Tồn tại các hằng số dương $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}_1(\beta)$ và $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2(\beta)$ sao cho $w \in C^0([0,T]; L^2(\Omega_{12})) \cap L^2(0,T; H_0^1(\Omega_{12}))$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{K}_2 \iint\limits_{\Omega_{12}\times(0,T)} e^{-2M\sigma}\left(\frac{M}{t(T-t)}|\nabla w|^2 + \frac{M^3}{(t(T-t))^3}|w|^2\right) dxdydt \\
&\leq \iint\limits_{\omega_{12}\times(0,T)} e^{-2M\sigma}\frac{M^3}{(t(T-t))^3}|w|^2 dxdydt + \iint\limits_{Q} e^{-2M\sigma}|G_{n,s,\gamma}w|^2 dxdydt,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

trong đó

$$M = M(\chi_n, T, \beta) := \begin{cases} \mathcal{K}_1 \max\left\{T + T^2; \chi_n^{2/3}T^2\right\} & \text{nếu } 0 < s+\gamma < 1/2, \\ \mathcal{K}_1 \max\left\{T + T^2; \chi_n^{1/2}T^2\right\} & \text{nếu } s = \gamma = 1/2. \end{cases}$$

4.3. Chứng minh kết quả chính

4.3.1. Lược đồ chứng minh Định lí 4.1

Từ phương pháp HUM, tính điều khiển được về 0 của bài toán (4.1) tương đương với tính quan sát được cho bài toán liên hợp sau

$$\begin{cases} w_t + \Delta_x w + \Delta_y w + |x|^{2s}|y|^{2\gamma}\Delta_z w = 0, & (x,y,z,t) \in \Omega \times (0,T), \\ w = 0, & (x,y,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ w(x,y,z,T) = w_T(x,y,z), & (x,y,z) \in \Omega. \end{cases} \tag{4.6}$$

Định nghĩa 4.2. Bài toán (4.6) là quan sát được trong ω tại thời điểm T nếu tồn tại $C > 0$, sao cho với mọi $w_T \in L^2(\Omega)$, nghiệm w của bài toán (4.6) thỏa mãn

$$\|w(x,y,z,0)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\int_0^T\int_\omega |w(x,y,z,t)|^2 dxdydt.$$

Giả sử w là nghiệm của (4.6). Ta khai triển $w = w(x,y,z,t)$ thành chuỗi Fourier theo z.

$$w_n(x,y,t) = \int_{\Omega_3} w(x,y,z,t)\varphi_n(z)dz; \quad w_{T,n}(x,y) = \int_{\Omega_3} w_T(x,y,z)\varphi_n(z)dz.$$

Khi đó $w_n(x,y,t)$ là nghiệm của bài toán sau (bài toán liên hợp của (4.3)).

$$\begin{cases} \partial_t w_n + \Delta_x w_n + \Delta_y w_n - \chi_n |x|^{2s}|y|^{2\gamma} w_n = 0, & (x,y,t) \in \Omega_{12} \times (0,T), \\ w_n = 0, & (x,y,t) \in \partial\Omega_{12} \times (0,T), \\ w_n(x,y,T) = w_{T,n}(x,y), & (x,y) \in \Omega_{12}, \end{cases} \tag{4.7}$$

Ta chú ý rằng, với hầu khắp $t \in (0,T)$, và với mọi tập mở ω_{12} của Ω_{12}, ta có

$$\int_{\omega_{12}\times\Omega_3} |w(x,y,z,t)|^2 dxdydz = \sum_n \int_{\omega_{12}} |w_n(x,y,t)|^2 dxdy.$$

Điều này có được từ đẳng thức Bessel-Parseval. Do đó, tính quan sát được của bài toán (4.6) tương đương tính quan sát được đều theo $n \in \mathbb{N}^*$ của bài toán (4.7). Ta có Định nghĩa sau đây về tính quan sát được đều.

Định nghĩa 4.3. (Tính quan sát được đều). Cho ω_{12} là tập mở của Ω_{12}. Bài toán (4.7) là quan sát được trong ω_{12} đều theo $n \in \mathbb{N}^*$ nếu tồn tại $C > 0$, sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}^*, w_{T,n} \in L^2(\Omega_{12})$, nghiệm của (4.7) thỏa mãn

$$\int_{\Omega_{12}} |w_n(x,y,0)|^2 dx \le C \int_0^T \int_{\omega_{12}} |w_n(x,y,t)|^2 dxdydt.$$

4.3.2. Chứng minh tính điều khiển được trong Định lí 4.1

Định lí sau đây cho ta các kết luận về tính điều khiển được trong Đinh lí 4.1. Chứng minh dựa trên bất đẳng thức Carleman (4.5) được thiết lập cho nghiệm của bài toán (4.7) và tốc độ tán xạ (4.4).

Định lí 4.4. *Cho ω_{12} là miền con mở khác rỗng của Ω_{12}.*

- *Nếu $s + \gamma \in (0, 1/2)$ thì bài toán (4.7) quan sát được trong ω_{12} đều theo $n \in \mathbb{N}^*$ với mọi $T > 0$.*
- *Nếu $s = \gamma = 1/2$ thì tồn tại $T^* > 0$ sao cho bài toán (4.7) quan sát được trong ω_{12} đều theo $n \in \mathbb{N}^*$ với mọi $T \ge T^*$.*

4.3.3. Chứng minh tính không điều khiển được trong Định lí 4.1

Bây giờ ta chứng minh kết quả không điều khiển được trong Định lí 4.1 bằng cách chứng minh bài toán (4.7) không quan sát được đều theo $n \in \mathbb{N}^*$.

Định lí 4.5. *Cho* Ω_{12} *là dạng* $(-1,1)^{N_1+N_2}$*. Nếu* $s+\gamma>1$*, và* $\omega_{12}=(a,b)^{N_1+N_2}$*, với*

$$\left[\frac{\min\{(N_1-1)^{\frac{s+1}{2}}N_2^{\frac{\gamma+1}{2}},(N_2-1)^{\frac{\gamma+1}{2}}N_1^{\frac{s+1}{2}}\}}{N_1^{\frac{s+1}{2}}N_2^{\frac{\gamma+1}{2}}}\right]^{\frac{1}{2+s+\gamma}} < a < b \le 1,$$

thì bài toán (4.7) *không quan sát được trong* ω_{12} *đều theo* $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta chứng minh định lí này bằng cách chọn các hàm thử sao cho tính quan sát đều không xảy ra.

Chú ý cuối chương. Trong chương này, chúng tôi đã dùng lược đồ chứng minh được sử dụng trong các công trình: C. T. Anh và V. M. Toi (2013); K. Beauchard, P. Cannarsa và R. Guglielmi (2014), và đặc biệt là cách tiếp cận trong công trình của K. Beauchard, P. Cannarsa và M. Yamamoto (2014) đối với toán tử Grushin. Tuy nhiên, do tính suy biến mạnh của toán tử $P_{s,\gamma}$ dẫn đến xuất hiện số hạng $\chi_n|x|^{2s}|y|^{2\gamma}w$ trong toán tử $P_{n,s,\gamma}$, đã gây ra một số khó khăn khi thiết lập bất đẳng thức Carleman. Để vượt qua khó khăn này, bên cạnh việc chọn hàm trọng thích hợp $\sigma(x,y,t)$ và hằng số λ, chúng tôi khai thác một số kĩ thuật được sử dụng trong chứng minh Bổ đề 5.2 trong công trình của E. Fernández–Cara (1997) và Mệnh đề 2.5 trong công trình của C. T. Anh và V. M. Toi (2013). Các kết quả nhận được, nói riêng, là mở rộng kết quả đã có (xem C. T. Anh và V. M. Toi (2013); K. Beauchard, P. Cannarsa và R. Guglielmi (2014); K. Beauchard, P. Cannarsa và M. Yamamoto (2014)).

Kết luận Chương 4

Trong chương này, chúng tôi đã nghiên cứu tính điều khiển được về 0 của phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Các kết quả đạt được là:

- Khi $s + \gamma \in (0, 1/2)$: Chứng minh được tính điều khiển được về 0 tại mọi thời điểm $T > 0$.
- Khi $s = \gamma = 1/2$: Chứng minh được tính điều khiển được về 0 khi thời gian điều khiển đủ lớn.
- Khi $s + \gamma > 1$: Chứng minh được tính không điều khiển được về 0.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, dáng điệu tiệm cận nghiệm và tính điều khiển được về 0 đối với lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh. Các kết quả đạt được của luận án bao gồm:

- Chứng minh được sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu, sự tồn tại tập hút toàn cục đối với một lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh Δ_λ trên miền bị chặn.
- Chứng minh được sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm yếu, sự tồn tại tập hút toàn cục đối với một lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trên toàn không gian $\mathbb{R}^N$.
- Chứng minh được tính điều khiển được về 0 tại mọi thời điểm $T > 0$ khi $s + \gamma \in (0, 1/2)$ (suy biến yếu). Khi $s = \gamma = 1/2$ (suy biến mạnh) chứng minh được tính điều khiển được về 0 khi thời gian đủ lớn. Khi $s+\gamma > 1$ (suy biến quá mạnh) chứng minh được tính không điều khiển được về 0 đối với bài toán điều khiển cho lớp phương trình parabolic chứa toán tử suy biến mạnh $P_{s,\gamma}$ trong trường hợp nhiều chiều.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở cần được tiếp tục nghiên cứu như:

- Nghiên cứu các tính chất của tập hút toàn cục nhận được của Chương 2 và Chương 3, chẳng hạn nghiên cứu tính trơn của tập hút, đánh giá số chiều fractal, sự phụ thuộc liên tục vào tham biến,...

- Nghiên cứu sự tồn tại tập hút toàn cục của lớp phương trình parabolic nửa tuyến tính chứa toán tử suy biến mạnh Δ_λ trên toàn không gian $\mathbb{R}^N$.
- Nghiên cứu tính điều khiển được cho bài toán (4.1) trong các trường hợp còn lại của s và γ: Liệu có điều khiển được về 0 khi $s+\gamma \in (1/2;1)$? Liệu có điều khiển được về 0 tại thời gian đủ lớn, không điều khiển được về 0 khi thời gian bé, khi $s+\gamma = 1, s, \gamma \neq 1/2$?

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN LUẬN ÁN

[CT1]. D.T. Quyet, L.T. Thuy and N.X. Tu (2017), Semilinear strongly degenerate parabolic equations with a new class of nonlinearities, *Vietnam J. Math.* 45 (3), 507–517.

[CT2]. N.X. Tu (2021), Global attractor for a semilinear strongly degenerate parabolic equation with exponential nonlinearity in unbounded domains, *Commun. Korean Math. Soc.,* accepted.

[CT3]. C.T. Anh and N.X. Tu, Null controllability of a strongly degenerate parabolic equation, *submitted.*

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại:

• Hội thảo khoa học "Toán học trong sự nghiệp đổi mới giáo dục", Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, 22/10/2017;

• Đại hội toán học Việt Nam lần thứ *IX*, 14 – 18/08/2018;

• Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2;

• Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;

• Seminar của Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hùng Vương.