BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

DÁNG ĐIỆU NGHIỆM CỦA MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HOÁ KHÔNG ĐỊA PHƯƠNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội, 2021

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

TRẦN VĂN TUẤN

DÁNG ĐIỆU NGHIỆM CỦA MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HOÁ KHÔNG ĐỊA PHƯƠNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 9 46 01 02

Người hướng dẫn khoa học

PGS. TS. Trần Đình Kế

HÀ NỘI, 2021

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi, được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Trần Đình Kế. Các kết quả trình bày trong luận án là trung thực và chưa từng được công bố trong bất kì luận văn, luận án nào khác.

Nghiên cứu sinh

Trần Văn Tuấn

LỜI CẢM ƠN

Luận án được thực hiện tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TS. Trần Đình Kế. Nhân dịp này, tác giả xin tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới Thầy. Thầy không những hướng dẫn và truyền đạt cho tác giả những kinh nghiệm trong nghiên cứu khoa học mà còn cả những điều thật quý báu trong cuộc sống. Sự động viên tin tưởng của Thầy là động lực chính giúp tác giả hoàn thiện luận án này.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới các thầy, cô trong Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, đã tạo điều kiện thuận lợi và giúp đỡ tác giả trong thời gian học tập, và nghiên cứu.

Đặc biệt, tác giả xin cũng chân thành cảm ơn các giáo sư, các nhà khoa học, các chuyên gia, các anh chị em và các bạn bè đồng nghiệp vì những trao đổi, góp ý quý báu về chuyên môn trong những buổi xêmina tại các Xêmina Giải tích, khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, Xêmina Phương trình vi phân và tích phân, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

Tác giả xin trân trọng gửi lời cảm ơn chân thành tới Ban giám hiệu, Phòng Đào tạo và các Phòng ban Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Lời cảm ơn cuối cùng, tác giả xin dành cho gia đình, những người luôn ở bên, chia sẻ, động viên tác giả vượt qua mọi khó khăn để hoàn thành luận án.

Tác giả

Trần Văn Tuấn

Mục lục

MỘT SỐ KÍ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG LUẬN ÁN

$\mathbb{R}^N$	Không gian Euclid N chiều
Ω	Miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ với biên $\partial\Omega$
$C^k(\Omega)$	Không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp k trong miền Ω
$L^p(\Omega)$	Không gian các hàm khả tích Lebesgue bậc p trong miền Ω
$L^\infty(\Omega)$	Không gian các hàm đo được bị chặn hầu khắp trên Ω
$L^p_{loc}(\Omega)$	Không gian các hàm khả tích Lebesgue địa phương bậc p trên Ω
$D_0^\alpha f(t)$	Đạo hàm phân thứ Caputo cấp α của hàm $f(t)$
${}^{RL}D_0^\alpha f(t)$	Đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville cấp α của hàm $f(t)$
$D(A)$	Miền xác định của toán tử A
$\rho(A)$	Tập giải của toán tử A
$\sigma(A)$	Tập phổ của toán tử A
$\mathcal{L}(X, Y)$	Không gian các toán tử tuyến tính bị chặn từ không gian Banach X vào không gian Banach Y
$\mathcal{L}(X)$	Không gian các toán tử tuyến tính bị chặn từ không gian Banach X vào chính nó
$\mathcal{K}(X)$	Không gian các toán tử compact từ không gian Banach X vào chính nó
$B_r(x_0)$	Hình cầu đóng tâm tại điểm x_0, bán kính r trong không gian Banach X
B_r	Hình cầu đóng tâm tại điểm gốc, bán kính r trong không gian Banach X
MNC	Độ đo không compact
$\|\cdot\|_{op}$	Chuẩn của toán tử tuyến tính bị chặn trên X
FrDE	Phương trình vi phân phân thứ
NDE	Phương trình vi phân không địa phương

MỞ ĐẦU

1. Tổng quan về tình hình nghiên cứu và lí do chọn đề tài

Thuật ngữ "*phương trình vi phân không địa phương*" (NDE) dùng để chỉ những phương trình vi phân mà trong đó đạo hàm của hàm trạng thái không xác định tại từng điểm mà xác định thông qua một công thức tích phân (gọi là đạo hàm "*có nhớ*"). Một trong các lớp NDE tiêu biểu là lớp NDE dùng để mô tả các quá trình khuếch tán dị thường (anomalous diffusion)

$$\partial_t\big(k * [u - u(0)]\big) = \Delta u, \tag{1}$$

trong đó $u = u(x,t)$ là hàm trạng thái, k là một hàm khả tích địa phương, '*' là kí hiệu tích chập Laplace, Δ là toán tử Laplace theo biến không gian. Lớp NDE này đã và đang nhận được quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học. Có thể kể ra một số kết quả tiêu biểu theo hướng nghiên cứu lớp phương trình khuếch tán dị thường trong các công trình [44, 45, 68, 83]. Trong trường hợp đặc biệt khi

$$k(t) = g_{1-\alpha}(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, t > 0, \alpha \in (0,1), \tag{2}$$

phương trình (1) chính là phương trình dưới khuếch tán, là đối tượng nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong hai thập kỷ qua. Phương trình (1) với nhân k được cho bởi (2) còn được gọi là phương trình vi phân phân thứ (FrDE). Có thể thấy FrDE là mô hình tiêu biểu của NDE, hiện là chủ đề nghiên cứu có tính thời sự.

FrDE là hướng nghiên cứu của giải tích phân thứ được đề xuất nghiên cứu vào năm 1695 bởi Leibniz và Euler sau đó được phát triển bởi nhiều nhà toán học như Laplace, Fourier, Liouville, Riemann, Laurant, Hardy, và Riesz,...[46, 65, 72, 77]. Trong vài thập kỷ trở lại đây, người ta đã tìm thấy rất nhiều ứng dụng của giải tích phân thứ nói chung và FrDE nói riêng trong các ngành khoa học công nghệ, chẳng hạn như các bài toán liên quan đến điện hóa học, lưu biến học, vật liệu xốp, vật liệu đàn hồi, vật liệu fractal,... Chi tiết một số bài toán mô tả bởi FrDE có thể tìm thấy trong các cuốn sách chuyên khảo (xem [31, 72, 74, 77]). Phạm vi ứng dụng ngày càng rộng của FrDE đã thúc đẩy nhiều nghiên cứu định tính trong những năm gần đây.

Một trong những vấn đề trung tâm trong lí thuyết định tính phương trình vi-tích phân là nghiên cứu dáng điệu nghiệm. Trong phạm vi của luận án này, dáng điệu nghiệm của NDE bao gồm các câu hỏi về dáng điệu nghiệm trong thời gian hữu hạn, tính ổn định nghiệm và nghiệm phân rã.

Trong khoảng hai thập kỷ trở lại đây, hướng nghiên cứu tính ổn định nghiệm đối với FrDE trong không gian hữu hạn và vô hạn chiều đã nhận được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học trong và ngoài nước. Với các FrDE trong không gian hữu hạn chiều, bài toán nghiên cứu tính ổn định nghiệm đã đạt được nhiều kết quả cơ bản và có tính hệ thống. Phương pháp hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định cho FrDE đã được đề xuất trong [49] bởi Lakshmikantham. Sau đó, phương pháp này được áp dụng để nghiên cứu tính ổn định cho nhiều lớp FrDE như: FrDE chứa xung [1], phương trình vi phân hàm phân thứ [76],... (xem thêm trong bài báo tổng quan [52]). Các điều kiện ổn định cho FrDE tuyến tính thông qua số mũ Lyapunov phân thứ được thiết lập trong [21], và ổn định tuyến tính hoá cho FrDE nửa tuyến tính được nghiên cứu trong [22]. Thêm vào đó, sử dụng một vài công cụ khác như bất đẳng thức kiểu Gronwall, nguyên lí so sánh hay hàm ma trận Mittag-Leffler, các tác giả đã thu được các kết quả về ổn định trong thời gian hữu hạn [47, 50, 51, 92].

Không giống như FrDE trong không gian hữu hạn chiều, việc nghiên cứu tính ổn định cho FrDE trong không gian vô hạn chiều gặp nhiều khó khăn. Trên thực tế, vì cấu trúc vô hạn chiều của không gian pha, kéo theo các tính toán đối với đạo hàm phân thứ trên phiếm hàm Lyapunov khó thực hiện, nên việc áp dụng phương pháp hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định tiệm cận cho FrDE không khả thi. Chính vì thế kết quả về tính ổn định của nghiệm đối với các FrDE trong không gian vô hạn chiều còn ít được biết đến. Do đó, để nghiên cứu tính ổn định cho FrDE trong không gian vô hạn chiều ta cần tìm một cách tiếp cận mới.

Gần đây, trong công trình [19] các tác giả đã nghiên cứu tính ổn định theo nghĩa Lyapunov đối với một lớp phương trình tán xạ-sóng nửa tuyến tính chứa xung và trễ hữu hạn bằng cách sử dụng phương pháp điểm bất động. Trong [5] các tác giả đã thiết lập sự tồn tại nghiệm phân rã kiểu đa thức cho một lớp FrDE trung tính chứa trễ vô hạn bằng cách sử dụng định lí điểm bất động cho ánh xạ nén. Một số kết quả khác về tính giải được, tính ổn định tiệm cận, và sự tồn tại nghiệm phân rã cho FrDE trong không gian vô hạn chiều ta có thể tham khảo các công trình [6, 41, 85, 90].

Trong những năm gần đây, hệ động lực trong thời gian hữu hạn đã được nghiên cứu rộng rãi bởi nhiều nhà toán học. Động cơ đầu tiên thúc đẩy nghiên cứu hệ động lực trong thời gian hữu hạn là tính toán trường vectơ trong khoảng thời gian bị chặn $t \in [t_0, t_1]$ của hệ động lực sinh bởi phương trình vi phân

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big). \tag{3}$$

Khi phương trình (3) được xét trên nửa trục, người ta quan tâm tới dáng điệu trong thời gian ngắn của nghiệm, nghĩa là dáng điệu của nghiệm trong $[t_0, t_1]$. Việc nghiên cứu này nảy sinh từ các bài toán vận chuyển trong chất lỏng, mạng hoá sinh, truyền tín hiệu (xem [15, 70]), ở đó các quá trình xảy ra trong thời gian ngắn. Do đó, việc nghiên cứu dáng điệu nghiệm trong thời gian hữu hạn đóng vai trò quan trọng và có nhiều ý nghĩa thực tiễn. Trong luận án, chúng tôi sử dụng khái niệm tính hút trong thời gian hữu hạn được đưa ra trong [27] để phân tích dáng điệu nghiệm tại thời điểm cuối. Cụ thể, một nghiệm y của hệ (3) được gọi là hút trên $[0, T]$ nếu tồn tại số $\eta > 0$ sao cho với bất kì nghiệm $x(\cdot, \xi)$ của (3) với dữ kiện ban đầu ξ ta có

$$\|x(T, \xi) - y(T, y(0))\| < \|\xi - y(0)\|, \ \forall \xi \in B_\eta\big(y(0)\big)\backslash\{y(0)\},$$

trong đó $B_\eta(y_0)$ là hình cầu tâm tại y_0 bán kính η. Nếu ta có

$$\limsup_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\eta} \sup_{\xi \in B_\eta(y(0))} \|x(T, \xi) - y(T, y(0))\| < 1,$$

thì nghiệm y được gọi là hút mũ trên $[0, T]$. Một số kết quả tiêu biểu theo hướng nghiên cứu tính hút trong thời gian hữu hạn cho phương trình vi phân thường có thể tìm thấy trong các công trình [14, 15, 27, 29]. Theo như khảo sát của chúng tôi, chưa có nghiên cứu nào về dáng điệu trong thời gian hữu hạn của FrDE trong không gian vô hạn chiều, đặc biệt cho lớp phương trình được đưa về phương trình dưới khuếch tán. Do đó chúng tôi đặt vấn đề nghiên cứu sự tồn tại và tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm đối với phương trình dưới khuếch tán chứa nhiễu phi tuyến trong không gian Banach X:

$$\frac{d}{dt}\big(g_{1-\alpha} * [u - u(0)]\big)(t) = Au(t) + f\big(u(t)\big), t \in [0, T], \tag{4}$$

ở đó $T > 0$ cố định; hàm trạng thái $u(\cdot)$ nhận giá trị trong không gian Banach X; A là toán tử tuyến tính, đóng và không bị chặn; $f : X \to X$ là hàm phi tuyến; $g_{1-\alpha} * v$, với $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; X)$ là tích chập Laplace.

Các NDE theo biến thời gian như phương trình (4) với A là toán tử đạo hàm riêng elliptic cấp hai được sử dụng trong vật lí toán để mô hình hoá các quá trình động lực học trong vật liệu có tính nhớ. Trong công trình [45], các tác giả đã chỉ ra rằng nếu thay nhân $g_{1-\alpha}$ bởi các nhân khả tích địa phương khác, ta có thể dùng phần tuyến tính của hệ (4) để mô tả nhiều quá trình như quá trình khuếch tán nhanh và quá trình khuếch tán siêu chậm.

Sử dụng bất đẳng thức kiểu Gronwall (xem Bổ đề 1.3, Mục 1.8, Chương 1) cùng với các ước lượng địa phương của nghiệm (ước lượng với dữ kiện ban đầu nhỏ), chúng tôi chứng minh tính hút và hút mũ của *nghiệm tầm thường* (nghiệm 0) và nghiệm tuỳ ý cho phương trình (4), ở đó số hạng phi tuyến f cho phép tăng trưởng trên tuyến tính.

Khi mô hình hoá một bài toán bởi một hệ phương trình tiến hoá, có hai tình huống được xem xét. Tình huống đầu tiên là ta có thể xác định được các hệ số và dữ kiện ban đầu của hệ phương trình. Khi đó ta có thể giải hệ hoặc nghiên cứu các tính chất định tính của nghiệm bằng các công cụ giải tích. Bài toán ứng với tình huống này gọi là bài toán thuận (forward problem). Tình huống thứ hai xảy ra khi ta không xác định được đầy đủ các hệ số trong phương trình hoặc không đo được dữ kiện ban đầu. Khi đó cùng lúc ta phải xác định các hệ số hoặc dữ kiện và nghiệm tương ứng của hệ dựa vào những 'đo đạc' bổ sung. Lúc này ta có bài toán ngược (inverse problem). Cần nhấn mạnh rằng, khác với bài toán thuận, bài toán ngược thường là bài toán đặt không chỉnh theo nghĩa Hadamard, có độ phức tạp cao và cần có cách tiếp cận phù hợp với từng trường hợp cụ thể. Chính vì vậy, các phương pháp giải bài toán ngược rất phong phú.

Trong nhưng năm gần đây, bài toán ngược đối với phương trình đạo hàm riêng phân thứ thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Bài toán xác định ngoại lực đối với phương trình đạo hàm riêng phân thứ tuyến tính đã được đề cập trong nhiều bài báo, ở đó hệ số được xác định dựa trên: phương pháp hàm đặc trưng [48, 73, 87, 93], phương pháp chính quy hoá [71, 86], Định lí giải tích Fredholm [78], hoặc phương pháp thác triển duy nhất [34]. Ngoài ra, người đọc quan tâm có thể tham khảo [35, 37, 38] cho các loại bài toán ngược đối với phương trình dưới khuếch tán, trong đó tham số cần xác định có thể là dữ liệu ban đầu, số hạng nguồn hoặc các hệ số khác trong phương trình. So với trường hợp tuyến tính, bài toán xác định ngoại lực với phương trình đạo hàm riêng phi tuyến phức tạp hơn rất nhiều và các kết quả liên quan còn ít được biết đến. Trong [61], bài toán xác định số hạng nguồn phi tuyến được nghiên cứu dựa trên nguyên lý cực đại cho phương trình dưới khuếch tán. Các tác giả trong [75] sử dụng phương pháp rời rạc hoá để nghiên cứu bài toán xác định số hạng nguồn phụ thuộc thời gian cho phương trình dưới khuếch tán nửa tuyến tính. Trong [79], sử dụng phương pháp tối ưu các tác giả bàn về bài toán xác định số hạng khuếch tán phi tuyến trong phương trình dưới khuếch tán. Sử dụng phương pháp định lí điểm bất động, các tác giả trong [89] đã nghiên cứu bài toán xác định số hạng nguồn cho phương trình truyền sóng phân thứ nửa tuyến tính, ở đó B. Wu và cộng sự chứng minh kết quả về sự tồn tại địa phương. Cần chú ý rằng, không giống như các phương trình bậc nguyên, chúng ta không thể kéo dài nghiệm cho phương trình phân thứ vì nghiệm của phương trình phân thứ không có tính chất nửa nhóm. Ngoài ra sử dụng phương pháp điểm bất động nghiên cứu bài toán ngược có thể xem [58, 59].

Trong luận án, chúng tôi xét bài toán xác định tham số (**FrIP**): cho $\xi, \psi \in X$, tìm (x, u, z) thoả mãn bất đẳng thức vi biến phân phân thứ

$$D_0^\alpha x(t) = Ax(t) + B(u(t))z + h(x(t)), t \in (0, T], \tag{5}$$

$$\langle F(x(t)) + G(u(t)), v - u(t) \rangle \geq 0, \forall v \in \mathcal{K}, t \in [0, T], \tag{6}$$

$$x(0) = \xi, \tag{7}$$

và thoả mãn điều kiện

$$\int_0^T \varphi(s)x(s)ds = \psi, \tag{8}$$

trong đó $x(\cdot)$ nhận giá trị trong không gian Banach X và $u(\cdot)$ nhận giá trị trong không gian Hilbert $\mathcal{U}$, $\mathcal{K}$ là tập con lồi đóng trong $\mathcal{U}$, $z \in X$; $D_0^\alpha, \alpha \in (0, 1)$, là đạo hàm phân thứ Caputo cấp α. Trong mô hình bài toán, A là toán tử tuyến tính đóng trên X; $\varphi \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ là hàm không âm; $B : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $h : X \to X$, $F : X \to \mathcal{U}^*$, $G : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^*$ là các ánh xạ cho trước và $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là cặp đối ngẫu chính tắc giữa $\mathcal{U}$ và $\mathcal{U}^*$.

Các bất đẳng thức vi biến phân (DVIs) xuất hiện như là một hệ chứa một phương trình tiến hoá và một ràng buộc bất đẳng thức biến phân. DVIs được nghiên cứu hệ thống bởi Pang và Stewart, xem [66]. Ở đó DVIs như là mô hình tổng quát cho các phương trình vi phân đại số, các bài toán bù vi phân,... Thực tế DVIs mô tả các mô hình toán học ở đó là nơi giao thoa của hệ động lực và tối ưu.

Xét một số trường hợp đặc biệt của hệ (5)-(6). Giả sử, $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{K} = \mathcal{U} = \mathbb{R}^m$. Hệ (5)-(6) có dạng sau

$$\begin{aligned} &D_0^\alpha x(t) = \hat{F}(x(t), u(t), z),\ t \in (0, T],\\ &\hat{G}(x(t), u(t)) = 0,\ t \in [0, T], \end{aligned}$$

ở đó $\hat{F}(x(t), u(t), z) = Ax(t) + B(u(t))z + h(x(t))$ và $\hat{G}(x(t), u(t)) = F(x(t)) + G(u(t))$, đây là một hệ phương trình vi phân phân thứ-đại số. Hệ này đã được sử dụng để mô tả mạng điện [66].

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn với biên trơn, $X = \mathcal{U} = \mathcal{K} = L^2(\Omega)$, $A = \Delta$ là toán tử Laplace với điều kiện biên thuần nhất và, $G = -\Delta$. Khi đó (5)-(6) có dạng

$$\begin{aligned} &\partial_t^\alpha y = \Delta y + \hat{h}(y, u, z) \ \text{ trong } \Omega \times (0, T],\\ &-\Delta u + F(y) = 0 \ \text{ trong } \Omega \times [0, T],\\ &y = u = 0 \ \text{ trên } \partial\Omega \times [0, T], \end{aligned}$$

ở đó, ∂_t^α là đạo hàm Caputo phân thứ cấp α theo biến thời gian t, $\hat{h}(y, u, z) = B(u)z + h(y)$. Đây là hệ loại parabolic-elliptic, hệ này được sử dụng để mô tả chuyển động của vi khuẩn dưới tác động của hoá chất [33], và quá trình khôi phục ảnh [36].

DVIs phân thứ (FrDVIs) được đề xuất đầu tiên trong [57], ở đó các tác giả đã sử dụng phương pháp bậc tô pô để chứng minh tính giải được. Trong công trình [42], các tính chất định tính cho một lớp FrDVI được nghiên cứu. Chú ý rằng các FrDVIs trong [42, 57] được thiết lập trong không gian hữu hạn chiều. Tuy nhiên, nếu phương trình tiến hoá trong DVIs mô tả một phương trình đạo hàm riêng, chúng ta có DVIs vô hạn chiều. Trong những năm gần đây, DVIs trong không gian vô hạn chiều thu hút sự quan tâm nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học, có thể kể đến các kết quả tiêu biểu [4, 54, 55, 56], ở đó các tác giả đã nghiên cứu tính giải được và dáng điệu tiệm cận nghiệm của DVIs mà ràng buộc là phương trình tiến hoá cấp một trong không gian Banach.

Trong luận án này chúng tôi nghiên cứu câu hỏi xác định số hạng ràng buộc của FrDVI (5)-(7). Cụ thể, trong biểu diễn $B(u(t))z$ của phương trình (5), số hạng $B(u(t))$ là biên độ của ràng buộc, số hạng $z \in X$ là hướng của ràng buộc và được giả sử là chưa biết. Số hạng này sẽ được xác định bởi sử dụng phép đo (8). Chú ý rằng, khi $\varphi(t) = T^{-1}$, điều kiện đo dạng (8) chính là giá trị trung bình của hàm trạng thái trên $[0, T]$. Bài toán (**FrIP**) sẽ được chúng tôi nghiên cứu như sau. Dưới giả thiết A là toán tử quạt, chúng tôi chứng minh nghiệm tích phân của (5)-(8) cũng là nghiệm cổ điển. Sử dụng định lí điểm bất động Schauder chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm toàn cục (x, u, z) với mỗi dữ kiện ban đầu (ξ, ψ). Bổ sung thêm giả thiết hệ số Lipschitz của F nhỏ, chúng tôi chứng minh ánh xạ $(\xi, \psi) \mapsto (x, u, z)$ là Lipschitz địa phương từ $X \times D(A)$ tới $C([0, T]; X) \times C([0, T]; \mathcal{U}) \times X$, từ đó chúng tôi nhận được kết quả về tính duy nhất và tính ổn định của nghiệm.

Bên cạnh lớp phương trình dưới khuếch tán, trong luận án này chúng tôi quan tâm tới hai lớp NDE khác được nghiên cứu gần đây trong động lực học chất lỏng. Lớp NDE thứ nhất liên quan đến phương trình Basset dạng

$$\frac{d}{dt}\big(k_0 u + k * [u - u(0)]\big)(t) + Au(t) = f\big(u(t)\big), t \in (0, T] \tag{9}$$

$$u(0) = u_0, \tag{10}$$

ở đó hàm trạng thái $u(\cdot)$ nhận giá trị trong không gian Hilbert khả ly H; $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+), k_0 > 0$; A là toán tử tuyến tính trên H và $f : H \to H$ là hàm phi tuyến.

NDE như (9) xuất hiện khi mô hình hoá nhiều quá trình, chẳng hạn: quá trình truyền nhiệt trong các vật liệu có tính chất nhớ (xem [20, 67]); quá trình thuần nhất hoá dòng một pha trong môi trường xốp (xem [3, 32]). Khi $k_0 = 0$ và $k = g_{1-\alpha}, \alpha \in (0,1)$, phương trình (9) chính là phương trình dưới khuếch tán (4). Khi $k_0 > 0$ và $k = g_{1/2}$ phương trình (9) là phương trình Basset phi tuyến (xem [9]).

Phương trình Basset được đề xuất nghiên cứu vào những năm 1910 bởi nhà toán học người Anh, A.B. Basset khi ông nghiên cứu chuyển động của hạt trong môi trường chất lỏng có nhớt không nén được dưới tác động của lực hấp dẫn. Trong công trình [62], các tác giả đã sử dụng phương pháp số tìm nghiệm gần đúng của phương trình loại Basset. Tính đặt đúng của phương trình Basset tuyến tính đã được thiết lập gần đây trong các công trình [9, 12, 32]. Theo như chúng tôi được biết, cho đến nay các kết quả về nghiên cứu định tính cho lớp phương trình loại Basset vẫn còn hạn chế. Trong luận án này, mục đích của chúng tôi là tìm điều kiện thích hợp đối với k và f để chứng minh sự tồn tại nghiệm và tính hút trong thời gian hữu hạn cho các nghiệm của (9)-(10) trong trường hợp $k_0 > 0$.

Sử dụng cách tiếp cận trong công trình [44], chúng tôi dẫn ra công thức nghiệm dạng biến thiên hằng số cho hệ (9)-(10) và chứng minh một bất đẳng thức kiểu Gronwall tương ứng với hệ (9)-(10). Sau đó sử dụng nguyên lí ánh xạ co kết hợp với các ước lượng địa phương của nghiệm để chứng minh sự tồn tại và tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm. Hệ quả của tính hút, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm tuần hoàn/đối tuần hoàn của (9), nghĩa là, các nghiệm thoả mãn $u(0) = \pm u(T)$.

Lớp NDE thứ hai liên quan đến phương trình Rayleigh-Stokes dạng

$$\partial_t u - \Delta u - \partial_t(m * \Delta u) = f(t, u) \text{ trong } \Omega, t > 0, \tag{11}$$

$$\mathcal{B}u = 0 \text{ trên } \partial\Omega,\ t \geq 0, \tag{12}$$

$$u(\cdot, 0) = \xi \text{ trong } \Omega, \tag{13}$$

ở đó $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$; $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ là một hàm không âm; f là hàm phi tuyến; $\xi \in L^2(\Omega)$ là dữ kiện ban đầu; $\mathcal{B}$ là toán tử biên thuộc một trong hai dạng sau

$$\mathcal{B}u = u \text{ hoặc } \mathcal{B}u = \nu \cdot \nabla u + \eta u,\ \eta > 0,$$

với ν là pháp tuyến ngoài đối với biên $\partial\Omega$.

Có thể thấy, phương trình (11) là dạng tổng quát của nhiều lớp phương trình. Nếu m là một hằng số không âm thì (11) chính là phương trình khuếch tán cổ điển. Trong trường hợp m là một hàm chính quy, ví dụ $m \in C^1(\mathbb{R}^+)$, thì (11) trở thành phương trình khuếch tán có nhớ:

$$\partial_t u - (1 + m(0))\Delta u - \int_0^t m'(t-s)\Delta u(s)ds = f(t, u),$$

đây là lớp phương trình được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm, xem các tài liệu [17, 23, 64] về các kết quả liên quan đến lớp phương trình này. Ngoài ra, nếu $m(t) = m_0 g_{1-\alpha}(t), m_0 > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, thì ta có phương trình

$$\partial_t u - (1 + m_0 \partial_t^\alpha)\Delta u = f(t, u).$$

Đây là phương trình Rayleigh-Stokes phân thứ (xem [13]), với ∂_t^α là đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville cấp α.

Phương trình Rayleigh-Stokes phân thứ được sử dụng để mô tả dòng chảy không Newton trong môi trường vật liệu có cả tính đàn hồi và tính nhớt. Theo đó, phương trình Rayleigh-Stokes phân thứ được sử dụng để nghiên cứu nhiều bài toán áp dụng thực tiễn trong công nghiệp, kĩ thuật (xem [13] cùng với các tài liệu trích dẫn trong đó). Các phương pháp số để tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình Rayleigh-Stokes phân thứ đã được nghiên cứu trong [13, 18]. Gần đây, trong các công trình [60, 82], các tác giả đã bàn về bài toán giá trị cuối cho phương trình Rayleigh-Stokes phân thứ. Trong luận án, chúng tôi đặt vấn đề nghiên cứu tính giải được và tính ổn định của bài toán (11)-(13) trong trường hợp m là hàm không chính quy (chẳng hạn m không bị chặn trong lân cận của $t = 0$).

Để nghiên cứu nội dung này, chúng tôi đặt giả thiết hàm $1 + \gamma m, \gamma > 0$, là hàm hoàn toàn dương. Dựa trên giả thiết này, chúng tôi thiết lập công thức biểu diễn nghiệm dạng biến thiên hằng số và chứng minh một bất đẳng thức kiểu Gronwall cho hệ (11)-(13). Kết hợp bất đẳng thức này cùng với các ước lượng địa phương của nghiệm chúng tôi thu được kết quả về sự tồn tại và tính ổn định theo nghĩa Lyapunov của nghiệm. Ngoài ra, khi tính duy nhất nghiệm không được đảm bảo, chúng tôi chứng minh tồn tại tập compact khác rỗng các nghiệm phân rã của hệ (11)-(13), bằng cách áp dụng định lí điểm bất động cho ánh xạ nén.

Từ những lí do vừa kể trên, chúng tôi đã lựa chọn đề tài nghiên cứu của luận án là: "**Dáng điệu nghiệm của một số lớp phương trình tiến hoá không địa phương**".

2. Mục đích, đối tượng và phạm vi nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Luận án nghiên cứu một số vấn đề định tính đối với một số lớp NDE, bao gồm: tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm; tính ổn định tiệm cận nghiệm theo nghĩa Lyapunov; tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định của bài toán xác định tham số.

2.2. Đối tượng nghiên cứu

Trong luận án, chúng tôi xét bốn lớp bài toán sau

⋆ Phương trình dưới khuếch tán.

⋆ Phương trình loại Basset.

⋆ Phương trình loại Rayleigh-Stokes.

⋆ Bất đẳng thức vi biến phân phân thứ.

2.3. Phạm vi nghiên cứu

Phạm vi nghiên cứu của luận án được thể hiện thông qua các nội dung sau.

⋆ **Nội dung 1.** Nghiên cứu dáng điệu nghiệm trong thời gian hữu hạn thông qua tính hút và hút mũ trong thời gian hữu hạn của nghiệm cho hai lớp NDE: lớp phương trình dưới khuếch tán và lớp phương trình loại Basset.

⋆ **Nội dung 2.** Nghiên cứu tính ổn định tiệm cận nghiệm của phương trình tiến hoá loại Rayleigh-Stokes nửa tuyến tính.

⋆ **Nội dung 3.** Tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định đối với bài toán xác định tham số trong một lớp bất đẳng thức vi biến phân phân thứ.

3. Phương pháp nghiên cứu

Luận án sử dụng các công cụ của giải tích lồi, giải tích đa trị, giải tích phân thứ, phương trình tích phân Volterra với nhân hoàn toàn dương, lí thuyết ổn định, lí thuyết điểm bất động và lí thuyết nửa nhóm. Ngoài ra, khi nghiên cứu các nội dung cụ thể, chúng tôi sử dụng một số kết quả và kĩ thuật tương ứng. Cụ thể:

- Để chứng minh sự tồn tại nghiệm, nghiệm phân rã chúng tôi sử dụng phương pháp ước lượng theo độ đo không compact và các định lí điểm bất động.

- Để chứng minh tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn chúng tôi sử dụng các bất đẳng thức kiểu Gronwall kết hợp với các ước lượng địa phương của nghiệm.

- Để chứng minh tính ổn định tiệm cận nghiệm chúng tôi sử dụng phương pháp ước lượng địa phương và bất đẳng thức kiểu Gronwall.
- Để chứng minh tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định cho bài toán xác định tham số trong một lớp bất đẳng thức vi biến phân phân thứ chúng tôi dựa trên tính chính quy nghiệm của phương trình dưới khuếch tán và các định lí điểm bất động.

4. Kết quả đạt được của luận án

Luận án đã đạt được các kết quả sau đây:

1. Chứng minh sự tồn tại nghiệm tích phân và tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm tầm thường cũng như nghiệm tuỳ ý đối với hai lớp NDE nửa tuyến tính: phương trình dưới khuếch tán và phương trình loại Basset, với giả thiết số hạng phi tuyến có tăng trưởng trên tuyến tính.
2. Chứng minh sự tồn tại và tính ổn định tiệm cận nghiệm của một lớp NDE nửa tuyến tính loại Rayleigh-Stokes. Đặc biệt trong trường hợp không duy nhất nghiệm chúng tôi chứng minh tồn tại tập compact khác rỗng các nghiệm phân rã.
3. Chứng minh tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định đối với bài toán xác định tham số trong một lớp bất đẳng thức vi biến phân phân thứ.

Các kết quả trên đây của luận án được công bố trong 03 bài báo trên các tạp chí chuyên ngành (liệt kê ở mục "*Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án*"), 01 bài báo đã hoàn thành ở dạng tiền ấn phẩm. Các nội dung chính của luận án đã được báo cáo tại:

- Xêmina *Giải tích*, Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2;

- Xêmina *Phương trình vi phân và tích phân*, Bộ môn Giải tích, Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;

- Hội thảo cho Nghiên cứu sinh, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, 2017, 2018, 2019.

5. Cấu trúc của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình công bố và Tài liệu tham khảo, luận án gồm 4 chương.

- Chương 1: *Kiến thức chuẩn bị*. Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và kết quả cơ sở về giải tích phân thứ, giải tích đa trị, một số định lí điểm bất động, lí thuyết nửa nhóm, lí thuyết độ đo không compact (MNC) và ánh xạ nén, phương trình tích phân Volterra và một số kết quả bổ trợ.

- Chương 2: *Dáng điệu nghiệm trong thời gian hữu hạn của một số lớp phương trình tiến hoá không địa phương nửa tuyến tính*. Trong chương này, chúng tôi chứng minh tính giải được và tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn của nghiệm đối với hai lớp NDE: lớp phương trình dưới khuếch tán và lớp phương trình loại Basset, với giả thiết phần phi tuyến có tăng trưởng trên tuyến tính.

- Chương 3. *Tính ổn định của phương trình tiến hoá loại Rayleigh-Stokes nửa tuyến tính*. Với bài toán này, chúng tôi chứng minh tính giải được, tính ổn định tiệm cận. Ngoài ra, trong trường hợp không duy nhất nghiệm, chúng tôi chứng minh tồn tại tập compact khác rỗng các nghiệm phân rã.

- Chương 4. *Bài toán xác định tham số trong bất đẳng thức vi biến phân phân thứ*. Trong chương này, chúng tôi chứng minh kết quả về tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định nghiệm đối với bài toán xác định tham số trong bất đẳng thức vi biến phân phân thứ.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ sở về giải tích phân thứ, giải tích đa trị, một số định lí điểm bất động, lí thuyết nửa nhóm, lí thuyết phương trình tích phân Volterra và một số kết quả bổ trợ. Cho $(E, \|\cdot\|)$ là một không gian Banach. Kí hiệu 2^E là họ các tập con của E và

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(E) &= \{A \in 2^E : A \neq \emptyset\},\\
\mathcal{P}_b(E) &= \{A \in \mathcal{P}(E) : A \text{ là tập bị chặn}\},\\
\mathcal{K}v(E) &= \{A \in \mathcal{P}(E) : A \text{ là tập lồi và compact}\}.
\end{aligned}$$

1.1. Một số không gian hàm

Cho Ω là một tập con đo được và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$. Trong luận án, các không gian hàm sau (xem [16, 26, 80]) được sử dụng.

- $L^p(\Omega), 1 \leq p < +\infty$, là không gian bao gồm tất cả các hàm khả tích Lebesgue bậc p trên Ω. Chuẩn trên $L^p(\Omega)$ được định nghĩa như sau:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \Big(\int_\Omega |u(x)|^p dx\Big)^{1/p}.$$

- $L^\infty(\Omega)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm đo được và bị chặn hầu khắp nơi trên Ω với chuẩn

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

- $L^p_{loc}(\Omega), 1 \leq p < +\infty$, là không gian các hàm khả tích Lebesgue địa phương bậc p trên Ω

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{f : f \in L^p(K) \text{ với mọi tập compact } K \subset \Omega\}.$$

Ngoài ra, chúng tôi sử dụng các không gian hàm phụ thuộc thời gian sau:

- $C([a, b]; E)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u : [a, b] \to E$ liên tục, với chuẩn:
$$\|u\|_{C([a,b];E)} = \sup_{t\in[a,b]} \|u(t)\|.$$

- $L^p(a, b; E)$ là không gian bao gồm tất cả các hàm $u : [a, b] \to E$ sao cho
$$\|u\|_{L^p(a,b;E)} := \Big(\int_a^b \|u(t)\|^p dt\Big)^{1/p} < +\infty.$$

1.2. Giải tích phân thứ

Ở phần này và các phần tiếp theo trong chương này, ta kí hiệu $J = [0, T]$ và $1 \leq p < \infty$. Không gian Sobolev phụ thuộc vào thời gian được định nghĩa như sau (xem [11]):

$$W^{m,p}(J; E) =\Big\{f \mid \exists\varphi \in L^p(J, E) : f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \frac{t^k}{k!} + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} * \varphi(t), t \in J\Big\},$$

ở đó '*' là tích chập Laplace xác định bởi

$$(k * \ell)(t) = \int_0^t k(t - s)\ell(s)ds, t \in \mathbb{R}^+, k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+), \ell \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; E);$$

và $c_k = f^{(k)}(0)$; với mỗi $f \in W^{m,p}(J; E)$ ta có $\varphi(t) = f^{(m)}(t)$, với hầu khắp $t \in J$. Đặt

$$W_0^{m,p}(J; E) = \{f \in W^{m,p}(J; E) \mid f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, 2, ..., m - 1\}.$$

Khi đó, $f \in W_0^{m,p}(J; E)$ khi và chỉ khi tồn tại $\varphi \in L^p(J, E)$ sao cho $f = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} * \varphi(t)$.

Tiếp theo chúng tôi giới thiệu các khái niệm đạo hàm và tích phân phân thứ, theo [11, Section 1.2]. Nhắc lại rằng, với $\alpha > 0$, ta kí hiệu $g_\alpha(t) = t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha), t > 0$, trong đó $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ là hàm Gamma.

Định nghĩa 1.1. *Tích phân phân thứ Riemann-Liouville* cấp $\alpha > 0$ của hàm $f \in L^1(J;E)$ xác định bởi

$$I_0^\alpha f(t) = (g_\alpha * f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, t > 0.$$

Định nghĩa 1.2. *Đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville* cấp $\alpha \in (m-1, m)$, $m \in \mathbb{N}$ của hàm $f \in L^1(J;E), g_{m-\alpha} * f \in W^{m,1}(J;E)$ xác định bởi

$${}^{RL}D_0^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} f(s)ds.$$

Định nghĩa 1.3. *Đạo hàm phân thứ Caputo* cấp $\alpha \in (m-1, m)$, $m \in \mathbb{N}$ của hàm $f \in W^{m,1}(J;E)$ xác định bởi

$$D_0^\alpha f(t) = I_0^{m-\alpha} \frac{d^{(m)}}{dt^m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s)ds.$$

Nếu thay $f \in W^{m,1}(J;E)$ bởi điều kiện $f \in C^{m-1}(J;E), g_{m-\alpha} * f \in W^{m,1}(J;E)$ ta có biểu diễn tương đương sau của đạo hàm phân thứ cấp α:

$$D_0^\alpha f(t) = {}^{RL}D_0^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) g_{k+1}(t) \right).$$

Định lí 1.1. ([11, Theorem 1.5]) *Cho $\alpha \in (m-1, m), m \in \mathbb{N}$. Khi đó*

(i) *Với mỗi $f \in L^1(J;E)$, ta có $D_0^\alpha I_0^\alpha f(t) = f(t)$.*

(ii) *Nếu $f \in C^{m-1}(J;E); g_{m-\alpha} * f \in W^{m,1}(J;E)$ thì $I_0^\alpha\ D_0^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) g_{k+1}(t)$.*

1.3. Phép biến đổi Laplace

Trong mục này chúng tôi nhắc lại định nghĩa và một số tính chất cơ bản của phép biến đổi Laplace, biến đổi Laplace ngược, chi tiết có thể xem trong cuốn sách chuyên khảo của Arendt và cộng sự [7].

Định nghĩa 1.4. Biến đổi Laplace của một hàm $f \in L^1(\mathbb{R}^+; E)$ được xác định bởi

$$\mathcal{L}\{f\}(\lambda) := \widehat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\lambda) > 0.$$

Nhận xét rằng nếu tích phân trên hội tụ tại điểm $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, thì nó hội tụ tuyệt đối với $\lambda \in \mathbb{C}$ mà $\mathrm{Re}(\lambda) > \mathrm{Re}(\lambda_0)$.

Định nghĩa 1.5. Biến đổi Laplace ngược được cho bởi công thức

$$\mathcal{L}^{-1}[g(s)](x) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{sx} g(s)ds, \qquad \gamma > 0.$$

Từ Định nghĩa 1.4 và Định nghĩa 1.5, $\mathcal{L}$ và $\mathcal{L}^{-1}$ là các toán tử tuyến tính và

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}f = f; \qquad \mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}g = g.$$

Ví dụ 1.1. Cho $\alpha > 0$, xét hàm $g_\alpha(t) = t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha), t > 0$. Tính toán trực tiếp ta thu được $\mathcal{L}\{g_\alpha\}(\lambda) = \lambda^\alpha$ và với mọi $\alpha, \beta > 0$: $g_\alpha * g_\beta = g_{\alpha+\beta}$.

Ta có các tính chất sau đây của biến đổi Laplace.

Định lí 1.2. ([7, Corollary 1.6.6]) *Nếu* $\mathcal{L}\{f\}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)$, *thì* $\mathcal{L}\{f'\}(\lambda) = \lambda\widehat{f}(\lambda) - f(0)$. *Tổng quát ta có*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(\lambda) = \lambda^n\widehat{f}(\lambda) - \lambda^{n-1}f(0) - \lambda^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Định lí 1.3. [7, Proposition 1.6.4] *Nếu* $\mathcal{L}\{f\} = \widehat{f}$ *và* $\mathcal{L}\{g\} = \widehat{g}$ *thì*

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \widehat{f}\widehat{g}.$$

1.4. Độ đo không compact và các ước lượng

Trong phần này chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và kết quả cơ bản liên quan tới độ đo không compact. Chúng tôi sử dụng định nghĩa sau đây của độ đo không compact (xem [2, 39]).

Định nghĩa 1.6. Cho E là một không gian Banach và $\mathcal{P}_b(E)$ là tập các tập con khác rỗng, bị chặn trong E. Một hàm $\beta : \mathcal{P}_b(E) \to \mathbb{R}^+$ được gọi là độ đo không compact (MNC) trên E nếu

$$\beta(\overline{\text{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega) \text{ với mọi } \Omega \in \mathcal{P}_b(E),$$

ở đó $\overline{\text{co}}\,\Omega$ là bao lồi đóng của tập Ω. Một MNC β được gọi là:

(i) *đơn điệu* nếu với mỗi tập $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{P}_b(E)$ sao cho $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$, chúng ta có $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;

(ii) *không suy biến* nếu $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ với mọi $a \in E, \Omega \in \mathcal{P}_b(E)$;

(iii) *bất biến với nhiễu compact* nếu $\beta(K \cup \Omega) = \beta(\Omega)$ với mọi tập compact tương đối $K \in E$ và $\Omega \in \mathcal{P}_b(E)$;

(iv) *nửa cộng tính đại số* nếu $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$ với mọi $\Omega_0, \Omega_1 \in \mathcal{P}_b(E)$;

(v) *chính quy* nếu $\beta(\Omega) = 0$ tương đương với tính compact tương đối của Ω.

Một ví dụ về MNC thoả mãn các tính chất nêu trên là MNC *Hausdorff* $\chi(\cdot)$, với $\chi(\cdot)$ định nghĩa bởi

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0 : \Omega \text{ có một } \varepsilon - \text{lưới hữu hạn}\}.$$

Tiếp theo chúng tôi xây dựng một số MNC được sử dụng cho các chương sau. Giả sử $L > 0$ và $D \subset C(J; E)$, đặt

$$\omega_T(D) = \sup_{t \in J} e^{-Lt} \chi(D(t)), \text{ ở đó } D(t) := \{x(t) : x \in D\}, \tag{1.1}$$

$$\text{mod}_T(D) = \lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in D} \max_{t,s \in J, |t-s| \leq \delta} \|x(t) - x(s)\|. \tag{1.2}$$

Theo [39, Examples 2.1.2, 2.1.4], ω_T và mod_T là các MNC và chúng thoả mãn tất cả các tính chất trong Định nghĩa 1.6, ngoại trừ tính chính quy. Thêm vào đó, với $D \subset C(J; E)$ thì

- $\omega_T(D) = 0$ khi và chỉ khi $D(t)$ là tập compact tương đối với mọi $t \in J$;
- $\mathrm{mod}_T(D) = 0$ khi và chỉ khi D liên tục đồng bậc.

Đặt

$$\chi_T(D) = \omega_T(D) + \mathrm{mod}_T(D),$$

khi đó χ_T là một MNC chính quy trên $C(J; E)$. Thật vậy, nếu $\chi_T(D) = 0$ thì $\omega_T(D) = \mathrm{mod}_T(D) = 0$. Điều này suy ra rằng $D(t)$ là tập compact tương đối với mọi $t \in J$ và D là tập liên tục đồng bậc. Do đó theo Định lí Arzelà-Ascoli, D là tập compact tương đối trong $C(J; E)$.

Tiếp theo, ta nhắc lại định nghĩa χ-*chuẩn* của một toán tử tuyến tính tính bị chặn $L \in \mathcal{L}(E)$ (xem [39, Section 2.4]):

$$\|L\|_\chi = \inf\{C > 0 : \chi(L(\Omega)) \leq C\chi(\Omega) \text{ với mọi tập bị chặn } \Omega \subset E\}.$$

Ta biết rằng (xem [2, Theorem 2.4.2])

- $\|L\|_\chi = \chi(L(B_1))$, ở đó B_1 là hình cầu đơn vị trong E;
- $\|L\|_\chi$ là một nửa chuẩn trên $\mathcal{L}(E)$ và $\|L\|_\chi \leq \|L\|_{op}$;
- $\|L\|_\chi = 0$ khi và chỉ khi L là toán tử compact.

Bây giờ chúng tôi nhắc lại một số ước lượng cơ bản về MNC.

Định nghĩa 1.7. Một tập con $D \subset L^p(J; E)$ được gọi là bị chặn tích phân nếu tồn tại hàm $\nu \in L^p(J) := L^p(J; \mathbb{R}^+)$ sao cho $\|f(t)\| \leq \nu(t)$, với mọi $f \in D$ và với hầu khắp $t \in J$.

Mệnh đề 1.1. ([39, Theorem 4.2.2]) *Nếu* $\{\omega_n\} \subset L^1(0,T;E)$ *là một tập bị chặn tích phân thì*

$$\chi\left(\left\{\int_0^t \omega_n(s)\,ds\right\}\right) \le 2\int_0^t \chi(\{\omega_n(s)\})\,ds,$$

với mọi $t \in J$.

Mệnh đề 1.2. ([5, Proposition 2.9]) *Giả sử* $D \subset L^1(0,T;E)$ *là một tập bị chặn tích phân và tồn tại hàm* $q \in L^1(J)$ *sao cho*

$$\chi(D(t)) \le q(t),$$

với hầu khắp trên J. *Khi đó*

$$\chi\left(\int_0^t D(s)\,ds\right) \le 4\int_0^t q(s)\,ds,$$

ở đó $\displaystyle\int_0^t D(s)\,ds = \left\{\int_0^t \zeta(s)\,ds : \zeta \in D\right\}$.

1.5. Ánh xạ nén và một số định lí điểm bất động

Lí thuyết điểm bất động cho ánh xạ đa trị nén là công cụ cơ bản để chứng minh sự tồn tại nghiệm cho các bài toán trong luận án. Chi tiết hơn về ánh xạ nén, các định lí điểm bất động cho ánh xạ nén và các ứng dụng của nó có thể xem [2, 39].

Định nghĩa 1.8. Ánh xạ đa trị $\mathcal{F} : Z \subseteq E \to \mathcal{P}(E)$ được gọi là:

(i) *nén* tương ứng với độ đo không compact β ($\beta-$nén) nếu với bất kì tập bị chặn $\Omega \subset Z$, thì từ bất đẳng thức

$$\beta(\Omega) \le \beta(\mathcal{F}(\Omega)),$$

suy ra tính compact tương đối của Ω;

(ii) *đóng* nếu đồ thị $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} := \{(z, y) : y \in \mathcal{F}(z)\}$ là tập đóng trong $Z \times E$.

Giả sử β là một MNC đơn điệu không suy biến trong E. Sau đây, ta phát biểu một nguyên lý điểm bất động cho ánh xạ nén (xem [39]) được sử dụng trong luận án.

Định lí 1.4. ([39, Corollary 3.3.1]) *Giả sử $\mathcal{M}$ là tập con khác rỗng lồi đóng bị chặn của E và $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{K}v(\mathcal{M})$ là ánh xạ đa trị đóng và β-nén. Khi đó* $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}) := \{x \in E : x \in \mathcal{F}(x)\}$ *khác rỗng và compact.*

Như một hệ quả, ta có định lí sau.

Định lí 1.5. *Giả sử $\mathcal{M}$ là tập con lồi compact của E và $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{M})$ là một ánh xạ đa trị đóng với giá trị lồi. Khi đó* $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$.

Chứng minh. Ta thấy $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{M})$ có giá trị lồi đóng và compact. Hơn nữa, $\mathcal{F}$ là χ_E-nén, với χ_E là độ đo không compact Hausdorff trên E. Theo Định lí 1.4, ta có $\mathrm{Fix}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$. □

1.6. Lí thuyết nửa nhóm

Mục này được dành để trình bày một số khái niệm và kết quả trong lí thuyết nửa nhóm, chi tiết có thể xem trong các cuốn chuyên khảo [25, 84].

Định nghĩa 1.9. Một họ các ánh xạ $S(t) \in \mathcal{L}(E)$, $0 \leq t < +\infty$, được gọi là *nửa nhóm các ánh xạ tuyến tính bị chặn* (gọi tắt là nửa nhóm) trên E nếu nó thỏa mãn:

(i) $S(0) = I$, I là phép đồng nhất trên E;

(ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$ với mọi $t, s \geq 0$.

Định nghĩa 1.10. Ta nói rằng toán tử tuyến tính A là *toán tử sinh* của nửa nhóm tuyến tính $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ nếu nó được xác định bởi:

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t},$$

với mọi $x \in D(A)$, trong đó $D(A)$ là miền xác định của A, được xác định như sau

$$D(A) = \{x \in E : \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ tồn tại trong } E\}.$$

Định nghĩa 1.11. Nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ được gọi là:

(i) *nửa nhóm liên tục mạnh*, viết tắt là C_0-nửa nhóm, nếu $\lim_{t\to 0^+} S(t)x = x$, với mọi $x \in E$;

(ii) *liên tục theo chuẩn* nếu $t \mapsto S(t)$ là liên tục với $t > 0$;

(iii) *compact* nếu $S(t)$ là toán tử compact với mỗi $t > 0$;

(iv) *khả vi* nếu với mỗi $x \in E$ thì ánh xạ $t \mapsto S(t)x$ khả vi tại mọi $t > 0$.

Nhận xét rằng, theo [25, Lemma II.4.22], nếu $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm compact hoặc khả vi thì $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ liên tục theo chuẩn. Định lí sau đây cho ta điều kiện cần và đủ để một toán tử tuyến tính là toán tử sinh của một C_0-nửa nhóm.

Định lí 1.6. [25, Theorem II.3.8] *Một toán tử tuyến tính A trên không gian Banach E là toán tử sinh của một C_0-nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ thoả mãn $\|S(t)\|_{op} \leq Me^{\omega t}$, với mọi $t \geq 0$ với các hằng số $M \geq 1, \omega \in \mathbb{R}$ và với mọi $t \geq 0$ khi và chỉ khi hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

(1) *A là toán tử tuyến tính đóng với miền xác định trù mật trong E;*

(2) *Tập giải* $\rho(A)$ *chứa tập* $\{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > \omega\}$ *và toán tử giải* $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ *thỏa mãn điều kiện Hille-Yosida:*

$$\|R(\lambda, A)^n\|_{op} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} \text{ với mỗi } \lambda > \omega,\ n \in \mathbb{N}.$$

Thêm vào đó, nếu $\omega < 0$ *thì* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *được gọi là nửa nhóm ổn định mũ và nếu* $\omega \leq 0, M = 1$ *thì* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *được gọi là nửa nhóm co.*

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại khái niệm toán tử quạt.

Định nghĩa 1.12. Toán tử tuyến tính $A : D(A) \subset E \to E$ được gọi là *toán tử quạt* trên E nếu

(i) A xác định trù mật và đóng;

(ii) Tồn tại số thực $C > 0$, $\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ sao cho

$$\Sigma_\omega := \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : |\arg \lambda| < \omega\} \subset \rho(A),$$
$$\|\lambda(\lambda I - A)^{-1}v\| \leq C\|v\|,\ \forall v \in E, \lambda \in \Sigma_\omega,$$

ở đây $\rho(A)$ là tập giải của toán tử A.

1.7. Bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân phân thứ

Trong mục này, chúng tôi thiết lập công thức nghiệm tích phân của bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân phân thứ tuyến tính.

Cho $\alpha \in (0, 1)$. Xét bài toán Cauchy trong không gian Banach E:

$$D_0^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), t > 0, \tag{1.3}$$
$$u(0) = u_0. \tag{1.4}$$

Theo định nghĩa, $D_0^\alpha u(t) = (g_{1-\alpha} * u')(t)$ và $\mathcal{L}\{g_{1-\alpha}\}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}$ nên

$$\mathcal{L}\{D_0^\alpha u\}(\lambda) = \mathcal{L}\{g_{1-\alpha}\}(\lambda)\mathcal{L}\{u'\}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}\big(\lambda\widehat{u}(\lambda) - u(0)\big).$$

Áp dụng phép biến đổi Laplace tới hai vế của phương trình (1.3) ta có

$$\lambda^{\alpha-1}\big(\lambda\widehat{u}(\lambda) - u(0)\big) = A\widehat{u}(\lambda) + \widehat{f}(\lambda)$$

hay

$$(\lambda^\alpha I - A)\widehat{u}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}u(0) + \widehat{f}(\lambda),$$

ở đây I là toán tử đồng nhất trên E. Do đó với mọi $\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^\alpha \in \rho(A)$ ta có

$$\widehat{u}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1}u(0) + (\lambda^\alpha I - A)^{-1}\widehat{f}(\lambda). \tag{1.5}$$

Mặt khác, theo [90, Lemma 3.1], tồn tại hai họ giải thức $\{\mathcal{S}_\alpha(t), \mathcal{P}_\alpha(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(E)$ sao cho

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{S}_\alpha}(\lambda) &= \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha I - A)^{-1};\\ \widehat{(\cdot)^{\alpha-1}\mathcal{P}_\alpha}(\lambda) &= (\lambda^\alpha I - A)^{-1}.\end{aligned}$$

Đặc biệt, $\{\mathcal{S}_\alpha(t), \mathcal{P}_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ có biểu diễn

$$\mathcal{S}_\alpha(t)u = \int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)S(t^\alpha\theta)u\, d\theta, \tag{1.6}$$

$$\mathcal{P}_\alpha(t)u = \alpha\int_0^\infty \theta\phi_\alpha(\theta)S(t^\alpha\theta)u\, d\theta, \forall u \in E, \tag{1.7}$$

trong đó ϕ_α là hàm phân bố xác suất xác định trên $(0, \infty)$, nghĩa là, $\phi_\alpha(\theta) \geq 0$ và $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)d\theta = 1$. Hơn nữa, ϕ_α cho bởi

$$\phi_\alpha(\theta) = \frac{1}{\alpha\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{n-1}\frac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!}\sin n\pi\alpha,\ \theta \in (0, \infty).$$

Áp dụng phép biến đổi Laplace ngược cho phương trình (1.5) ta nhận được

$$u(t) = \mathcal{S}_\alpha(t)u(0) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{P}_\alpha(t-s)f(s)ds, t \geq 0. \tag{1.8}$$

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại một số ước lượng quan trọng cho hai họ giải thức $\{\mathcal{S}_\alpha(t), \mathcal{P}_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$.

Bổ đề 1.1. *Giả sử A là toán tử sinh của C_0-nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ trong E sao cho $\|S(t)\|_{op} \le M$ với $t \ge 0$. Khi đó*

(i) $\|\mathcal{S}_\alpha(t)\|_{op} \le M$, $\|\mathcal{P}_\alpha(t)\|_{op} \le \frac{M}{\Gamma(\alpha)}$ *với $t \ge 0$;*

(ii) *Nếu $S(t)$, $t > 0$ là toán tử compact, thì $\mathcal{S}_\alpha(t)$ và $\mathcal{P}_\alpha(t)$ cũng là toán tử compact với $t > 0$;*

(iii) *Nếu $S(\cdot)$ liên tục theo chuẩn thì $\mathcal{S}_\alpha(\cdot)$ và $\mathcal{P}_\alpha(\cdot)$ cũng liên tục theo chuẩn;*

(iv) *Nếu $S(\cdot)$ ổn định mũ, nghĩa là $\|S(t)\|_{op} \le Me^{-\beta t}$ với $\beta > 0$, thì với mọi $t \ge 0$ ta có*

$$\|\mathcal{S}_\alpha(t)\|_{op} \le ME_{\alpha,1}(-\beta t^\alpha); \|\mathcal{P}_\alpha(t)\|_{op} \le ME_{\alpha,\alpha}(-\beta t^\alpha),$$

trong đó $E_{\alpha,\beta}, \alpha > 0, \beta > 0$ là hàm Mittag-Leffler

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)},\ z \in \mathbb{C}.$$

Hơn nữa, nếu A là toán tử quạt thì

(v) *Với bất kì $v \in E, t > 0$, $\frac{d}{dt}\mathcal{S}_\alpha(t)v = -t^{\alpha-1}A\mathcal{P}_\alpha(t)v$. Nếu $v \in D(A)$ thì hàm $t \mapsto \frac{d}{dt}\mathcal{S}_\alpha(t)v$ khả tích địa phương trên $(0,\infty)$;*

(vi) *Với $\eta \in (0,1]$, tồn tại $C_\eta > 0$ sao cho*

$$\|(-A)^\eta \mathcal{P}_\alpha(t)v\| \le \frac{C_\eta \|v\|}{t^{\alpha\eta}}, \forall t > 0, v \in E.$$

Chứng minh. Chứng minh khẳng định (i) và (ii) có thể tìm trong [90, Lemma 3.2, Lemma 3.4], khẳng định (iii), (v) và (vi) được chứng minh trong [85, Theorem 3.2, Theorem 3.3]. Khẳng định (iv) được chứng minh trong [6, Proposition 4.2]. □

Định nghĩa 1.13. ([90, Definition 3.1]) Hàm u cho bởi công thức (1.8) được gọi là nghiệm tích phân của bài toán (1.3)-(1.4) trên $[0, \infty)$.

Khái niệm nghiệm cổ điển sau cho hệ (1.3)-(1.4) được đề xuất trong [85, 91] sẽ được chúng tôi sử dụng trong Chương 4.

Định nghĩa 1.14. Hàm $u : [0, T] \to E$ được gọi là nghiệm cổ điển của bài toán (1.3)-(1.4) trên $[0, T]$ nếu

(i) $u \in C([0, T]; D(A))$;

(ii) $g_{1-\alpha} * [u(\cdot) - u_0] \in C^1([0, T]; E)$;

(iii) u thoả mãn (1.3)-(1.4) trên $[0, T]$.

Lập luận tương tự như trong [91, Lemma 5.1 và Theorem 5.1], chúng tôi thu được kết quả chính quy sau cho hệ (1.3)-(1.4).

Bổ đề 1.2. *Giả sử A là toán tử quạt. Nếu $x_0 \in D(A)$ và f là hàm liên tục Hölder, nghĩa là, tồn tại $C > 0$ và $\gamma \in (0, 1)$ sao cho*

$$\|f(t) - f(s)\| \le C|t - s|^\gamma, \ \forall t, s \in [0, T],$$

thì mọi nghiệm tích phân của hệ (1.3)-(1.4) cũng là nghiệm cổ điển.

Cho A là toán tử tuyến tính đóng và sinh ra nửa nhóm liên tục mạnh $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ trên E. Xét toán tử $\mathcal{Q}_\alpha : L^p(0, T; E) \to C([0, T]; E)$ được xác định bởi

$$\mathcal{Q}_\alpha(f)(t) = \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} \mathcal{P}_\alpha(t - s) f(s) ds, \tag{1.9}$$

ở đó $p > \frac{1}{\alpha}$. Kết quả sau về $\mathcal{Q}_\alpha$ được chứng minh trong [43, Proposition 2.5].

Mệnh đề 1.3. *Giả sử rằng C_0-nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ sinh bởi A liên tục theo chuẩn. Khi đó với mọi tập bị chặn tích phân $\Omega \subset L^p(0, T; E)$, $\mathcal{Q}_\alpha(\Omega)$ là tập đồng liên tục trong $C([0, T]; E)$.*

1.8. Phương trình tích phân Volterra

Trong phần này, chúng tôi nhắc lại một số kết quả đối với nghiệm của phương trình tích phân Volterra với nhân hoàn toàn dương, chi tiết hơn ta có thể tham khảo [20, 28, 63, 64, 67].

Cho $\mu \in \mathbb{R}$ và các hàm $\mathsf{a}, f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, xét các phương trình tích phân Volterra tuyến tính

$$u(t) + \mu(\mathsf{a} * u)(t) = f(t), t \in [0, +\infty), \tag{1.10}$$

$$s(t) + \mu\big(\mathsf{a} * s\big)(t) = 1, t \in [0, +\infty), \tag{1.11}$$

$$r(t) + \mu\big(\mathsf{a} * r\big)(t) = \mathsf{a}(t), t \in (0, +\infty). \tag{1.12}$$

Theo [28, Theorem 2.3.1], nếu nhân $\mathsf{a} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ thì phương trình (1.12) có duy nhất nghiệm, kí hiệu là $r_\mu \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Hơn nữa, ta nhận được kết quả sau về sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình (1.10).

Định lí 1.7. ([28, Theorem 2.3.5]) *Cho $\mathsf{a} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ và $\mu \in \mathbb{R}$. Khi đó với mỗi $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ tồn tại duy nhất nghiệm $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ của phương trình (1.10) và nghiệm này cho bởi*

$$u(t) = f(t) - \mu\big(r_\mu * f\big)(t), t \in [0, +\infty).$$

Đặc biệt, nếu $f \in L^p_{loc}\big(\mathbb{R}^+\big), 1 \le p \le \infty$ hoặc $f \in C(\mathbb{R}^+)$ thì nghiệm $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^+)$ hoặc $u \in C(\mathbb{R}^+)$ tương ứng.

Từ Định lí 1.7, ta thấy rằng nếu $\mathsf{a} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, bằng cách lấy $f \equiv 1$ trong phương trình (1.10), thì phương trình (1.11) cũng tồn tại và duy nhất nghiệm kí hiệu nghiệm này là s_μ.

Tiếp theo, chúng tôi phát biểu khái niệm nhân hoàn toàn dương. Lớp nhân này được đề xuất bởi P. Clément và J.A. Nohel vào năm 1981 để nghiên cứu dòng nhiệt trong những vật liệu có tính chất nhớ (xem [20, Definition 1.1]).

Định nghĩa 1.15. Nhân $\mathsf{a} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ được gọi là hoàn toàn dương nếu với mỗi $\mu > 0$ các hàm s_μ, r_μ không âm trên $\mathbb{R}^+$.

Định lí sau chỉ ra điều kiện cần và đủ để nhân $\mathsf{a} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ hoàn toàn dương. Chứng minh chi tiết ta có thể xem [20, Theorem 2.2].

Định lí 1.8. *Nhân $\mathsf{a} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ hoàn toàn dương khi và chỉ khi tồn tại số $\varepsilon \geq 0$ và hàm $\mathsf{b} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ không âm, không tăng sao cho $\varepsilon\mathsf{a}(t) + \big(\mathsf{b} * \mathsf{a}\big)(t) = 1$ trên $\mathbb{R}^+$.*

Như đã chứng minh trong [63, Lemma 2], nhân a hoàn toàn đơn điệu trên $(0, \infty)$, nghĩa là $(-1)^n \mathsf{a}^{(n)}(t) \geq 0, \forall t > 0, n \in \mathbb{N}$, thì a hoàn toàn dương. Đặc biệt, nếu a hoàn toàn đơn điệu và không đồng nhất bằng 0 trên $(0, \infty)$ thì $\log \mathsf{a}$ là hàm lồi trên $(0, \infty)$. Ví dụ điển hình về nhân hoàn toàn dương cho bởi $\mathsf{a} = g_\alpha, \alpha \in (0, 1)$. Ta dễ kiểm tra được g_α là hàm không bị chặn, khả tích địa phương và hoàn toàn đơn điệu trên $(0, \infty)$ và do đó g_α hoàn toàn dương. Ngoài ra, hàm $\mathsf{b} = g_{1-\alpha}$ cùng với hàm a thoả mãn Định lí 1.8 với $\varepsilon = 0$. Những ví dụ khác về nhân hoàn toàn dương và các ứng dụng của nó xin tham khảo [28, 67, 83].

Các tính chất quan trọng của s_μ và r_μ được cho trong mệnh đề sau, chứng minh chi tiết các kết quả này có thể xem trong [20, 67, 83].

Mệnh đề 1.4. *Giả sử nhân a là hoàn toàn dương, khi đó ta có các khẳng định sau.*

(i) *Với mỗi $\mu > 0$, s_μ và r_μ là các hàm thuộc $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Hơn nữa $s_\mu \in H^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^+)$, s_μ là hàm không tăng và*

$$s_\mu(t) \leq \frac{1}{1 + \mu(1 * \mathsf{a})(t)}, \text{ với mọi } t \geq 0.$$

(ii) *$\mu\big(1 * r_\mu\big)(t) = 1 - s_\mu(t), t \geq 0$ và $\dfrac{d}{dt} s_\mu(t) = -\mu r_\mu(t)$ với hầu khắp $t > 0$.*

(iii) *Với mỗi $t > 0$, các hàm thực*

$$\mu \mapsto s_\mu(t),\ \mu \mapsto r_\mu(t)$$

không tăng.

Xét phương trình (1.11) và (1.12) với $\mathsf{a} = g_\alpha$. Sử dụng phép biến đổi Laplace ta nhận được $s_\mu(t) = E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha)$ và $r_\mu(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\mu t^\alpha)$. Đặt $v(t) = s_\mu(t)v_0 + (r_\mu * g)(t), g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Khi đó v là nghiệm của phương trình

$$\frac{d}{dt}\big(g_{1-\alpha} * [v - v_0]\big)(t) + \mu v(t) = g(t), v(0) = v_0.$$

Thật vậy, từ phương trình (1.11) ta có $s_\mu(0) = 1$ và $s_\mu - 1 + \mu(g_\alpha * s_\mu) = 0$ hay $g_{1-\alpha} * (s_\mu - 1) + \mu(1 * s_\mu) = 0$. Do đó $\frac{d}{dt}\big(g_{1-\alpha} * [(s_\mu - 1)]\big) + \mu s_\mu = 0, s_\mu(0) = 1$. Hơn nữa

$$\begin{aligned} g_{1-\alpha} * (v - v_0) &= g_{1-\alpha} * (s_\mu - 1)v_0 + g_{1-\alpha} * r_\mu * g \\ &= g_{1-\alpha} * (s_\mu - 1)v_0 + s_\mu * g, \end{aligned}$$

và do đó

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\big(g_{1-\alpha} * [v - v_0]\big) &= \frac{d}{dt}\big(g_{1-\alpha} * [s_\mu - 1]\big)v_0 + s_\mu(0)g + s'_\mu * g \\ &= -\mu s_\mu(\cdot)v_0 + g - \mu r_\mu * g \\ &= -\mu[s_\mu(\cdot)v_0 + r_\mu * g] + g \\ &= -\mu v + g, \end{aligned}$$

ở đây chúng tôi sử dụng $g_{1-\alpha} * r_\mu = s_\mu$ và $s'_\mu(t) = -\mu r_\mu(t), t > 0$.

Từ phân tích ở trên, chúng tôi phát biểu và chứng minh bất đẳng thức kiểu Gronwall làm cơ sở cho những kết quả ở phần sau của luận án.

Bổ đề 1.3. *Cho $v : [0, T] \to \mathbb{R}^+$ là hàm liên tục và thoả mãn bất đẳng thức tích phân*

$$v(t) \le E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha)v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\big(-\mu(t-s)^\alpha\big)\,(\ell\, v(s) + \kappa)\,ds, \quad (1.13)$$

trong đó $\alpha \in (0,1), 0 < \ell < \mu,\ \kappa \geq 0, v_0 \geq 0$. *Khi đó*

$$v(t) \leq E_{\alpha,1}(-(\mu-\ell)t^\alpha)v_0 + \frac{\kappa}{\mu-\ell}\left(1 - E_{\alpha,1}(-(\mu-\ell)t^\alpha)\right).$$

Chứng minh. Đặt $\omega(t)$ là vế phải của bất đẳng thức (1.13). Khi đó $v(t) \leq \omega(t), \forall t \geq 0$ và ω là nghiệm của bài toán

$$\frac{d}{dt}\big(g_{1-\alpha} * [\omega - v_0]\big)(t) + \mu\omega(t) = \ell\, v(t) + \kappa, \omega(0) = v_0. \tag{1.14}$$

Bài toán (1.14) tương đương với

$$\frac{d}{dt}\big(g_{1-\alpha} * [\omega - v_0]\big)(t) + (\mu-\ell)\omega(t) = \ell(v(t) - \omega(t)) + \kappa, \omega(0) = v_0.$$

Từ đây, ta có

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= E_{\alpha,1}(-(\mu-\ell)t^\alpha)v_0 \\
&\qquad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\big(-(\mu-\ell)(t-s)^\alpha\big)\left(\ell\left(v(s) - \omega(s)\right) + \kappa\right)ds, \\
&\leq E_{\alpha,1}(-(\mu-\ell)t^\alpha)v_0 + \kappa\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\big(-(\mu-\ell)(t-s)^\alpha\big)ds \\
&= E_{\alpha,1}(-\mu t^\alpha)v_0 + \frac{\kappa}{\mu-\ell}\left(1 - E_{\alpha,1}(-(\eta-\ell)t^\alpha)\right), \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức cuối và $v(t) \leq \omega(t), \forall t \geq 0$, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Trong Chương 2 và Chương 4, chúng tôi cũng sử dụng bất đẳng thức kiểu Gronwall sau.

Bổ đề 1.4. ([88, Corollary 2]) *Giả sử rằng* $\beta > 0, b \geq 0$ *và* σ *là hàm không giảm, không âm và khả tích địa phương trên* $\mathbb{R}^+$. *Khi đó, nếu* v *là hàm không âm khả tích địa phương trên* $\mathbb{R}^+$ *và thoả mãn*

$$v(t) \leq \sigma(t) + b\int_0^t (t-s)^{\beta-1}v(s)ds,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

thì $v(t) \leq \sigma(t)E_{\beta,1}(b\Gamma(\beta)t^\beta)$ *với mọi* $t \in \mathbb{R}^+$.

Chương 2

DÁNG ĐIỆU NGHIỆM TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CỦA MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HOÁ KHÔNG ĐỊA PHƯƠNG NỬA TUYẾN TÍNH

Chương này, chúng tôi mở rộng khái niệm về tính hút và hút mũ trong khoảng thời gian hữu hạn do Giesl và Rasmussen đề xuất trong [27, 69] và xét các tính chất này của nghiệm đối với hai lớp NDE nửa tuyến tính: lớp phương trình dưới khuếch tán và lớp phương trình loại Basset.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo số [1], [2] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

2.1. Dáng điệu nghiệm trong thời gian hữu hạn của phương trình dưới khuếch tán

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu tính giải được và tính hút, hút mũ trong khoảng thời gian hữu hạn cho các nghiệm của phương trình dưới khuếch tán.

2.1.1. Đặt bài toán

Cho $(X, \|\cdot\|)$ là không gian Banach và $\alpha \in (0,1)$. Xét phương trình

$$\frac{d}{dt}\big(g_{1-\alpha} * [u - u(0)]\big)(t) = Au(t) + f\big(u(t)\big), t \in [0,T], \tag{2.1}$$

ở đó $g_{1-\alpha}(t) = t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha), \alpha \in (0,1), t > 0$, hàm trạng thái $u(\cdot)$ lấy giá trị trong không gian Banach X, A là toán tử tuyến tính đóng trên X, $f : X \to X$ là hàm phi tuyến.

2.1.2. Sự tồn tại nghiệm tích phân

Để nghiên cứu tính giải được của phương trình (2.1), chúng tôi đặt các giả thiết sau.

(**HA**) C_0-nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sinh bởi A liên tục theo chuẩn và tồn tại $M \geq 1$ sao cho

$$\|S(t)u\| \leq M\|u\|, \forall t \geq 0, \forall u \in X.$$

(**HF**) Hàm phi tuyến $f : X \to X$ liên tục và thoả mãn

(1) điều kiện tăng trưởng

$$\|f(u)\| \leq \Psi(\|u\|), \forall u \in X,$$

trong đó $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là một hàm liên tục không giảm;

(2) nếu $S(\cdot)$ không compact thì với mỗi tập bị chặn $\Omega \subset X$, ta có

$$\chi\big(f(\Omega)\big) \leq k\, \chi(\Omega), k \in \mathbb{R}^+.$$

Nhận xét 2.1. Chú ý rằng, theo [2, Theorem 1.5.7], giả thiết (**HF**)(2) được thoả mãn nếu f hoàn toàn liên tục hoặc liên tục Lipschitz với hệ số k.

Sử dụng phép biến đổi Laplace, nghiệm tích phân của phương trình (2.1) được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 2.1. Hàm $u \in C([0,T]; X)$ được gọi là nghiệm tích phân của phương trình (2.1) trên $[0,T]$ với dữ kiện ban đầu ξ nếu

$$u(t) = \mathcal{S}_\alpha(t)\xi + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{P}_\alpha(t-s)f(u(s))\, ds, \forall t \in [0,T].$$

Cho $\xi \in X$, xét *toán tử nghiệm* $\Sigma : C([0,T];X) \to C([0,T];X)$ cho bởi công thức

$$\Sigma(u)(t) = \mathcal{S}_\alpha(t)\xi + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{P}_\alpha(t-s)f(u(s))\,ds,$$

hoặc tương đương,

$$\Sigma(u)(t) = \mathcal{S}_\alpha(t)\xi + \mathcal{Q}_\alpha \circ N_f(u)(t),$$

trong đó $\mathcal{Q}_\alpha$ cho bởi (1.9) và $N_f(u)(t) = f(u(t))$ với $u \in C([0,T];X)$.

Theo công thức trên ta thấy rằng u là nghiệm tích phân của phương trình (2.1) khi và chỉ khi u là điểm bất động của toán tử nghiệm Σ. Từ giả thiết đặt trên f và định lí hội tụ trội Lebesgue, Σ là toán tử liên tục trên $C([0,T];X)$.

Bổ đề sau chỉ ra tính nén của Σ.

Bổ đề 2.1. *Nếu các giả thiết* (**HA**) *và* (**HF**) *được thoả mãn thì với mọi tập bị chặn* $\Omega \subset C([0,T];X)$ *ta có ước lượng*

$$\chi_T(\Sigma(\Omega)) \le \Big(\sup_{t\in[0,T]} 4k\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_\chi ds\Big)\chi_T(\Omega).$$

Chứng minh. Giả sử Ω là một tập bị chặn trong $C([0,T];X)$. Với $u \in \Omega$, ta có

$$\Sigma(u)(t) = \mathcal{S}_\alpha(t)\xi + \mathcal{Q}_\alpha \circ N_f(u)(t),$$

trong đó $N_f(u)(t) = f\big(u(t)\big)$. Từ giả thiết (**F**)(1), $N_f(\Omega)$ là tập bị chặn tích phân. Từ đây và Mệnh đề 1.3, ta thấy rằng $\mathcal{Q}_\alpha \circ N_f(\Omega)$ là tập đồng liên tục trong $C([0,T];X)$. Do đó

$$\mathrm{mod}_T(\Sigma(\Omega)) = \mathrm{mod}_T(\mathcal{Q}_\alpha \circ N_f(\Omega)) = 0. \tag{2.2}$$

Mặt khác

$$\chi(\Sigma(\Omega)(t)) \le \chi(\mathcal{Q}_\alpha \circ N_f(\Omega)(t)),\ t \ge 0.$$

Theo Mệnh đề 1.2, ta có ước lượng

$$\chi(\mathcal{Q}_\alpha \circ N_f(\Omega)(t)) \leq 4\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\chi(\mathcal{P}_\alpha(t-s)f(\Omega(s))\,ds.$$

Nếu nửa nhóm $S(\cdot)$ compact thì, theo Mệnh đề 1.1, $\mathcal{P}_\alpha(\cdot)$ cũng là toán tử compact. Do đó $\chi(\mathcal{P}_\alpha(t-s)f(\Omega(s)) = 0$. Trường hợp ngược lại, sử dụng giả thiết $(\mathbf{F})(2)$, ta có

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{Q}_\alpha \circ N_f(\Omega)(t)) &\leq 4\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_\chi \cdot \chi(f(\Omega(s)))ds\\ &\leq 4k\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_\chi \cdot \chi(\Omega(s))ds.\end{aligned}$$

Suy ra

$$e^{-Lt}\chi(\Sigma(\Omega)(t)) \leq \Big(4k\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{-L(t-s)}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_\chi\,ds\Big)\sup_{t\in[0,T]} e^{-Lt}\chi(\Omega(t)). \tag{2.3}$$

Từ các ước lượng (2.2) và (2.3), ta có

$$\chi_T(\Sigma(\Omega)) \leq \Big(\sup_{t\in[0,T]} 4k\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{-L(t-s)}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_\chi ds\Big)\chi_T(\Omega).$$

Bổ đề được chứng minh. □

Chọn L trong (1.1) sao cho

$$4k\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{-L(t-s)}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_\chi\,ds < 1.$$

Khi đó theo Bổ đề 2.1, toán tử nghiệm Σ là χ_T-nén. Định lí sau phát biểu kết quả về tính giải được của phương trình (2.1).

Định lí 2.1. *Giả sử các giả thiết* (**HA**) *và* (**HF**) *được thoả mãn. Nếu tồn tại $R > 0$ sao cho*

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)R}{\Gamma(\alpha+1)\|\xi\| + T^\alpha\Psi(R)} \geq M, \tag{2.4}$$

thì tồn tại một tập compact khác rỗng các nghiệm tích phân của phương trình (2.1) *trên* $[0, T]$.

Chứng minh. Áp dụng Định lí 1.4, ta cần chứng minh Σ giữ bất biến B_R với $R > 0$ cho trong giả thiết. Thật vậy với mỗi $u \in B_R$, ta có

$$\begin{aligned}\|\Sigma(u)(t)\| &\le \|\mathcal{S}_\alpha(t)\|_{op}\|\xi\| + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_{op}\Psi(\|u(s)\|)\, ds \\ &\le M\|\xi\| + \frac{MT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\Psi(R) \le R, \forall t \in [0, T].\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối chỉ ra rằng $\Sigma(u) \in B_R$. Định lí được chứng minh. $\square$

Nhận xét 2.2. (i) Điều kiện (2.4) cho phép hàm phi tuyến có tăng trưởng trên tuyến tính. Chẳng hạn $\Psi(r) = \ell r^2$, thì điều kiện (2.4) là

$$M\ell T^\alpha R^2 - \Gamma(\alpha+1)R + M\Gamma(\alpha+1)\|\xi\| \le 0.$$

Do đó ta chọn R sao cho

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma(\alpha+1) - \delta}{2\ell MT^\alpha} \le R \le \frac{\Gamma(\alpha+1) + \delta}{2\ell MT^\alpha}, \\ &\delta = \sqrt{\Gamma^2(\alpha+1) - 4\ell M^2T^\alpha\Gamma(\alpha+1)\|\xi\|},\end{aligned}$$

với điều kiện $4\ell M^2T^\alpha\|\xi\| \le \Gamma(\alpha+1)$.

(ii) Nếu $\|f(u)\| = o(\|u\|)$ khi $\|u\| \to 0$ thì kết luận của Định lí 2.1 vẫn đúng với điều kiện dữ kiện ban đầu ξ đủ nhỏ, trong trường hợp này giả thiết (**F**)(1) và (2.4) không cần thiết. Ta chứng minh khẳng định $\Sigma(B_\delta) \subset B_\delta$ với δ đủ nhỏ. Thật vậy, theo giả thiết, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\|f(u)\| \le \epsilon\|u\|$ nếu $\|u\| \le \delta$.

Lấy $u \in B_\delta$, $\epsilon = \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{2MT^\alpha}$ và $\|\xi\| \le \dfrac{\delta}{2M}$, thì

$$\|\Sigma(u)(t)\| \le M\|\xi\| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|f(u(s))\|ds$$

$$\le M\|\xi\| + \frac{\epsilon M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|u(s)\|ds$$
$$\le M\|\xi\| + \frac{\epsilon M T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\delta \le \delta,\ \forall t \in [0,T],$$

khẳng định được chứng minh.

(iii) Nếu f có tăng trưởng dưới tuyến tính, nghĩa là có các số không âm a, b sao cho $\Psi(r) = a + br$, thì không cần điều kiện (2.4) (xem [6]).

2.1.3. Tính hút trong thời gian hữu hạn

Trong phần này, chúng tôi chứng minh một số kết quả về tính hút trong thời gian hữu hạn cho nghiệm của phương trình (2.1). Kí hiệu $\mathbb{S}(\xi)$ là tập các nghiệm của phương trình (2.1) ứng với dữ kiện ban đầu ξ. Chú ý rằng giả thiết (**F**) đặt trên f không đảm bảo cho sự duy nhất nghiệm của phương trình (2.1). Vì thế chúng tôi sử dụng khái niệm sau về tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm của phương trình (2.1).

Định nghĩa 2.2 (Tính hút trong thời gian hữu hạn)**.** Cho $y : [0,T] \to X$ là một nghiệm của phương trình (2.1).

(i) y được gọi là hút trên $[0,T]$ nếu tồn tại $\eta > 0$ sao cho

$$\|u(T,\xi) - y(T,y(0))\| < \|\xi - y(0)\|,$$

với mọi $\xi \in B_\eta(y(0))\setminus\{y(0)\}$ và $u \in \mathbb{S}(\xi)$.

(ii) y được gọi là hút mũ trên $[0,T]$ nếu

$$\limsup_{\eta\searrow 0} \frac{1}{\eta} \sup_{\xi\in B_\eta(y(0))} \sup_{u\in\mathbb{S}(\xi)} \|u(T,\xi) - y(T,y(0))\| < 1.$$

Từ định nghĩa suy ra rằng nếu một nghiệm có tính chất hút mũ thì nó có tính chất hút. Bổ đề sau cho ta một điều kiện đủ của tính hút mũ.

Bổ đề 2.2. *Cho $y \in C([0,T];X)$ là một nghiệm của phương trình* (2.1). *Khi đó y hút mũ trên $[0,T]$ nếu*

$$\limsup_{\|\xi\|\to 0} \sup_{u\in\mathbb{S}(y(0)+\xi)} \frac{\|u(T,y(0)+\xi)-y(T,y(0))\|}{\|\xi\|} < 1. \tag{2.5}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\eta} \sup_{\xi\in B_\eta(y(0))} \sup_{u\in\mathbb{S}(\xi)} \|u(T,\xi)-y(T,y(0))\| \\
&\quad = \sup_{\|\xi\|<\eta} \sup_{u\in\mathbb{S}(y(0)+\xi)} \frac{\|u(T,y(0)+\xi)-y(T,y(0))\|}{\|\xi\|}\frac{\|\xi\|}{\eta} \\
&\quad \le \sup_{\|\xi\|<\eta} \sup_{u\in\mathbb{S}(y(0)+\xi)} \frac{\|u(T,y(0)+\xi)-y(T,y(0))\|}{\|\xi\|}.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\eta\searrow 0}\frac{1}{\eta} \sup_{\xi\in B_\eta(y(0))} \sup_{u\in\mathbb{S}(\xi)} \|u(T,\xi)-y(T,y(0))\| \\
&\quad \le \limsup_{\|\xi\|\to 0} \sup_{u\in\mathbb{S}(y(0)+\xi)} \frac{\|u(T,y(0)+\xi)-y(T,y(0))\|}{\|\xi\|}.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối kết hợp với điều kiện (2.5) cho ta điều phải chứng minh. □

Để nghiên cứu tính hút trong thời gian hữu hạn cho các nghiệm của phương trình (2.1), chúng tôi thay thế các giả thiết (**HA**) và (**HF**) bởi các giả thiết sau.

(**A***) Nửa nhóm $S(\cdot)$ sinh bởi A liên tục theo chuẩn và tồn tại $M \ge 1, \beta > 0$ sao cho

$$\|S(t)u\| \le Me^{-\beta t}\|u\|, \forall t \ge 0, \forall u \in X.$$

(**F***) Hàm f thoả mãn giả thiết (**HF**) với Ψ là hàm Lipschitz địa phương, $\Psi(0) = 0$ và tồn tại số $\gamma < \frac{\beta}{M}$ sao cho $\|f(u)\| = \gamma\|u\| + o(\|u\|)$ khi $\|u\| \to 0$.

Bổ đề 2.3. *Nếu các giả thiết* ($\mathbf{A}^*$) *và* ($\mathbf{F}^*$) *được thoả mãn thì*

$$\limsup_{\|\xi\|\to 0} \sup_{u\in\mathbb{S}(\xi)} \|u(t)\| = 0, \ \forall t \in (0,T].$$

Chứng minh. Lấy $\xi \in X$. Theo công thức nghiệm ta có

$$\|u(t)\| \le M\|\xi\| + \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Psi(\|u(s)\|)ds, \ \forall t\in(0,T], \ \forall u \in \mathbb{S}(\xi).$$

Đặt $v(t) = \limsup\limits_{\|\xi\|\to 0} \sup\limits_{u\in\mathbb{S}(\xi)} \|u(t)\|$. Theo giả thiết và bất đẳng thức trên ta có

$$v(t) \le \frac{M}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\Psi(v(s))ds, \ \forall t\in(0,T]. \tag{2.6}$$

Đặt $|v|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,T]} v(t)$. Vì Ψ là hàm Lipschitz địa phương nên tồn tại $L = L(|v|_\infty)$ sao cho

$$\Psi(v(t)) = |\Psi(v(t)) - \Psi(0)| \le Lv(t), \ \forall t \in [0,T].$$

Do đó từ bất đẳng thức (2.6) ta có

$$v(t) \le \frac{ML}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}v(s)ds, \ \forall t\in(0,T].$$

Áp dụng Bổ đề 1.4 suy ra $v = 0$. Bổ đề được chứng minh. □

Định lí 2.2. *Nếu các giả thiết* ($\mathbf{A}^*$) *và* ($\mathbf{F}^*$) *được thoả mãn và*

$$E_{\alpha,1}(-(\beta-\gamma M)T^\alpha) < \frac{1}{M}, \tag{2.7}$$

thì nghiệm tầm thường của phương trình (2.1) *hút mũ trên* $[0,T]$.

Chứng minh. Cho trước $\epsilon > 0$. Theo giả thiết về hàm f, tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$\|f(v)\| \le (\gamma+\epsilon)\|v\|, \ \forall v \in B_\delta.$$

Sử dụng Bổ đề 2.3, ta tìm được $\eta > 0$ sao cho với $\xi \in B_\eta$ thì $\|u(t)\| \leq \delta,\ \forall t \in (0,T],\ \forall u \in \mathbb{S}(\xi)$. Do đó với $\xi \in B_\eta$ ta có

$$\|f(u(t))\| \leq (\gamma+\epsilon)\|u(t)\|,\ \forall t \in (0,T],\ \forall u \in \mathbb{S}(\xi).$$

Chọn $\epsilon > 0$ sao cho $ME_{\alpha,1}\left(-(\beta - M(\gamma+\epsilon))T^\alpha\right) < 1$. Sử dụng giả thiết $(\mathbf{A}^*)$ và Bổ đề 1.1, ta nhận được ước lượng sau

$$\begin{aligned}\|u(t)\| &\leq ME_{\alpha,1}(-\beta t^\alpha)\|\xi\| + M\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\beta(t-s)^\alpha)\|f(u(s))\|ds \\ &\leq ME_{\alpha,1}(-\beta t^\alpha)\|\xi\| + M(\gamma+\epsilon)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\beta(t-s)^\alpha)\|u(s)\|ds,\end{aligned}$$

với mọi $\xi \in B_\eta$ và $u \in \mathbb{S}(\xi)$. Áp dụng Bổ đề 1.3, ta có

$$\|u(t)\| \leq ME_{\alpha,1}\left(-(\beta - M(\gamma+\epsilon))t^\alpha\right)\|\xi\|,\ \forall t \in (0,T].$$

Do đó

$$\limsup_{\|\xi\|\to 0}\sup_{u\in\mathbb{S}(\xi)}\frac{\|u(T)\|}{\|\xi\|} < 1.$$

Định lí được chứng minh. □

Hệ quả sau cho ta kết quả về hút tuyến tính hoá cho phương trình (2.1).

Hệ quả 2.1. *Giả sử* $(\mathbf{HA})$ *được thoả mãn và* $f \in C^1(X)$ *sao cho*

(1) $f(0) = 0$;

(2) *f thoả mãn giả thiết* $(\mathbf{HF})$ *với Ψ là hàm Lipschitz địa phương;*

(3) *$A_0 = A + Df(0)$ là toán tử sinh của nửa nhóm ổn định mũ $\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$, nghĩa là tồn tại $\beta > 0$ sao cho*

$$\|S_0(t)\|_{op} \leq e^{-\beta t},\ \forall t \geq 0.$$

Khi đó, nghiệm tầm thường của phương trình (2.1) *hút mũ trên* $[0, T]$.

Chứng minh. Ta có

$$S_0(t)v = S(t)v + \int_0^t S(t-s)Df(0)S_0(s)vds, \ \forall v \in X,$$

trong đó $S(\cdot)$ là nửa nhóm sinh bởi A. Công thức biểu diễn ở trên khẳng định rằng $S_0(\cdot)$ có cùng tính chất compact hoặc liên tục theo chuẩn như $S(\cdot)$. Đặt $f_0(u) = f(u) - Df(0)u$ ta được $f_0 \in C^1(X)$.

Nếu $S(\cdot)$ không compact, thì với tập bị chặn tuỳ ý $\Omega \subset X$ ta có

$$\chi(f_0(\Omega)) \leq \chi(f(\Omega)) + \|Df(0)\|_{op}\chi(\Omega) \leq (k + \|Df(0)\|_{op})\chi(\Omega).$$

Mặt khác

$$\|f_0(u)\| \leq \|f(u)\| + \|Df(0)\|_{op}\|u\| \leq \Psi(\|u\|) + \|Df(0)\|_{op}\|u\| = \tilde{\Psi}(\|u\|).$$

Rõ ràng $\tilde{\Psi}$ là hàm liên tục không giảm, Lipschitz địa phương. Hơn nữa $\|f_0(u)\| = o(\|u\|)$ khi $\|u\| \to 0$, nghĩa là, f_0 thoả mãn giả thiết ($\mathbf{F}^*$) với $\gamma = 0$. Viết lại phương trình phương trình (2.1) dưới dạng

$$\frac{d}{dt}(g_{1-\alpha} * [u - u(0)])(t) = A_0u(t) + f_0(u(t)).$$

Áp dụng Định lí 2.2 cho phương trình cuối với $M = 1$, ta nhận được chứng minh của Hệ quả 2.1. $\square$

Để chứng minh tính hút của các nghiệm khác nghiệm tầm thường, ta thay giả thiết ($\mathbf{F}^*$) bởi giả thiết sau.

($\mathbf{F}^\sharp$) Hàm f thoả mãn giả thiết (**HF**)(2) và

$$\|f(u) - f(v)\| \leq \Psi(\|u - v\|), \ \forall u, v \in X,$$

trong đó $\Psi \in C(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^+)$ là hàm Lipschitz địa phương, không giảm và tồn tại số $\gamma < \frac{\beta}{M}$ sao cho $\Psi(r) = \gamma r + o(r)$ khi $r \to 0$.

Định lí 2.3. *Giả sử* $(\mathbf{A}^*)$, $(\mathbf{F}^\sharp)$ *và* (2.7) *được thoả mãn. Khi đó mọi nghiệm của phương trình* (2.1) *hút mũ trên* $[0, T]$.

Chứng minh. Cố định $\xi^* \in X$ và $u^* \in \mathbb{S}(\xi^*)$, ta chứng minh tính hút mũ của nghiệm u^*. Với $u \in \mathbb{S}(\xi)$, $\xi \in X$, đặt

$$\tilde{\xi} = \xi - \xi^*, \ \tilde{u}(t) = u(t) - u^*(t), \ t \in [0, T].$$

Khi đó, $\tilde{u}$ thoả mãn

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{S}_\alpha(t)\tilde{\xi} + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{P}_\alpha(t-s)[f(u(s)) - f(u^*(s))]ds.$$

Theo giả thiết $(\mathbf{F}^\sharp)$, ta có

$$\|f(u(t)) - f(u^*(t))\| \le \Psi(\|\tilde{u}(t)\|), \ \forall t \in [0, T].$$

Lập luận tương tự như chứng minh của Bổ đề 2.3, ta có

$$\limsup_{\|\tilde{\xi}\| \to 0} \sup_{u \in \mathbb{S}(\xi)} \|u(t) - u^*(t)\| = 0, \ \forall t \in (0, T].$$

Tương tự như trong chứng minh của Định lí 2.2, ta nhận được

$$\limsup_{\|\tilde{\xi}\| \to 0} \sup_{u \in \mathbb{S}(\xi)} \frac{\|u(T) - u^*(T)\|}{\|\tilde{\xi}\|} = 0.$$

Từ đó suy ra

$$\limsup_{\|\tilde{\xi}\| \to 0} \sup_{u \in \mathbb{S}(\xi^* + \tilde{\xi})} \frac{\|u(T) - u^*(T)\|}{\|\tilde{\xi}\|} = 0.$$

Định lí được chứng minh. □

2.1.4. Áp dụng

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là miền bị chặn với biên $\partial\Omega$ trơn. Xét phương trình đạo hàm riêng phân thứ cấp α

$$\partial_t^\alpha u(x, t) = \Delta_x u(x, t) + \tilde{f}(u(x, t)), \ \alpha \in (0, 1), \ t \in [0, T], \tag{2.8}$$

với điều kiện biên

$$u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \tag{2.9}$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = \xi(x),\ x \in \Omega. \tag{2.10}$$

Trong mô hình bài toán (2.8)-(2.10), ∂_t^α là đạo hàm phân thứ Caputo cấp α ứng với biến thời gian t, Δ_x là toán tử Laplace theo biến x, và $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục.

Xét

$$X = C_0(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v = 0 \text{ trên } \partial\Omega\},$$

với $\|v\| = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |v(x)|$. Đặt $A = \Delta$ với miền xác định

$$D(A) = \{v \in C_0(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega) : \Delta v \in C_0(\overline{\Omega})\},$$

và xét $f : C_0(\overline{\Omega}) \to C_0(\overline{\Omega})$ như sau

$$f(v)(x) = \tilde{f}(v(x)),\ \forall v \in C_0(\overline{\Omega}).$$

Khi đó (2.8)-(2.10) là một trường hợp cụ thể của phương trình (2.1). Ta biết rằng, theo [84, Theorem 4.1.4], C_0-nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sinh bởi A co trên X, nghĩa là $\|S(t)\|_{op} \leq 1, \forall t \geq 0$. Hơn nữa, theo [8, Theorem 2.3], $S(\cdot)$ là nửa nhóm compact. Do đó giả thiết (**HA**) thoả mãn.

Lưu ý rằng với nửa nhóm co $S(\cdot)$, thì $\|S(t)\|_{op} = 1$ với mọi $t \geq 0$ hoặc $S(\cdot)$ ổn định mũ. Theo [30, Định lí 4.2.2], ta có

$$\|S(t)\|_{op} \leq Me^{-\lambda_1 t},\ M = \exp\left(\frac{\lambda_1 |\Omega|^{2/N}}{4\pi}\right),$$

trong đó λ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta$ trong $H_0^1(\Omega)$, cụ thể

$$\lambda_1 = \sup\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx} : u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0\right\},$$

và $|\Omega|$ là thể tích của miền Ω. Do đó giả thiết ($\mathbf{A}^*$) được thoả mãn.

Ta xét trường hợp $\tilde{f}$ có tăng trưởng trên tuyến tính

$$|\tilde{f}(z)| \leq k\,|z|^p, \forall z \in \mathbb{R},\ \text{với } k > 0,\ p > 1.$$

Khi đó $f(0) = 0$ và $\|f(v)\| \leq k\|v\|^p$ với mọi $v \in C_0(\overline{\Omega})$. Ta thấy rằng f thoả mãn ($\mathbf{F}^*$) với $\gamma = 0$. Theo Định lí 2.2, nghiệm tầm thường của (2.8) hút mũ trên $[0, T]$ nếu

$$\exp\left(\frac{\lambda_1|\Omega|^{2/N}}{4\pi}\right) E_{\alpha,1}(-\lambda_1 T^\alpha) < 1.$$

Thực tế, điều kiện cuối đặt trên T, điều kiện này yêu cầu $T > T^*$ với $T^* = T^*(\Omega, N) > 0$. Ta sẽ thay thế điều kiện này bởi giả thiết rằng $\tilde{f} \in C^2(\mathbb{R})$ sao cho $\tilde{f}'(0) < 0$. Vì $\tilde{f}$ khả vi cấp hai, nên $f \in C^1(C_0(\overline{\Omega}))$ (xem [80, Lemma 4.13]). Chú ý là $Df(0) = \tilde{f}'(0)I$, nửa nhóm $S_0(\cdot)$ sinh bởi $A_0 = A + Df(0)$ xác định bởi

$$S_0(t) = e^{\tilde{f}'(0)t} S(t),\ t \geq 0,$$

và vì $S(\cdot)$ là nửa nhóm co nên

$$\|S_0(t)\|_{op} \leq e^{\tilde{f}'(0)t},\ t \geq 0.$$

Sử dụng Hệ quả 2.1, ta có thể khẳng định rằng nghiệm tầm thường của (2.8) hút mũ trên $[0, T]$ với mọi $T > 0$.

2.2. Dáng điệu nghiệm trong thời gian hữu hạn của phương trình tiến hoá loại Basset

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu tính giải được và tính hút, hút mũ trong khoảng thời gian hữu hạn cho các nghiệm của phương trình tiến hoá loại Basset.

2.2.1. Đặt bài toán

Cho H là không gian Hilbert khả ly và $T > 0$. Xét bài toán

$$\frac{d}{dt}\big(k_0 u + k * [u - u(0)]\big)(t) + Au(t) = f\big(u(t)\big), t \in (0, T] \tag{2.11}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2.12}$$

trong đó hàm trạng thái $u(\cdot)$ lấy giá trị trong H, $k_0 > 0$, $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, A là toán tử tuyến tính trên H và $f : H \to H$ là hàm phi tuyến.

Để nghiên cứu bài toán (2.11)-(2.12), chúng tôi đặt các giả thiết sau.

(Hk) $k_0 > 0$ và nhân $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ là một hàm không tăng, không âm.

(Ha) $A : D(A) \to H$ là toán tử trù mật, xác định dương, tự liên hợp với giải thức compact.

Tiếp theo, sử dụng cách tiếp cận được đề xuất trong [44], chúng tôi thiết lập công thức nghiệm dạng biến thiên hằng số đối với bài toán tuyến tính.

2.2.2. Biểu diễn nghiệm của bài toán tuyến tính

Giả sử giả thiết (Hk) được thoả mãn. Xét bài toán tuyến tính

$$\frac{d}{dt}\big(k_0 u + k * [u - u_0]\big)(t) + Au(t) = f(t), t \in (0, T] \tag{2.13}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2.14}$$

ở đó $f \in C([0, T]; H)$. Để đưa ra công thức nghiệm cho bài toán (2.13)-(2.14), ta xét các phương trình tích phân Volterra

$$s_\mu(t) + \mu\big(\ell * s_\mu\big)(t) = 1, \quad t \geq 0, \tag{2.15}$$

và

$$r_\mu(t) + \mu\big(\ell * r_\mu\big)(t) = \ell(t), \quad t \geq 0. \tag{2.16}$$

trong đó $\mu > 0$ và ℓ là nghiệm duy nhất của phương trình tích phân

$$k_0\ell + k * \ell = 1 \text{ trên } \mathbb{R}^+. \tag{2.17}$$

Ta biết rằng (xem [20, 63]), ℓ là hàm liên tục tuyệt đối và không âm trên $[0, T]$ và do đó các phương trình (2.15) và (2.16) tồn tại và duy nhất nghiệm. Mặt khác, theo [20, Theorem 2.2], đẳng thức (2.17) chứng tỏ nhân ℓ hoàn toàn dương.

Xét phương trình

$$\frac{d}{dt}\big(k_0 v + k * [v - v_0]\big)(t) = -\mu v(t) + g(t). \tag{2.18}$$

Tích phân (2.18) trên $[0, t]$, sau đó tích chập với nhân ℓ và sử dụng (2.17), ta nhận được

$$v = v_0 - \mu(\ell * v) + \ell * g. \tag{2.19}$$

Từ các tính chất của $s_\mu(\cdot)$ và $r_\mu(\cdot)$ được phát biểu trong Mệnh đề 1.4, phép biến đổi Laplace của các hàm này tồn tại và được cho bởi

$$\widehat{s_\mu}(\lambda) = \frac{1}{\lambda(1 + \mu\widehat{\ell}(\lambda))}, \; \widehat{r_\mu}(\lambda) = \frac{\widehat{\ell}(\lambda)}{1 + \mu\widehat{\ell}(\lambda)}.$$

Áp dụng phép biến đổi Laplace tới hai vế của phương trình (2.19), ta có

$$\widehat{v} = v_0\lambda^{-1} - \mu\widehat{\ell}\widehat{v} + \widehat{\ell}\widehat{g}. \tag{2.20}$$

Từ đây, ta nhận được

$$\widehat{v} = \widehat{s_\mu} v_0 + \widehat{r_\mu}\widehat{g}.$$

Do đó, nghiệm của phương trình (2.18) là

$$v(t) = s_\mu(t)v_0 + \big(r_\mu * g\big)(t).$$

Từ các kết quả trên cùng với lập luận tương tự như trong chứng minh của Bổ đề 1.3, ta nhận được bất đẳng thức kiểu Gronwall sau.

Bổ đề 2.4. *Cho $\mu > 0$ và giả sử $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là một hàm liên tục và thoả mãn bất đẳng thức tích phân*

$$v(t) \le s_\mu(t)v_0 + \int_0^t r_\mu(t-s)\big(a\,v(s) + b(s)\big)ds,$$

trong đó $0 < a < \mu$, $v_0 \ge 0$ và $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Khi đó

$$v(t) \le s_{\mu-a}(t)v_0 + \int_0^t r_{\mu-a}(t-s)b(s)\,ds.$$

Đặc biệt, nếu b là một hằng số thì

$$v(t) \le s_{\mu-a}(t)v_0 + \frac{b}{\mu-a}\big(1 - s_{\mu-a}(t)\big).$$

Theo giả thiết (Ha), tồn tại dãy tăng $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$,

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots, \lambda_n \to +\infty \text{ khi } n \to +\infty,$$

và các vectơ $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset D(A)$ sao cho $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ là một sở trực chuẩn của H và $Ae_n = \lambda_n e_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Trong các phần sau chúng tôi sử dụng các kí hiệu $(\cdot,\cdot)$ và $\|\cdot\|$ theo thứ tự là tích vô hướng và chuẩn trong H. Với mỗi $s \in \mathbb{R}$, ta định nghĩa toán tử phân thứ A^s của toán tử A như sau

$$A^s z := \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^s\,(z, e_n)\,e_n, z \in V_s := D(A^s) = \left\{z \in H : \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{2s}\,|(z,e_n)|^2 < \infty\right\}.$$

Chú ý rằng, V_s là không gian Banach với chuẩn

$$\|z\|_{V_s} = \left(\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{2s}\,|(z,e_n)|^2\right)^{\frac{1}{2}},\ z \in D(A^s).$$

Đồng nhất $V_{-s} = D(A^{-s})$ với V_s^*-không gian đối ngẫu của V_s. Khi đó V_{-s} là không gian Banach với chuẩn

$$\|h\|_{V_{-s}} = \left(\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-2s}\,|\langle h, e_n\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

trong đó $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là cặp đối ngẫu giữa V_{-s} và V_s. Đồng nhất H với đối ngẫu H^*, ta nhận được bao hàm sau

$$V_s \subset H \simeq H^* \subset V_{-s}, \text{ với mọi } s \geq 0.$$

Lập luận tương tự như trên, phương trình (2.13) được viết lại dưới dạng

$$u + \ell * Au = u_0 + \ell * f. \tag{2.21}$$

Giả sử $u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)e_n, u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_{0,n}e_n, f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)e_n, \forall t \geq 0$, trong đó $z_n = (z, e_n), \forall z \in H, \forall n = 1, 2, \ldots$ Thay vào (2.21) ta có

$$u_n(t) + \lambda_n\big(\ell * u_n\big)(t) = u_{0,n} + \big(\ell * f_n\big)(t).$$

Từ đây và phương trình (2.19) ta suy ra

$$u_n(t) = s_{\lambda_n}(t)u_{0,n} + \big(r_{\lambda_n} * f_n\big)(t).$$

Do đó

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t R(t-s)f(s)ds,$$

trong đó $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ và $\{R(t)\}_{t>0}$ được xác định bởi

$$S(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} s_{\lambda_n}(t)z_n e_n, t \geq 0, R(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} r_{\lambda_n}(t)z_n e_n, t > 0, z \in H, \text{ và}$$

$$\int_0^t R(t-s)f(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} \big(r_{\lambda_n} * f_n\big)(t)e_n.$$

Dễ thấy rằng $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ và $\{R(t)\}_{t>0}$ là các toán tử tuyến tính bị chặn trên H. Hơn nữa, sử dụng Mệnh đề 1.4(iii), ta có

$$\|S(t)z\| \leq s_{\lambda_1}(t)\|z\|, \ t \geq 0, z \in H, \|R(t)z\| \ \ \leq r_{\lambda_1}(t)\|z\|, \ t > 0, z \in H.$$

Lập luận tương tự như [44], ta có $R * f \in C([0,T]; H), \forall f \in C([0,T], H)$ và

$$\|(R * f)(t)\| \leq \int_0^t r_{\lambda_1}(t-s)\|f(s)\| \, ds,$$

ở đây $(R * f)(t) := \int_0^t R(t-s)f(s)ds$. Dựa trên toán tử $S(\cdot)$ và $R(\cdot)$, chúng tôi đưa ra khái niệm nghiệm tích phân của bài toán (2.13)-(2.14) như sau.

Định nghĩa 2.3. Một hàm $u \in C([0,T];H)$ được gọi là nghiệm tích phân của bài toán (2.13)-(2.14) trên $[0,T]$ với dữ kiện ban đầu u_0 nếu

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t R(t-s)f(s)\,ds, \text{ với mọi } t \in [0,T].$$

Chú ý rằng, lập luận tương tự như [44, Theorem 3.1], nếu u là nghiệm tích phân của (2.13)-(2.14) thì u cũng là nghiệm yếu của bài toán này, nghĩa là, $u \in C([0,T];H) \cap C((0,T];V_{\frac{1}{2}})$, $u(0) = u_0$, và u thoả mãn (2.13) trong không gian đối ngẫu $V_{-\frac{1}{2}}$.

2.2.3. Sự tồn tại nghiệm tích phân

Dựa trên trường hợp tuyến tính, chúng tôi đưa ra định nghĩa nghiệm tích phân cho bài toán (2.11)-(2.12) như sau.

Định nghĩa 2.4. Một hàm $u \in C([0,T];H)$ được gọi là nghiệm tích phân của bài toán (2.11)-(2.12) trên $[0,T]$ nếu

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t R(t-s)f\big(u(s)\big)\,ds, \text{ với mọi } t \in [0,T].$$

Xét toán tử $\Phi : C([0,T];H) \to C([0,T];H)$ xác định bởi

$$\Phi(u)(t) = S(t)u_0 + \int_0^t R(t-s)f\big(u(s)\big)\,ds, \ t \in [0,T]. \tag{2.22}$$

Dễ kiểm tra hàm $u \in C([0,T];H)$ là nghiệm tích phân của bài toán (2.11)-(2.12) khi và chỉ khi u là điểm bất động của toán tử Φ. Để nghiên cứu tính giải được của bài toán (2.11)-(2.12) chúng tôi đặt giả thiết sau trên số hạng phi tuyến f.

(Hf) Hàm $f : H \to H$ liên tục Lipschitz địa phương, nghĩa là

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \le L(r)\|u_1 - u_2\|, \forall u_1, u_2 \in B_r,$$

trong đó $L(r)$ thoả mãn $\alpha = \limsup_{r\to 0} L(r) < \lambda_1$.

Định lí chính trong phần này được phát biểu như sau.

Định lí 2.4. *Giả sử các giả thiết* (Hk), (Ha) *và* (Hf) *được thoả mãn. Nếu* $f(0) = 0$, *thì tồn tại* $\delta > 0$ *sao cho với* $\|u_0\| \leq \delta$ *bài toán* (2.11)-(2.12) *có duy nhất nghiệm tích phân trên* $[0, T]$.

Chứng minh. Theo giả thiết về dáng điệu của hàm f, với $\theta \in (0, \lambda_1 - \alpha)$, tồn tại $r^* > 0$ sao cho, với bất kì $r \in (0, r^*)$ và $\|v\| \leq r$, ta có

$$\|f(v)\| = \|f(v) - f(0)\| \leq L(r)\|v\| \leq (\alpha + \theta)\|v\|.$$

Xét ánh xạ $\Phi : B_r \to C([0, T]; H)$ xác định bởi (2.22). Ta có

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)\| &\leq s_{\lambda_1}(t)\|u_0\| + \int_0^t r_{\lambda_1}(t - \tau)(\alpha + \theta)\|u(\tau)\|d\tau \\
&\leq s_{\lambda_1}(t)\|u_0\| + (\alpha + \theta)r\lambda_1^{-1}(1 - s_{\lambda_1}(t)) \\
&\leq s_{\lambda_1}(t)[\|u_0\| - (\alpha + \theta)\lambda_1^{-1}r] + (\alpha + \theta)\lambda_1^{-1}r \\
&\leq r, \ t \in [0, T],
\end{aligned}$$

nếu $\|u_0\| \leq \alpha\lambda_1^{-1}r$, ở đây ta đã sử dụng $(\alpha+\theta)\lambda_1^{-1} < 1$. Cố định θ và r như ở trên, với $\delta = \alpha\lambda_1^{-1}r$, ta đã chứng tỏ $\Phi(B_r) \subset B_r$ khi $\|u_0\| \leq \delta$. Tiếp theo, ta chứng minh $\Phi : B_r \to B_r$ là ánh xạ co. Thật vậy, với bất kì $u_1, u_2 \in B_r$,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u_1)(t) - \Phi(u_2)(t)\| &\leq \int_0^t r_{\lambda_1}(t - \tau)\|f(u_1(\tau)) - f(u_2(\tau))\|d\tau \\
&\leq \int_0^t r_{\lambda_1}(t - \tau)L(r)\|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|d\tau \\
&\leq \int_0^t r_{\lambda_1}(t - \tau)(\alpha + \theta)\|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|d\tau \\
&\leq (\alpha + \theta)\lambda_1^{-1}(1 - s_{\lambda_1}(t))\|u_1 - u_2\|_\infty, \ \forall t \in [0, T],
\end{aligned}$$

trong đánh giá trên ta đã sử dụng Mệnh đề 1.4(ii), và $\|\cdot\|_\infty$ là chuẩn sup trong $C([0, T]; H)$. Do đó

$$\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|_\infty \leq (\alpha + \theta)\lambda_1^{-1}\|u_1 - u_2\|_\infty.$$

Từ đây, Φ là ánh xạ co trên B_r. Do đó Φ có duy nhất điểm bất động trong B_r và điểm bất động này là nghiệm của bài toán (2.11)-(2.12). Bây giờ ta chứng minh tính duy nhất nghiệm. Giả sử $u_1, u_2 \in C([0,T];H)$ là hai nghiệm của bài toán (2.11)-(2.12). Đặt $\bar{r} = \max\{\|u_1\|, \|u_2\|\}$. Ta có

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \le L(\bar{r}) \int_0^t r_{\lambda_1}(t-\tau)\|u_1(\tau) - u_2(\tau)\| d\tau, \forall t \in [0,T].$$

Áp dụng bất đẳng thức kiểu Gronwall 2.4 ta có $\|u_1(t) - u_2(t)\| = 0$ với mọi $t \in [0,T]$ hay $u_1 = u_2$. Định lí được chứng minh. □

Khi hàm phi tuyến f liên tục Lipschitz, ta cũng nhận được kết quả về tính giải được toàn cục của bài toán (2.11)-(2.12) mà không có bất kì ràng buộc nào về dữ kiện ban đầu.

Định lí 2.5. *Giả sử các giả thiết* (Hk), (Ha) *và* (Hf) *được thoả mãn với* $L(r)$ *là hằng số. Khi đó bài toán* (2.11)-(2.12) *có duy nhất nghiệm tích phân toàn cục.*

Chứng minh tương tự như trong chứng minh của [44, Theorem 4.2].

2.2.4. Tính hút trong thời gian hữu hạn

Kết quả chính trong phần này là định lí sau.

Định lí 2.6. *Giả sử các giả thiết của Định lí 2.4 được thoả mãn. Khi đó tồn tại số* $\delta > 0$ *sao cho mọi nghiệm* u *của* (2.11) *với* $\|u(0)\| \le \delta$ *hút mũ trên* $[0,T]$.

Chứng minh. Chọn r, θ và δ như trong chứng minh của Định lí 2.4, ở đó ta có

$$L(r) \le \alpha + \theta < \lambda_1.$$

Cố định $\xi^* \in B_\delta$ và $u^*(t) = u^*(t, \xi^*)$, ta chứng minh tính hút mũ của u^*. Với $\xi \in B_\delta$ và $u(t) = u(t, \xi)$, đặt

$$\tilde{\xi} = \xi - \xi^*,\ \tilde{u}(t) = u(t) - u^*(t),\ t \in [0, T].$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}(t)\| &\leq s_{\lambda_1}(t)\|\tilde{\xi}\| + \int_0^t r_{\lambda_1}(t-s)\|f\big(u(s)\big) - f\big(u^*(s)\big)\|\, ds \\
&\leq s_{\lambda_1}(t)\|\tilde{\xi}\| + \int_0^t r_{\lambda_1}(t-s)L(r)\|\tilde{u}(s)\|\, ds \\
&\leq s_{\lambda_1}(t)\|\tilde{\xi}\| + \int_0^t r_{\lambda_1}(t-s)(\alpha+\theta)\|\tilde{u}(s)\|\, ds.
\end{aligned}$$

Sử dụng Bổ đề 2.4, ta có

$$\|\tilde{u}(t)\| \leq s_{\lambda_1-\alpha-\theta}(t)\|\tilde{\xi}\|, \forall t \in [0, T].$$

Do đó

$$\limsup_{\|\tilde{\xi}\|\to 0} \frac{\|\tilde{u}(T)\|}{\|\tilde{\xi}\|} < 1,$$

ở đây ta đã sử dụng $s_\mu(T) < 1$ với mọi $\mu > 0$. Hay

$$\limsup_{\|\tilde{\xi}\|\to 0} \frac{\|u(T,\xi) - u^*(T,\xi^*)\|}{\|\tilde{\xi}\|} < 1.$$

Định lí được chứng minh. □

Trong trường hợp hàm phi tuyến f liên tục Lipschitz, ta thu được kết quả sau.

Định lí 2.7. *Giả sử các giả thiết của Định lí 2.5 được thoả mãn với $L < \lambda_1$. Khi đó mọi nghiệm của (2.11) hút mũ trên $[0, T]$.*

Chứng minh. Giả sử $u^* = u(\cdot, \xi^*)$ và $u = u(\cdot, \xi)$ là nghiệm của (2.11). Khi đó với bất kì $t \in [0, T]$, ta có

$$\|u(t) - u^*(t)\| \leq s_{\lambda_1}(t)\|\xi - \xi^*\| + \int_0^t r_{\lambda_1}(t-s)\|f(u(s)) - f(u^*(s))\|ds$$

$$\leq s_{\lambda_1}(t)\|\xi - \xi^*\| + \int_0^t r_{\lambda_1}(t-s)L\|u(s) - u^*(s)\|ds.$$

Sử dụng Bổ đề 2.4, ta được

$$\|u(t) - u^*(t)\| \leq s_{\lambda_1 - L}(t)\|\xi - \xi^*\|, \ \forall t \in [0, T],$$

bất đẳng thức này suy ra kết luận của Định lí 2.7. $\square$

Nhận xét 2.3. Ta gọi $\mathcal{A}_d = \{\xi \in H : u(\cdot, \xi) \text{ hút trên } [0, T]\}$, trong đó $u(\cdot, \xi)$ là nghiệm của (2.11) với dữ kiện ban đầu ξ, là miền hút của (2.11). Rõ ràng, dưới các giả thiết của Định lí 2.7 miền hút của (2.11) là toàn bộ H. Trong thiết lập của Định lí 2.6, ta biết rằng $\mathcal{A}_d \supset B_\delta$, với δ đủ nhỏ. Tuy nhiên, câu hỏi xác định $\mathcal{A}_d$ trong trường hợp này vẫn là câu hỏi mở.

Trong phần còn lại của mục này, sử dụng các điều kiện tương tự như khẳng định tính hút, chúng tôi chứng minh kết quả về tính giải được của bài toán

$$\frac{d}{dt}\big(k_0 u + k * [u - u(0)]\big)(t) + Au(t) = f\big(u(t)\big), t \in (0, T] \tag{2.23}$$

$$u(0) = g(u), \tag{2.24}$$

trong đó hàm $g : C([0, T]; H) \to H$ thoả mãn giả thiết

(Hg) tồn tại số $\tau \in (0, T]$ sao cho

$$\|g(u_1) - g(u_2)\| \leq \sup_{s \in [\tau, T]} \|u_1(s) - u_2(s)\|, \forall u_1, u_2 \in C([0, T]; H).$$

Chú ý rằng, giả thiết (Hg) được thoả mãn trong những trường hợp điển hình sau:

i) $g(u) = u(T)$ (điều kiện tuần hoàn);

ii) $g(u) = -u(T)$ (điều kiện đối tuần hoàn);

iii) $g(u) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i u(\tau_i)$ trong đó $\sum_{i=1}^{k} |\beta_i| \le 1$ và $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_k \le T$ (điều kiện biên đa điểm).

Một hàm $u \in C([0,T];H)$ được gọi là nghiệm tích phân của bài toán (2.23)-(2.24) nếu u thoả mãn

$$u(t) = S(t)g(u) + \int_0^t R(t-s)f\big(u(s)\big)\, ds, \forall t \in [0,T].$$

Sau đây là kết quả về tính giải được của bài toán (2.23)-(2.24).

Định lí 2.8. *Giả sử các giả thiết của Định lí 2.5 và giả thiết* (Hg) *được thoả mãn. Khi đó bài toán* (2.23)-(2.24) *có nghiệm tích phân.*

Chứng minh. Xét toán tử

$$J : C([0,T];H) \to C([0,T];H)$$
$$v \mapsto J(v) = u$$

trong đó u là nghiệm duy nhất của bài toán Cauchy

$$\frac{d}{dt}\big(k_0 u + k * [u - u(0)]\big)(t) + Au(t) = f\big(u(t)\big), t \in (0,T]$$
$$u(0) = g(v).$$

Tiếp theo, ta chứng minh J có điểm bất động. Giả sử $v_1, v_2 \in C([0,T];H)$ và $u_1 = J(v_1), u_2 = J(v_2)$. Sử dụng các đánh giá như trong chứng minh của Định lí 2.7 và giả thiết (Hg) ta có

$$\begin{aligned}
\|Jv_1(t) - Jv_2(t)\| &= \|u_1(t) - u_2(t)\| \\
&\le s_{\lambda_1 - L}(t)\|u_1(0) - u_2(0)\| \\
&= s_{\lambda_1 - L}(t)\|g(v_1) - g(v_2)\| \\
&\le s_{\lambda_1 - L}(t) \sup_{s \in [\tau, T]} \|v_1(s) - v_2(s)\|.
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
\|J^2 v_1(t) - J^2 v_2(t)\| &\le s_{\lambda_1 - L}(t) \sup_{[\tau,T]} \|Jv_1(t) - Jv_2(t)\| \\
&\le \sup_{[\tau,T]} \|Jv_1(t) - Jv_2(t)\| \\
&\le \sup_{[\tau,T]} \|v_1(s) - v_2(s)\| \sup_{[\tau,T]} s_{\lambda_1 - L}(t) \\
&\le s_{\lambda_1 - L}(\tau)\|v_1 - v_2\|, \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

ở đây ta đã sử dụng $s_\mu(\cdot)$, với $\mu > 0$, là hàm không tăng. Bất đẳng thức (2.25) khẳng định rằng J^2 là ánh xạ co trên $C([0,T];H)$. Kí hiệu $\bar{v} \in C([0,T];H)$ là điểm bất động của J^2: $J^2(\bar{v}) = \bar{v}$ và đặt $\bar{u} = J(\bar{v})$. Ta có

$$J^2(\bar{u}) = J^3(\bar{v}) = J(\bar{v}) = \bar{u}.$$

Do vậy $\bar{u}$ trùng với $\bar{v}$. Định lí đã được chứng minh. □

2.2.5. Áp dụng

Xét phương trình vi tích phân phi tuyến sau

$$\partial_t u(x,t) + \partial_t^\alpha u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t) + h\Big(\int_0^1 u^2(x,t)dx\Big)u(x,t), \alpha \in (0,1), \qquad (2.26)$$

với $x \in (0,1), t \in (0,T]$, hàm u thoả mãn điều kiện biên

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad (2.27)$$

và điều kiện ban đầu

$$u(x,0) = \xi(x),\ x \in [0,1]. \qquad (2.28)$$

Trong mô hình trên, ∂_t^α là đạo hàm phân thứ Caputo cấp α, ∂_x là đạo hàm suy rộng theo biến x, $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ là một hàm phi tuyến.

Kí hiệu $H = L^2(0,1)$. Tích vô hướng và chuẩn trong H cho bởi

$$(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx, \qquad ||v|| = \Big(\int_0^1 |v(x)|^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Kí hiệu $A = -\partial_x^2$ với miền xác định $D(A) = H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$. Ta biết rằng A với miền $D(A)$ là toán tử trù mật, xác định dương, tự liên hợp với giải thức compact trong H (xem [81, Proposition 3.5.1]). Hơn nữa, các giá trị riêng của A là $\lambda_n = n^2\pi^2, n = 1, 2, \ldots$, ứng với các vectơ riêng $e_n = \sqrt{2}\sin(nx), n \geq 1$. Rõ ràng $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ là một cơ sở trực chuẩn của H. Do đó giả thiết (Ha) được kiểm tra.

Kí hiệu

$$f(v)(x) = h\bigg(\int_0^1 v^2(x)\, dx\bigg)v(x), v \in L^2(0,1).$$

Rõ ràng, bài toán (2.26)-(2.28) là một mô hình của (2.11)-(2.12) với $k_0 = 1$, $k(t) = g_{1-\alpha}(t)$. Tính toán trực tiếp ta có $(-1)^n k^{(n)}(t) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, t > 0$ và do đó nhân k hoàn toàn đơn điệu. Hệ quả, giả thiết (Hk) được kiểm tra.

Liên quan tới số hạng phi tuyến trong (2.26), ta giả sử rằng hàm h thuộc $C^1\big(\mathbb{R}^+\big)$ và $|h(r)| \leq a + br^{\beta}$, với a, b, β là các hằng số không âm. Khi đó,

- f ánh xạ $L^2(0,1)$ vào chính nó vì với bất kì $v \in L^2(0,1)$

$$\begin{aligned}\|f(v)\| &= h\bigg(\int_0^1 v^2(x)\, dx\bigg)\bigg(\int_0^1 v^2(x)\, dx\bigg)^{1/2} \\ &= h(\|v\|^2)\|v\| \leq (a + b\|v\|^{2\beta})\|v\|.\end{aligned}$$

- Với mọi $v_1, v_2 \in L^2(0,1)$ mà $\|v_1\|, \|v_2\| \leq r$, ta có

$$\begin{aligned}\|f(v_1) - f(v_2)\| &\leq |h(\|v_1\|^2) - h(\|v_2\|^2)|\|v_1\| + h(\|v_2\|^2)\|v_1 - v_2\| \\ &\leq r|\|v_1\|^2 - \|v_2\|^2||h'\big(\theta\|v_1\|^2 + (1-\theta)\|v_2\|^2\big) \\ &\quad + h(\|v_2\|^2)\|v_1 - v_2\| \\ &\leq \big(2r^2 \sup_{z\in[0,r^2]} |h'(z)| + a + br^{2\beta}\big)\|v_1 - v_2\|,\end{aligned}$$

  ở đây ta áp dụng định lí giá trị trung bình đối với đạo hàm.

Do đó giả thiết (Hf) được thoả mãn với $L(r) = 2r^2 \sup_{z\in[0,r^2]} |h'(z)| + a + br^{2\beta}$. Rõ ràng, $\lim\limits_{r\to 0} L(r) = a$. Do đó, nếu $a < \pi^2$, thì mọi nghiệm của (2.26)-(2.28) với dữ kiện ban đầu ξ đủ nhỏ là hút trên $[0, T]$.

Kết luận chương

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn cho hai lớp phương trình tiến hoá không địa phương nửa tuyến tính: phương trình dưới khuếch tán và phương trình loại Basset. Các kết chính bao gồm:

1) Chứng minh sự tồn tại nghiệm toàn cục cho hai lớp phương trình trên (Định lí 2.1, 2.4).

2) Chứng minh tính hút mũ của nghiệm tầm thường và của nghiệm tuỳ ý cho hai lớp phương trình trên (Định lí 2.2, 2.6, 2.3, 2.7).

3) Hệ quả của tính hút, chúng tôi chứng minh tính giải được của bài toán giá trị biên (Định lí 2.8).

4) Áp dụng các kết quả thu được cho hai lớp phương trình đạo hàm riêng không địa phương trong miền bị chặn (Mục 2.1.4, 2.2.5).

Theo như hiểu biết của chúng tôi, các kết quả trong chương này là những kết quả đầu tiên theo hướng nghiên cứu tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn cho hai lớp NDE: lớp phương trình dưới khuếch tán và lớp phương trình loại Basset. Các kĩ thuật áp dụng ở chương này có thể được áp dụng nghiên cứu cho một số lớp NDE khác như phương trình dưới khuếch tán chứa trễ hoặc phương trình loại Rayleigh-Stokes trong lí thuyết động lực học chất lỏng.

Chương 3

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HOÁ LOẠI RAYLEIGH-STOKES NỬA TUYẾN TÍNH

Chương này, chúng tôi nghiên cứu tính giải được, tính ổn định tiệm cận và sự tồn tại nghiệm phân rã cho lớp phương loại Rayleigh-Stokes nửa tuyến tính. Các vấn đề nêu trên được nghiên cứu dựa trên tính chất của các hàm hoàn toàn dương, các ước lượng địa phương và định lí điểm bất động.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo tiền ấn phẩm [4] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

3.1. Đặt bài toán

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ là một miền bị chặn với biên $\partial\Omega$ trơn. Xét bài toán sau

$$\partial_t u - \Delta u - \partial_t(m * \Delta u) = f(t, u) \text{ trong } \Omega, t > 0, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{B}u = 0 \text{ trên } \partial\Omega,\ t \geq 0, \tag{3.2}$$

$$u(\cdot, 0) = \xi \text{ trong } \Omega, \tag{3.3}$$

ở đó $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ là một hàm không âm, f là hàm phi tuyến, $\xi \in L^2(\Omega)$ là dữ kiện ban đầu, $\mathcal{B}$ là toán tử biên thuộc một trong hai dạng sau

$$\mathcal{B}u = u \text{ hoặc } \mathcal{B}u = \nu \cdot \nabla u + \eta u,\ \eta > 0,$$

với ν là pháp tuyến ngoài đối với biên $\partial\Omega$.

3.2. Biểu diễn nghiệm của bài toán tuyến tính

Trong phần này, chúng tôi xây dựng công thức nghiệm cho bài toán tuyến tính

$$\partial_t u - \Delta u - \partial_t(m * \Delta u) = F \ \text{ trong } \Omega, t \in (0, T], \tag{3.4}$$

$$\mathcal{B}u = 0 \ \text{ trên } \partial\Omega, \ t \in [0, T], \tag{3.5}$$

$$u(\cdot, 0) = \xi \ \text{ trong } \Omega, \tag{3.6}$$

với $F \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ và chứng minh một bất đẳng thức kiểu Gronwall tương ứng với bài toán (3.1)-(3.3) làm công cụ cho những phân tích tiếp theo.

Xét phương trình

$$\omega'(t) + \lambda\omega(t) + \lambda\gamma(m * \omega)'(t) = 0 \text{ với } t > 0, \ \omega(0) = 1, \tag{3.7}$$

với λ và γ là các số dương, $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ thỏa mãn giả thiết sau:

(**M**) *Hàm $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ không âm sao cho $a_\gamma(t) := 1 + \gamma m(t)$ là một hàm hoàn toàn dương với mỗi $\gamma > 0$.*

Nhắc lại rằng a_γ được gọi là hoàn toàn dương nếu nghiệm của các phương trình tích phân

$$s(t) + \theta \int_0^t a_\gamma(t - \tau)s(\tau)d\tau = 1, \ t \geq 0, \tag{3.8}$$

$$r(t) + \theta \int_0^t a_\gamma(t - \tau)r(\tau)d\tau = a_\gamma(t), \ t > 0, \tag{3.9}$$

là các hàm không âm với mỗi $\theta > 0$. Chú ý rằng nếu m là hàm hoàn toàn đơn điệu, nghĩa là $(-1)^n m^{(n)}(t) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall t > 0$ thì $1 + \gamma m$ cũng là hàm hoàn toàn đơn điệu. Khi đó, theo [20, 63], tính chất hoàn toàn đơn điệu của a_γ suy ra tính hoàn toàn dương của hàm này.

Xét trường hợp m là hàm khả vi liên tục và dương trong khoảng $(0, \infty)$ sao cho $\log m$ là hàm lồi. Khi đó m cũng là hàm lồi và do vậy $\dfrac{m'}{m}$ cùng với m' là các hàm tăng. Từ đó, $\dfrac{m'}{1+\gamma m}$ cũng là hàm tăng với $\gamma > 0$. Vậy $\log(1+\gamma m)$ lồi, với mọi $\gamma > 0$. Từ đây và theo [63, Lemma 2] hàm $1+\gamma m$ hoàn toàn dương với mọi $\gamma > 0$.

Kí hiệu $s = s(\cdot, \theta, \gamma)$ và $r = r(\cdot, \theta, \gamma)$ lần lượt là nghiệm của (3.8) và (3.9). Tương tự như Mục 1.8, Chương 1, ta cũng thu được một số tính chất của s và r trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 3.1. *Giả sử* (**M**) *được thỏa mãn. Khi đó*

(1) *Hàm $s(\cdot, \theta, \gamma)$ không âm và không tăng. Hơn nữa, ta có*

$$s(t,\theta,\gamma)\left[1+\theta\int_0^t a_\gamma(\tau)d\tau\right] \le 1, \ \forall t \ge 0.$$

(2) *Hàm $r(\cdot, \theta, \gamma)$ không âm và ta có đẳng thức*

$$s(t,\theta,\gamma) = 1 - \theta\int_0^t r(\tau,\theta,\gamma)d\tau, \ t \ge 0.$$

(3) *Với mỗi $t > 0$ và $\gamma > 0$, hàm $\theta \mapsto s(t, \theta, \gamma)$ không tăng trong khoảng $[0, \infty)$.*

Sử dụng Mệnh đề 3.1 ta thu được một số tính chất nghiệm của phương trình (3.7).

Mệnh đề 3.2. *Với $\omega = \omega(\cdot, \lambda, \gamma)$ là nghiệm của* (3.7)*, ta có*

(1) *ω không tăng trên $\mathbb{R}^+$ và*

$$0 < \omega(t,\lambda,\gamma) \le \frac{1}{1+\lambda\int_0^t(1+\gamma m(\tau))d\tau}, \ \forall t \ge 0, \ \lambda > 0, \gamma > 0.$$

Từ đó, $\lim\limits_{t\to\infty} \omega(t,\lambda,\gamma) = 0$.

(2) *Ta có ước lượng*

$$\int_0^t \omega(\tau,\lambda,\gamma)d\tau \le \lambda^{-1}(1-\omega(t,\lambda,\gamma)), \ \forall t \ge 0, \lambda > 0, \gamma > 0.$$

(3) *Với $t > 0$ và $\gamma > 0$ cho trước, hàm $\lambda \mapsto \omega(t, \lambda, \gamma)$ không tăng.*

Chứng minh. Tích phân hai vế của (3.7), ta được

$$\omega(t, \lambda, \gamma) + \lambda \int_0^t (1 + \gamma m(t - \tau))\omega(\tau, \lambda, \gamma) d\tau = 1. \tag{3.10}$$

Do đó ω là nghiệm của (3.8) với $\theta = \lambda$. Từ đẳng thức (3.10) kết hợp với Mệnh đề 3.1 ta suy ra khẳng định (1) và (3). Mặt khác, vì $\omega(\cdot, \lambda, \gamma)$ không tăng, nên từ (3.10) suy ra

$$\omega(t, \lambda, \gamma) + \lambda\omega(t, \lambda, \gamma) \int_0^t (1 + \gamma m(t - \tau)) d\tau \leq 1,$$

từ đó, ta có khẳng định (2). □

Xét phương trình không thuần nhất

$$z'(t) + \lambda z(t) + \lambda\gamma(m * z)'(t) = g(t),\ t > 0, z(0) = z_0, \tag{3.11}$$

với $\lambda > 0, \gamma > 0$ và $g \in C(\mathbb{R}^+)$. Mệnh đề sau cho ta công thức biểu diễn nghiệm của (3.11).

Mệnh đề 3.3. *Hàm*

$$z(t) = \omega(t, \lambda, \gamma) z_0 + \int_0^t \omega(t - \tau, \lambda, \gamma) g(\tau) d\tau, \tag{3.12}$$

là nghiệm duy nhất của (3.11).

Chứng minh. Đặt $L[y] = y' + \lambda y + \lambda\gamma(m * y)'$, $y \in C^1(\mathbb{R}^+)$. Khi đó $L[\omega] = 0$. Hơn nữa, ta có

$$L[z] = L[\omega] z_0 + L[\omega * g] = L[\omega * g].$$

Ta sẽ chứng tỏ $L[\omega * g] = g$. Thật vậy

$$(\omega * g)' + \lambda\omega * g + \lambda\gamma(m * \omega * g)' = g + \omega' * g + \lambda\omega * g + \lambda\gamma(m * \omega)' * g$$

$$= g + [\omega' + \lambda\omega + \lambda\gamma(m * \omega)'] * g$$
$$= g + L[\omega] * g = g.$$

Ngược lại, nếu z là một nghiệm của (3.11) thì

$$q\hat{z}(q) + \lambda\hat{z}(q) + \lambda\gamma q\hat{m}(q)\hat{z}(q) = z_0 + \hat{g}(q),$$

ở đây $\hat{z}$ là biến đổi Laplace của z. Khi đó

$$\begin{aligned}\hat{z}(q) &= (q + \lambda + \lambda\gamma q\hat{m}(q))^{-1}z_0 + (q + \lambda + \lambda\gamma q\hat{m}(q))^{-1}\hat{g}(q)\\ &= \hat{\omega}(q)z_0 + \hat{\omega}(q)\hat{g}(q),\end{aligned}$$

với $\hat{\omega}$ là biến đổi Laplace của ω theo biến t. Áp dụng biến đổi Laplace ngược cho đẳng thức trên, suy ra $z = \omega z_0 + \omega * g$, đây chính là công thức (3.12). Mệnh đề đã được chứng minh. □

Kí hiệu $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ là cơ sở trực chuẩn của $L^2(\Omega)$ bao gồm các hàm riêng của toán tử $-\Delta$ ứng với điều kiện biên thuần nhất, tức là

$$-\Delta\varphi_n = \lambda_n\varphi_n \text{ trong } \Omega,\ \mathcal{B}\varphi_n = 0 \text{ trên } \partial\Omega,$$

ở đây chúng ta giả thiết $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...,\ \lambda_n \to \infty$ khi $n \to \infty$. Với $\beta \in \mathbb{R}$, toán tử phân thứ $(-\Delta)^{\beta}$ được định nghĩa như sau

$$(-\Delta)^{\beta}v = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\beta}(v, \varphi_n)\varphi_n,$$
$$D((-\Delta)^{\beta}) = \{v \in L^2(\Omega) : \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta}(v, \varphi_n)^2 < \infty\},$$

với $(\cdot, \cdot)$ là kí hiệu tích vô hướng trong $L^2(\Omega)$.

Giả sử

$$u(\cdot, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n,\ F(\cdot, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\varphi_n.$$

Thay vào (3.4), ta nhận được

$$u_n'(t) + \lambda_n u_n(t) + \lambda_n (m * u_n)'(t) = F_n(t),$$
$$u_n(0) = \xi_n := (\xi, \varphi_n).$$

Áp dụng Mệnh đề 3.3, ta có

$$u_n(t) = \omega(t, \lambda_n)\xi_n + \int_0^t \omega(t-\tau, \lambda_n) F_n(\tau) d\tau,$$

ở đây, $\omega(t, \lambda)$ là cách viết gọn của $\omega(t, \lambda, 1)$. Từ đó

$$u(\cdot, t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-\tau) F(\cdot, \tau) d\tau, \tag{3.13}$$

với $S(t)$ là *giải thức* xác định bởi

$$S(t)\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \omega(t, \lambda_n) \xi_n \varphi_n, \ \xi \in L^2(\Omega). \tag{3.14}$$

Rõ ràng, $S(t)$ là toán tử tuyến tính bị chặn trên $L^2(\Omega)$ với mọi $t \geq 0$.

Bổ đề 3.1. *Cho $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ là họ giải thức xác định bởi (3.14), $v \in L^2(\Omega)$ và $T > 0$. Khi đó*

(1) *$S(\cdot)v \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ và $\|S(t)\|_{op} \leq \omega(t, \lambda_1)$ với mọi $t \geq 0$.*

(2) *Với $g \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, $(-\Delta)^{\frac{1}{2}} S * g \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ và*

$$\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} S * g(t)\| \leq \left(\int_0^t \omega(t-\tau, \lambda_1) \|g(\tau)\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall t \geq 0. \tag{3.15}$$

(3) *Nếu m là hàm không tăng, thì $S(\cdot)v \in C^1((0,T]; L^2(\Omega))$ và ta có đánh giá*

$$\|S'(t)\|_{op} \leq t^{-1} \quad \text{với mọi } t > 0.$$

Chứng minh. (1) Từ (3.14) suy ra

$$\|S(t)\xi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \omega(t, \lambda_n)^2 \xi_n^2$$

$$\leq \omega(t,\lambda_1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 = \omega(t,\lambda_1)^2 \|\xi\|^2,$$

ở đây ta sử dụng Mệnh đề 3.2(3), từ đó suy ra tính hội tụ đều của chuỗi (3.14) trên $[0,T]$ và ước lượng $\|S(t)\|_{op} \leq \omega(t,\lambda_1)$ với mọi $t \geq 0$.

(2) Ta thấy

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}} S * g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_n) g_n(\tau) d\tau \varphi_n, \tag{3.16}$$

với $g_n(t) = (g(t),\varphi_n)$. Sử dụng bất đẳng thức Hölder và Mệnh đề 3.2(2) ta thu được

$$\begin{aligned}
\lambda_n \left(\int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_n) g_n(\tau) d\tau \right)^2 &\leq \lambda_n \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_n) d\tau \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_n) |g_n(\tau)|^2 d\tau \\
&\leq (1-\omega(t,\lambda_n)) \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_n) |g_n(\tau)|^2 d\tau \\
&\leq \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1) |g_n(\tau)|^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} S * g(t)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_n) g_n(\tau) d\tau \right)^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1) |g_n(\tau)|^2 d\tau \\
&= \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1) \|g(\tau)\|^2 d\tau,
\end{aligned}$$

và ta có (3.15). Để chứng minh $(-\Delta)^{\frac{1}{2}} S * g \in C([0,T];L^2(\Omega))$, ta cần kiểm tra chuỗi (3.16) hội tụ đều trên đoạn $[0,T]$. Do g là hàm liên tục, nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(\tau)|^2$ hội tụ đều trên $[0,T]$. Khi đó với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ sao cho $\sum_{n=N}^{N+p} |g_n(\tau)|^2 < \epsilon$ với mọi $N \geq N_\epsilon$, $p \in \mathbb{N}$ và $\tau \in [0,T]$. Ta suy ra

$$\sum_{n=N}^{N+p} \lambda_n \left(\int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_n) g_n(\tau) d\tau \right)^2 \leq \sum_{n=N}^{N+p} \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1) |g_n(\tau)|^2 d\tau$$

$$= \int_0^t \omega(t-\tau, \lambda_1) \sum_{n=N}^{N+p} |g_n(\tau)|^2 d\tau \leq \lambda_1^{-1}\epsilon,$$

với mọi $t \in [0, T]$, từ đó dẫn đến sự hội tụ đều của chuỗi (3.16) trên đoạn $[0, T]$.

(3) Kí hiệu $r(\cdot, \lambda)$ là nghiệm của (3.9) với $\theta = \lambda$ và $a(t) = 1 + m(t)$. Theo giả thiết m là hàm không tăng, ta có

$$r(t, \lambda) + \lambda(1 + m(t)) \int_0^t r(\tau, \lambda) d\tau \leq 1 + m(t).$$

Hơn nữa,

$$\int_0^t r(\tau, \lambda) d\tau = \lambda^{-1}(1 - s(t, \lambda)) \geq \frac{t + 1 * m(t)}{1 + \lambda(t + 1 * m(t))},$$

theo Mệnh đề 3.2(1). Vậy

$$r(t, \lambda) \leq [1 + m(t)] \left[1 - \frac{\lambda(t + 1 * m(t))}{1 + \lambda(t + 1 * m(t))}\right] = \frac{1 + m(t)}{1 + \lambda(t + 1 * m(t))}. \tag{3.17}$$

Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega'(t, \lambda_n) \xi_n \varphi_n,\ t > 0, \xi_n = (\xi, \varphi_n),\ \xi \in L^2(\Omega), \tag{3.18}$$

ta thấy

$$\begin{aligned} |\omega'(t, \lambda_n)| &= \lambda_n r(t, \lambda_n) \\ &\leq \frac{\lambda_n(1 + m(t))}{1 + \lambda_n(t + 1 * m(t))} \leq \frac{1 + m(t)}{t + 1 * m(t)} \leq \frac{1 + m(t)}{t + tm(t)} = t^{-1}, \end{aligned}$$

nhờ (3.17) và tính chất $1 * m(t) \geq tm(t)$ với $t > 0$. Từ đó suy ra sự hội tụ đều của chuỗi (3.18) trên đoạn $[\epsilon, T]$ và

$$S'(t)\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \omega'(t, \lambda_n) \xi_n \varphi_n,\ \|S'(t)\xi\| \leq t^{-1}\|\xi\|,\ \forall t > 0.$$

Bổ đề đã được chứng minh. □

Dựa vào tính chất của $S(t)$ cho bởi Bổ đề 3.1, ta sẽ chứng minh rằng toán tử Cauchy

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Q} : C([0,T];L^2(\Omega)) \to C([0,T];L^2(\Omega)),\\
&\mathcal{Q}(g)(t) = \int_0^t S(t-\tau)g(\tau)d\tau,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

là compact.

Bổ đề 3.2. *Giả sử* (**M**) *được thỏa mãn. Nếu m là hàm không tăng thì toán tử $\mathcal{Q}$ xác định bởi* (3.19) *là toán tử compact.*

Chứng minh. Cho $D \subset C([0,T];L^2(\Omega))$ là tập bị chặn. Kí hiệu $\|g\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} \|g(t)\|$ với $g \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Ta sẽ chỉ ra $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\mathcal{Q}(D)(t)$ là tập bị chặn trong $L^2(\Omega)$ với mỗi $t \geq 0$. Thật vậy, theo Bổ đề 3.1(2), ta có

$$\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\mathcal{Q}(g)(t)\| \leq \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)\|g(\tau)\|^2 d\tau,\ \forall t \geq 0,$$

từ đó suy ra tính bị chặn của $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\mathcal{Q}(D)(t)$ trong $L^2(\Omega)$ với mọi $t \geq 0$. Do phép nhúng $D((-\Delta)^{\frac{1}{2}}) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ là compact, nên $\mathcal{Q}(D)(t)$ là tập compact tương đối với mỗi $t \geq 0$.

Bây giờ ta chứng minh $\mathcal{Q}(D)$ là tập liên tục đồng bậc. Với $g \in D$, $t \in (0,T)$, và $h \in (0, T-t]$, ta có

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Q}(g)(t+h) - \mathcal{Q}(g)(t)\| &\leq \int_0^t \|[S(t+h-\tau) - S(t-\tau)]g(\tau)\|d\tau\\
&\quad + \int_t^{t+h} \|S(t+h-\tau)g(\tau)\|d\tau\\
&= I_1(t) + I_2(t).
\end{aligned}$$

Dễ kiểm tra $I_2(t) \to 0$ khi $h \to 0$ đều theo $g \in D$. Với $I_1(t)$, ta thấy

$$\|[S(t+h-\tau) - S(t-\tau)]g(\tau)\| = \|\int_0^1 hS'(t-\tau+\theta h)g(\tau)d\theta\|$$

$$\leq h \int_0^1 \|S'(t-\tau+\theta h)\|_{op}\|g(\tau)\|d\theta$$
$$\leq h \int_0^1 \frac{\|g(\tau)\|d\theta}{t-\tau+\theta h},$$

ở đây ta đã sử dụng công thức giá trị trung bình cho toán tử (xem [24, Theorem 3.2.6]) cùng với Bổ đề 3.1(3). Do đó

$$\|[S(t+h-\tau)-S(t-\tau)]g(\tau)\| \leq C\|g\|_\infty \ln\left(1+\frac{h}{t-\tau}\right)$$
$$\leq C\|g\|_\infty \frac{h^\beta}{\beta(t-\tau)^\beta},\ \beta \in (0,1), \quad (3.20)$$

nhờ vào bất đẳng thức $\ln(1+r) \leq \dfrac{r^\beta}{\beta}$ với $r > 0, \beta \in (0,1)$. Sử dụng (3.20), ta nhận được

$$I_1(t) \leq \frac{\|g\|_\infty h^\beta}{\beta} \int_0^t \frac{ds}{(t-\tau)^\beta}$$
$$\leq \frac{\|g\|_\infty h^\beta}{\beta(1-\beta)} T^{1-\beta} \to 0 \text{ khi } h \to 0 \text{ đều theo } g \in D.$$

Cuối cùng với $h \in (0,T)$, ta có

$$\|\mathcal{Q}(g)(h) - \mathcal{Q}(g)(0)\| \leq \int_0^h \|S(h-\tau)g(\tau)\|d\tau \leq h\|g\|_\infty \to 0 \text{ khi } h \to 0,$$

đều theo $g \in D$. Như vậy, $\mathcal{Q}(D)$ là tập liên tục đồng bậc. Áp dụng Arzelà-Ascoli ta có điều phải chứng minh. □

Bây giờ sẽ phát biểu và chứng minh một bất đẳng thức kiểu Gronwall.

Mệnh đề 3.4. *Giả sử z là một hàm không âm thỏa mãn bất đẳng thức*

$$z(t) \leq \omega(t,\lambda,\gamma)z_0 + \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda,\gamma)[az(\tau)+b(\tau)]d\tau,\ t \geq 0, \quad (3.21)$$

với $a \in [0,\lambda)$, $\gamma > 0$, $b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Khi đó

$$z(t) \leq \omega\Big(t,\lambda-a,\frac{\lambda\gamma}{\lambda-a}\Big)z_0 + \int_0^t \omega\Big(t-\tau,\lambda-a,\frac{\lambda\gamma}{\lambda-a}\Big)b(\tau)d\tau.$$

Chứng minh. Kí hiệu $y(t)$ là vế phải của (3.21). Khi đó $z(t) \le y(t)$ và y là nghiệm của phương trình

$$y'(t) + \lambda y(t) + \lambda\gamma(m * y)'(t) = az(t) + b(t),\ t > 0, y(0) = z_0,$$

như đã chứng minh trong Mệnh đề 3.3. Từ đó

$$y'(t) + (\lambda - a)y(t) + (\lambda - a)\frac{\lambda\gamma}{\lambda - a}(m * y)'(t) = a[z(t) - y(t)] + b(t),\ t > 0,$$
$$y(0) = z_0.$$

Ta suy ra

$$\begin{aligned} y(t) &= \omega\Big(t, \lambda - a, \frac{\lambda\gamma}{\lambda - a}\Big)z_0 \\ &\quad + \int_0^t \omega\Big(t - \tau, \lambda - a, \frac{\lambda\gamma}{\lambda - a}\Big)\Big(a[z(\tau) - y(\tau)] + b(\tau)\Big)d\tau \\ &\le \omega\Big(t, \lambda - a, \frac{\lambda\gamma}{\lambda - a}\Big)z_0 + \int_0^t \omega\Big(t - \tau, \lambda - a, \frac{\lambda\gamma}{\lambda - a}\Big)b(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

nhờ vào tính dương của hàm ω và tính chất $z(\tau) - y(\tau) \le 0$ với $\tau \ge 0$. Ta có điều phải chứng minh. □

3.3. Tính giải được và tính ổn định nghiệm

Dựa trên biểu diễn (3.13), chúng tôi đưa ra định nghĩa nghiệm tích phân cho bài toán (3.1)-(3.3).

Định nghĩa 3.1. Hàm $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ được gọi là nghiệm tích phân của bài toán (3.1)-(3.3) trên đoạn $[0, T]$ nếu

$$u(\cdot, t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t - \tau)f(\tau, u(\cdot, \tau))d\tau \text{ với mọi } t \in [0, T].$$

Định lí sau là kết quả về tính giải được toàn cục của bài toán (3.1)-(3.3).

Định lí 3.1. *Giả sử* (**M**) *được thỏa mãn và hàm phi tuyến* $f : [0,T] \times L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *có các tính chất*

(**F**1) *f liên tục sao cho $f(\cdot, 0) = 0$ và $\|f(t, v_1) - f(t, v_2)\| \le \kappa(r)\|v_1 - v_2\|$ với mọi $v_1, v_2 \in B_r$, $t \in [0,T]$, ở đây B_r là hình cầu đóng trong $L^2(\Omega)$ có tâm tại điểm gốc và bán kính r, $\kappa(\cdot)$ là một hàm không âm sao cho $\limsup_{r\to 0} \kappa(r) = \ell \in [0, \lambda_1)$.*

Khi đó tồn tại $\delta > 0$ sao cho với $\|\xi\| \le \delta$, bài toán (3.1)-(3.3) *có duy nhất nghiệm tích phân trên đoạn* $[0,T]$.

Chứng minh. Xét toán tử $\Phi : C([0,T]; L^2(\Omega)) \to C([0,T]; L^2(\Omega))$ xác định bởi

$$\Phi(u)(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-\tau) f(\tau, u(\cdot,\tau))d\tau \text{ với } t \in [0,T].$$

Ta sẽ chứng minh $\Phi(\mathsf{B}_\rho) \subset \mathsf{B}_\rho$ với một số $\rho > 0$ nào đó, ở đây B_ρ là hình cầu đóng trong $C([0,T]; L^2(\Omega))$ có tâm tại điểm gốc và bán kính ρ. Lấy $\epsilon \in (0, \lambda_1 - \ell)$, khi đó tồn tại $\rho > 0$ sao cho $\kappa(r) \le \ell + \epsilon$ với mọi $r \le \rho$. Với $u \in \mathsf{B}_\rho$, ta có

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(\cdot,t)\| &\le \|S(t)\xi\| + \int_0^t \|S(t-\tau)\|_{op} \|f(\tau, u(\cdot,\tau))\| d\tau \\
&\le \omega(t,\lambda_1)\|\xi\| + \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)\kappa(\rho)\|u(\cdot,\tau)\| d\tau \\
&\le \omega(t,\lambda_1)\|\xi\| + (\ell+\epsilon)\rho \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1) d\tau \\
&\le \omega(t,\lambda_1)\|\xi\| + (\ell+\epsilon)\rho\lambda_1^{-1}(1 - \omega(t,\lambda_1)) \\
&= \omega(t,\lambda_1)[\|\xi\| - (\ell+\epsilon)\rho\lambda_1^{-1}] + (\ell+\epsilon)\rho\lambda_1^{-1}, \ \forall u \in \mathsf{B}_\rho, t \in [0,T],
\end{aligned}$$

ở đây ta đã sử dụng Bổ đề 3.1(1) và Mệnh đề 3.2(2). Chọn $\|\xi\| \le \delta :=$

$\ell\rho\lambda_1^{-1}$, ta thấy

$$\|\Phi(u)(\cdot,t)\| \le (\ell+\epsilon)\rho\lambda_1^{-1} \le \rho,\ \forall u \in \mathsf{B}_\rho, t \in [0,T],$$

từ đó suy ra $\Phi(\mathsf{B}_\rho) \subset \mathsf{B}_\rho$. Bây giờ ta sẽ chứng tỏ Φ là một ánh xạ co trên B_ρ. Với $u_1, u_2 \in \mathsf{B}_\rho$, ta có

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u_1)(\cdot,t) - \Phi(u_2)(\cdot,t)\| &\le \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)\|f(\tau,u_1(\cdot,\tau)) - f(\tau,u_2(\cdot,\tau))\|d\tau \\
&\le \kappa(\rho)\int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)\|u_1(\cdot,\tau) - u_2(\cdot,\tau)\|d\tau \\
&\le (\ell+\epsilon)\|u_1-u_2\|_\infty \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)d\tau \\
&\le (\ell+\epsilon)\lambda_1^{-1}(1-\omega(t,\lambda_1))\|u_1-u_2\|_\infty,\ \forall t \in [0,T],
\end{aligned}$$

điều này đảm bảo

$$\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|_\infty \le (\ell+\epsilon)\lambda_1^{-1}\|u_1-u_2\|_\infty.$$

Vậy Φ là một ánh xạ co và nó có điểm bất động duy nhất trong B_ρ, và điểm bất động này là nghiệm của bài toán (3.1)-(3.3). Để chứng minh tính duy nhất nghiệm, giả sử $u, v \in C([0,T];L^2(\Omega))$ là hai nghiệm của (3.1)-(3.3). Khi đó có thể giả sử $u, v \in \mathsf{B}_R$ với $R > 0$ nào đó. Ta có đánh giá

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\| &\le \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)\kappa(R)\|u(\cdot,\tau) - v(\cdot,\tau)\|d\tau \\
&\le \kappa(R)\int_0^t \|u(\cdot,\tau) - v(\cdot,\tau)\|d\tau,\ \forall t \in [0,T],
\end{aligned}$$

nhờ tính chất $\omega(t,\lambda_1) \le 1$ với mọi $t \ge 0$. Sử dụng bất đẳng thức Gronwall cổ điển, ta nhận được $\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\| = 0$ với mọi $t \in [0,T]$, từ đó suy ra $u = v$. Định lí đã được chứng minh. $\square$

Trong định lí tiếp theo, ta thu được kết quả về tính giải được toàn cục khi hàm phi tuyến tăng trưởng dưới tuyến tính. Chú ý rằng kết quả về tính giải được trong trường hợp này thu được mà không cần điều kiện ban đầu đủ nhỏ như trong Định lí 3.1.

Định lí 3.2. *Giả sử* (**M**) *được thỏa mãn với* m *là hàm không tăng. Giả sử thêm rằng* f *có tính chất*

(**F**2) f *liên tục và* $\|f(t,v)\| \leq p(t)\|v\| + q(t)$, *với mọi* $v \in L^2(\Omega)$, *ở đây* $p, q \in L^1(0,T)$ *là các hàm không âm.*

Khi đó, bài toán (3.1)-(3.3) *có ít nhất một nghiệm tích phân trên đoạn* $[0,T]$.

Chứng minh. Kí hiệu $D = \{u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) : \|u(t)\| \leq \psi(t), \ \forall t \in [0,T]\}$, ở đó ψ là nghiệm duy nhất của phương trình tích phân

$$\psi(t) = \|\xi\| + \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)p(\tau)\psi(\tau)d\tau + \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)q(\tau)d\tau, t \in [0,T].$$

Khi đó D là một tập lồi, đóng và bị chặn trong $C([0,T]; L^2(\Omega))$. Xét toán tử Φ trên D, ta có

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(\cdot,t)\| &\leq \|S(t)\xi\| + \int_0^t \|S(t-\tau)\|_{op}\|f(\tau,u(\cdot,\tau))\|d\tau \\
&\leq \|\xi\| + \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)[p(\tau)\|u(\cdot,\tau)\| + q(\tau)]d\tau \\
&\leq \|\xi\| + \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)[p(\tau)\psi(\tau) + q(\tau)]d\tau = \psi(t), \ \forall t \in [0,T],
\end{aligned}$$

với mọi $u \in D$. Vậy $\Phi(D) \subset D$.

Do f liên tục nên dễ kiểm tra Φ cũng liên tục. Hơn nữa

$$\Phi(u) = S(\cdot)\xi + \mathcal{Q} \circ N_f(u),$$

$$N_f(u)(\cdot,t) = f(t,u).$$

Từ biểu diễn này và do tính compact của toán tử $\mathcal{Q}$ (phát biểu trong Bổ đề 3.2) ta suy ra Φ là toán tử compact. Áp dụng định lí điểm bất động Schauder, Φ có điểm bất động trong D. Định lí đã được chứng minh. □

Bây giờ ta sẽ phát biểu và chứng minh các kết quả về tính ổn định nghiệm.

Định lí 3.3. *Giả sử* (**M**) *được thỏa mãn với m là hàm không tăng. Giả sử thêm rằng f có tính chất*

(**F2′**) *f liên tục và $\|f(t,v)\| \le p(t)\|v\| + q(t)$, với mọi $v \in L^2(\Omega)$, ở đây $p \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ và $q \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ là các hàm không âm sao cho $\|p\|_\infty < \lambda_1$ và $\omega * q$ là hàm bị chặn.*

Khi đó tồn tại tập hấp thụ cho nghiệm của bài toán (3.1)-(3.3) *với dữ kiện ban đầu bất kì. Hơn nữa, nếu $q = 0$ thì nghiệm tầm thường của* (3.1) *ổn định tiệm cận.*

Chứng minh. Giả sử u là nghiệm của bài toán (3.1)-(3.3). Khi đó từ các đánh giá của $S(t)$ và f, ta có

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\| &\le \omega(t,\lambda_1)\|\xi\| + \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)[p(\tau)\|u(\cdot,\tau)\| + q(\tau)]d\tau\\ &\le \omega(t,\lambda_1)\|\xi\| + \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)[\|p\|_\infty\|u(\cdot,\tau)\| + q(\tau)]d\tau.\end{aligned}$$

Áp dụng Mệnh đề 3.4, ta có

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\| \le \omega&\Big(t,\lambda_1-\|p\|_\infty,\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\|p\|_\infty}\Big)\|\xi\|\\ &+\int_0^t \omega\Big(t-\tau,\lambda_1-\|p\|_\infty,\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\|p\|_\infty}\Big)q(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Đặt

$$R = 1 + \sup_{t\ge 0}\int_0^t \omega\Big(t-\tau,\lambda_1-\|p\|_\infty,\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\|p\|_\infty}\Big)q(\tau)d\tau.$$

Vì $\omega\Big(t, \lambda_1 - \|p\|_\infty, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \|p\|_\infty}\Big) \to 0$ khi $t \to \infty$ nên B_R là tập hấp thụ của nghiệm của (3.1)-(3.3).

Cuối cùng, nếu $q = 0$ thì (3.1) có nghiệm tầm thường và ta có

$$\|u(\cdot, t)\| \leq \omega\Big(t, \lambda_1 - \|p\|_\infty, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \|p\|_\infty}\Big)\|\xi\|, \ \forall t \geq 0,$$

tức là nghiệm tầm thường ổn định tiệm cận. Định lí được chứng minh. □

Định lí 3.4. *Giả sử các giả thiết của Định lí 3.1 được thỏa mãn với mọi* $T > 0$. *Khi đó nghiệm tầm thường của* (3.1) *ổn định tiệm cận.*

Chứng minh. Lấy ρ, δ, và ϵ như trong chứng minh Định lí 3.1. Khi đó với mọi $\|\xi\| \leq \delta$, tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán (3.1)-(3.3) sao cho $\|u(t)\| \leq \rho$ với mọi $t > 0$. Hơn nữa

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t)\| &\leq \|S(t)\xi\| + \int_0^t \|S(t-\tau)\|_{op}\|f(\tau, u(\cdot, \tau)) - f(\tau, 0)\|d\tau \\
&\leq \omega(t, \lambda_1)\|\xi\| + \int_0^t \omega(t-\tau, \lambda_1)\kappa(\rho)\|u(\cdot, \tau)\|d\tau \\
&\leq \omega(t, \lambda_1)\|\xi\| + \int_0^t \omega(t-\tau, \lambda_1)(\ell + \epsilon)\|u(\cdot, \tau)\|d\tau, \ \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức kiểu Gronwall trong Mệnh đề 3.4, ta thu được

$$\|u(\cdot, t)\| \leq \omega\Big(t, \lambda_1 - \ell - \epsilon, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \ell - \epsilon}\Big)\|\xi\|, \ \forall t \geq 0. \tag{3.22}$$

Vì $\lambda_1 - \ell - \epsilon > 0$ nên

$$\omega\Big(t, \lambda_1 - \ell - \epsilon, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \ell - \epsilon}\Big) \to 0 \text{ khi } t \to \infty.$$

Bất đẳng thức (3.22) đảm bảo tính liên tục và tính hút của nghiệm tầm thường. Định lí được chứng minh. □

Xét trường hợp f có tính chất Lipschitz toàn cục, ta nhận được kết quả mạnh hơn sau đây.

Định lí 3.5. *Giả sử* (**M**) *được thỏa mãn. Nếu tồn tại* $\kappa_0 \in [0, \lambda_1)$ *sao cho*

$$\|f(t, v_1) - f(t, v_2)\| \le \kappa_0 \|v_1 - v_2\|, \text{ với mọi } t \in \mathbb{R}^+, v_1, v_2 \in L^2(\Omega),$$

thì mọi nghiệm của (3.1)-(3.3) *ổn định tiệm cận.*

Chứng minh. Giả sử u và v là hai nghiệm của (3.1)-(3.2). Khi đó

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\| &\le \|S(t)[u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0)]\| \\
&\quad + \int_0^t \|S(t-\tau)\|_{op} \|f(\tau, u(\cdot, \tau)) - f(\tau, v(\cdot, \tau))\| d\tau \\
&\le \omega(t, \lambda_1)\|u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0)\| \\
&\quad + \int_0^t \omega(t-\tau, \lambda_1)\kappa_0 \|u(\cdot, \tau) - v(\cdot, \tau)\| d\tau.
\end{aligned}$$

Áp dụng Mệnh đề 3.4 ta được

$$\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\| \le \omega\Big(t, \lambda_1 - \kappa_0, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \kappa_0}\Big)\|u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0)\|, \ \forall t \ge 0,$$

từ đó suy ra mọi nghiệm của (3.1)-(3.2) ổn định tiệm cận. □

3.4. Sự tồn tại nghiệm phân rã

Trong phần này ta xét bài toán (3.1)-(3.3) với giả thiết f không thỏa mãn điều kiện Lipschitz và có tăng trưởng trên tuyến tính. Cụ thể

(**F**3) $f : \mathbb{R}^+ \times L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ liên tục sao cho

$$\|f(t, v)\| \le p(t)G(\|v\|), \ \forall t \in \mathbb{R}^+, v \in L^2(\Omega),$$

với $p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ là một hàm không âm và $G \in C(\mathbb{R}^+)$ là một hàm không âm, không tăng sao cho

$$\limsup_{r \to 0} \frac{G(r)}{r} \cdot \sup_{t \ge 0} \int_0^t \omega(t-\tau, \lambda_1)p(\tau)d\tau < 1, \tag{3.23}$$

và

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{t\geq T} \int_0^{\frac{t}{2}} \omega(t-\tau, \lambda_1) p(\tau) d\tau = 0. \tag{3.24}$$

Ta sẽ chứng minh sự tồn tại nghiệm phân rã cho bài toán (3.1)-(3.3). Để làm điều này, ta sử dụng lí thuyết điểm bất động cho ánh xạ nén.

Kí hiệu $BC_0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ là không gian các hàm liên tục trên $\mathbb{R}^+$, lấy giá trị trong $L^2(\Omega)$ và phân rã khi $t \to \infty$. Trên $BC_0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$, ta sử dụng chuẩn sup $\|\cdot\|_\infty$.

Giả sử D là một tập bị chặn trong $BC_0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ và $\pi_T : BC_0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \to C([0,T]; L^2(\Omega))$ là toán tử giới hạn trên $BC_0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$, tức $\pi_T(u)$ là giới hạn của $u \in BC_0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ trên đoạn $[0,T]$. Ta định nghĩa các độ đo

$$d_\infty(D) = \lim_{T\to\infty} \sup_{u\in D} \sup_{t\geq T} \|u(\cdot,t)\|,$$

$$\chi_\infty(D) = \sup_{T>0} \omega_T(\pi_T(D)),$$

ở đây $\omega_T(\cdot)$ là độ đo Hausdorff trên $C([0,T]; L^2(\Omega))$. Khi đó, ta có độ đo sau (được đề cập trong [5])

$$\chi^*(D) = d_\infty(D) + \chi_\infty(D).$$

Độ đo này có tất cả các tính chất trong Định nghĩa 1.6. Hơn nữa, nếu $\chi^*(D) = 0$ thì D là tập compact tương đối trong $BC_0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$. Đặc biệt nếu $u \in C(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$, thì $d_\infty(\{u\}) = 0$ khi và chỉ khi $u \in BC_0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$.

Bổ đề 3.3. *Giả sử* (**M**) *và* (**F**3) *được thỏa mãn. Khi đó tồn tại các số δ và ρ sao cho với $\|\xi\| \leq \delta$, toán tử nghiệm Φ thỏa mãn $\Phi(\mathsf{B}_\rho) \subset \mathsf{B}_\rho$, ở đây B_ρ là hình cầu trong $BC_0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$ với tâm tại điểm gốc và bán kính ρ.*

Chứng minh. Đặt

$$\ell = \limsup_{r\to 0} \frac{G(r)}{r}, \; M = \sup_{t\geq 0} \int_0^t \omega(t-\tau, \lambda_1) p(\tau) d\tau.$$

Khi đó theo (3.23), ta có thể tìm được $\zeta > 0$ sao cho

$$(\ell + \zeta)M < 1. \tag{3.25}$$

Hơn nữa, tồn tại $\rho > 0$ sao cho $\frac{G(r)}{r} \leq \ell + \zeta$ với mọi $r \in (0, \rho]$. Nhắc lại rằng Φ được cho bởi

$$\Phi(u)(\cdot, t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau, u(\cdot, \tau))d\tau,\ u \in BC_0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)).$$

Xét Φ trên B_ρ, ta có

$$\|\Phi(u)(\cdot, t)\| \leq \omega(t, \lambda_1)\|\xi\| + \int_0^t \omega(t-\tau, \lambda_1)p(\tau)G(\|u(\cdot, \tau)\|)d\tau. \tag{3.26}$$

Tiếp theo, ta chứng minh nếu $u \in \mathcal{BC}_0^\xi$ thì $\Phi(u) \in \mathcal{BC}_0^\xi$. Theo định nghĩa của $\mathcal{BC}_0^\xi$, ta cần chỉ ra $\Phi(u)(\cdot, t) \to 0$ khi $t \to \infty$ trong $L^2(\Omega)$. Từ (3.26), ta cần chứng minh

$$I(t) := \int_0^t \omega(t-\tau, \lambda_1)p(\tau)G(\|u(\cdot, \tau)\|)d\tau \to 0 \text{ khi } t \to \infty.$$

Do $\|u(\cdot, t)\| \to 0$ khi $t \to \infty$ và G liên tục nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $T > 0$ sao cho $G(\|u(\cdot, \tau)\|) \leq \varepsilon$ với mọi $\tau \geq T$. Do đó với $t > T$, ta có

$$\begin{aligned} I(t) &= \left(\int_0^T + \int_T^t\right) \omega(t-\tau, \lambda_1)p(\tau)G(\|u(\cdot, \tau)\|)d\tau \\ &\leq G(\rho)\int_0^T \omega(t-\tau, \lambda_1)p(\tau)d\tau + \varepsilon\int_T^t \omega(t-\tau, \lambda_1)p(\tau)d\tau \\ &\leq G(\rho)\omega(t-T, \lambda_1)\int_0^T p(\tau)d\tau + \varepsilon M \\ &\leq [G(\rho) + M]\varepsilon, \end{aligned}$$

với t được chọn sao cho

$$\omega(t-T, \lambda_1)\int_0^T p(\tau)d\tau < \varepsilon,$$

điều này thực hiện được nhờ có $\omega(t,\lambda_1) \to 0$ khi $t \to \infty$. Do đó ta có $\Phi(u) \in \mathcal{BC}_0^{\xi}$.

Đặt

$$\delta = \rho \inf_{t\geq 0} \left[\omega(t,\lambda_1)^{-1} \left(1 - (\ell+\zeta) \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1) p(\tau) d\tau \right) \right],$$

khi đó $\delta > 0$. Thật vậy, do $\omega(t,\lambda_1)^{-1} \geq 1$ nên

$$\begin{aligned} \delta &\geq \rho \inf_{t\geq 0} \left(1 - (\ell+\zeta) \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1) p(\tau) d\tau \right) \\ &\geq \rho \left(1 - (\ell+\zeta) \sup_{t\geq 0} \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1) p(\tau) d\tau \right) > 0, \end{aligned}$$

ở đây ta đã sử dụng (3.25). Với $\|\xi\| \leq \delta$, $u \in \mathsf{B}_\rho$, ta có

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)(\cdot,t)\| &\leq \omega(t,\lambda_1)\|\xi\| + G(\rho) \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1) p(\tau) d\tau \\ &\leq \omega(t,\lambda_1)\delta + (\ell+\zeta)\rho \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1) p(\tau) d\tau \leq \rho, \ \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

từ đó suy ra $\Phi(\mathsf{B}_\rho) \subset \mathsf{B}_\rho$. Ta có điều phải chứng minh. □

Định lí sau phát biểu kết quả về sự tồn tại nghiệm phân rã.

Định lí 3.6. *Giả sử* (**M**) *và* (**F**3) *được thỏa mãn. Khi đó tồn tại* $\delta > 0$ *sao cho với* $\|\xi\| \leq \delta$, *bài toán* (3.1)-(3.3) *có một tập compact khác rỗng các nghiệm phân rã.*

Chứng minh. Lấy δ và B_ρ như trong Bổ đề 3.3, xét ánh xạ nghiệm $\Phi : \mathsf{B}_\rho \to \mathsf{B}_\rho$. Từ các giả thiết đặt trên f và định lí hội tụ trội Lebesgue, Φ liên tục. Ta sẽ chỉ ra Φ là χ^*-nén. Với $D \subset \mathsf{B}_\rho$, lý luận như trong chứng minh Định lí 3.2, ta có $\pi_T \circ \Phi$ là ánh xạ compact, tức là, $\pi_T(\Phi(D))$ là tập compact tương đối trong $C([0,T]; L^2(\Omega))$. Từ đó $\omega_T(\pi_T(\Phi(D))) = 0$ và $\chi_\infty(\Phi(D)) = 0$. Ta sẽ ước lượng $d_\infty(\Phi(D))$.

Với $z \in \Phi(D)$ và $u \in D$ sao cho $z = \Phi(u)$, ta có

$$
\begin{aligned}
\|z(\cdot,t)\| &\le \omega(t,\lambda_1)\|\xi\| + \int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)p(\tau)G(\|u(\cdot,\tau)\|)d\tau \\
&\le \omega(t,\lambda_1)\|\xi\| + (\ell+\zeta)\int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)p(\tau)\|u(\cdot,\tau)\|d\tau \\
&\le \omega(t,\lambda_1)\|\xi\| + (\ell+\zeta)\left(\int_0^{\frac{t}{2}} + \int_{\frac{t}{2}}^t\right)\omega(t-\tau,\lambda_1)p(\tau)\|u(\cdot,\tau)\|d\tau \\
&\le \omega(t,\lambda_1)\|\xi\| + (\ell+\zeta)\rho\int_0^{\frac{t}{2}} \omega(t-\tau,\lambda_1)p(\tau)d\tau \\
&\quad + \sup_{\tau\ge\frac{t}{2}}\|u(\cdot,\tau)\|(\ell+\zeta)\int_{\frac{t}{2}}^t \omega(t-\tau,\lambda_1)p(\tau)d\tau \\
&\le \omega(t,\lambda_1)\|\xi\| + (\ell+\zeta)\rho\int_0^{\frac{t}{2}} \omega(t-\tau,\lambda_1)p(\tau)d\tau \\
&\quad + \sup_{u\in D}\sup_{\tau\ge\frac{t}{2}}\|u(\cdot,\tau)\|(\ell+\zeta)\int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)p(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Với $T > 0$ và $t \ge T$, ta có

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\ge T}\|z(\cdot,t)\| \le \omega(T,\lambda_1)\|\xi\| &+ (\ell+\zeta)\rho\sup_{t\ge T}\int_0^{\frac{t}{2}}\omega(t-\tau,\lambda_1)p(\tau)d\tau \\
&+ \sup_{u\in D}\sup_{\tau\ge\frac{T}{2}}\|u(\cdot,\tau)\|(\ell+\zeta)M,
\end{aligned}
$$

ở đây

$$M = \sup_{t\ge 0}\int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)p(\tau)d\tau.$$

Do $z \in \Phi(D)$ bất kì nên

$$
\begin{aligned}
\sup_{z\in\Phi(D)}\sup_{t\ge T}\|z(\cdot,t)\| \le \omega(T,\lambda_1)\|\xi\| &+ (\ell+\zeta)\rho\sup_{t\ge T}\int_0^{\frac{t}{2}}\omega(t-\tau,\lambda_1)p(\tau)d\tau \\
&+ \sup_{u\in D}\sup_{t\ge\frac{T}{2}}\|u(\cdot,\tau)\|(\ell+\zeta)M,
\end{aligned}
$$

điều này đảm bảo

$$d_\infty(\Phi(D)) \le (\ell+\zeta)Md_\infty(D),$$

ở đây ta đã sử dụng (3.24). Vì vậy

$$\chi^*(\Phi(D)) = \chi_\infty(\Phi(D)) + d_\infty(\Phi(D)) = d_\infty(\Phi(D)) \le (\ell+\zeta)Md_\infty(D)$$
$$\le (\ell+\zeta)M[d_\infty(D) + \chi_\infty(D)] = (\ell+\zeta)M\chi^*(D).$$

Nếu $\chi^*(D) \le \chi^*(\Phi(D))$ thì $\chi^*(D) \le (\ell+\zeta)M\chi^*(D)$, từ đó suy ra $\chi^*(D) = 0$ do $(\ell+\zeta)M < 1$. Vậy Φ là χ^*-nén và do đó nó có điểm bất động theo Định lí 1.4. Kí hiệu $\mathcal{D}$ là tập điểm bất động của Φ trong B_ρ. Khi đó $\mathcal{D}$ đóng và $\mathcal{D} \subset \Phi(\mathcal{D})$. Do đó

$$\chi^*(\mathcal{D}) \le \chi^*(\Phi(\mathcal{D})) \le (\ell+\zeta)M\chi^*(\mathcal{D}),$$

từ đó suy ra $\chi^*(\mathcal{D}) = 0$ và $\mathcal{D}$ là một tập compact. Định lí được chứng minh. □

Nhận xét 3.1. Nếu $p \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ thì các điều kiện (3.23)-(3.24) có thể được viết đơn giản hơn. Thật vậy

$$\begin{aligned}\sup_{t\ge 0}\int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)p(\tau)d\tau &\le \|p\|_\infty \sup_{t\ge 0}\int_0^t \omega(t-\tau,\lambda_1)d\tau\\ &\le \|p\|_\infty \lambda_1^{-1}\sup_{t\ge 0}(1-\omega(t,\lambda_1))\\ &= \|p\|_\infty\lambda_1^{-1},\end{aligned}$$

ở đây $\|p\|_\infty = \text{esssup}_{t\ge 0}|p(t)|$. Do đó, ta có thể thay (3.23) bởi

$$\|p\|_\infty \limsup_{r\to 0}\frac{G(r)}{r} < \lambda_1.$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{t}{2}} \omega(t-\tau,\lambda_1)p(\tau)d\tau &\le \|p\|_\infty \int_0^{\frac{t}{2}}\omega(t-\tau,\lambda_1)d\tau\\ &= \|p\|_\infty\int_{\frac{t}{2}}^t \omega(\tau,\lambda_1)d\tau.\end{aligned}$$

Do đó

$$\sup_{t\geq T}\int_0^{\frac{t}{2}}\omega(t-\tau,\lambda_1)p(\tau)d\tau \leq \|p\|_\infty\int_{\frac{T}{2}}^{\infty}\omega(\tau,\lambda_1)d\tau$$
$$\to 0 \text{ khi } T\to\infty,$$

nhờ tính chất $\omega(\cdot,\lambda_1)\in L^1(\mathbb{R}^+)$. Điều kiện (3.24) được thỏa mãn.

Ta xét một ví dụ:

$$m(t) = \sum_{i=1}^{n}\eta_i g_{1-\alpha_i}(t),\ \eta_i>0, \alpha_i\in(0,1), \tag{3.27}$$

$$f(t,v)(x) = p(t)F\left(\int_\Omega |v(x)|^2dx\right)v(x),\ t\geq 0, v\in L^2(\Omega). \tag{3.28}$$

Nhắc lại rằng $g_\beta(t) = \dfrac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$ với $t>0$, $\beta>0$. Khi đó m xác định bởi (3.27) là hoàn toàn đơn điệu, từ đó (**M**) được thỏa mãn.

Xét hàm phi tuyến f cho bởi (3.28). Ta giả thiết

- p liên tục và bị chặn trên $\mathbb{R}^+$;
- $F\in C^1(\mathbb{R}^+)$ thỏa mãn $|F(s)|\leq a|s|^\sigma$ với $a>0, \sigma>0$.

Ta sẽ kiểm tra tính chất Lipschitz của f. Với $v_1, v_2\in L^2(\Omega)$, $\|v_1\|, \|v_2\|\leq r$, ta có

$$\begin{aligned}\|f(t,v_1)-f(t,v_2)\| &\leq |p(t)|\big[\big|F(\|v_1\|^2)-F(\|v_2\|^2)\big|\|v_2\| + \big|F(\|v_1\|^2)\big|\|v_1-v_2\|\big]\\ &\leq \|p\|_\infty\big[(\|v_1\|+\|v_2\|)\|v_2\|\big|F'\big((1-\zeta)\|v_2\|^2+\zeta\|v_1\|^2\big)\big| + a\|v_1\|^{2\sigma}\big]\|v_1-v_2\|,\end{aligned}$$

ở đó $\zeta\in[0,1]$, nhờ định lí giá trị trung bình đối với đạo hàm. Do vậy

$$\|f(t,v_1)-f(t,v_2)\|\leq \|p\|_\infty\big[2r^2\sup_{s\in[0,r^2]}|F'(s)| + ar^{2\sigma}\big]\|v_1-v_2\|,$$

từ đó f thỏa mãn (**F**1) với

$$\kappa(r) = \|p\|_\infty\big[2r^2\sup_{s\in[0,r^2]}|F'(s)|+ar^{2\sigma}\big]\to 0 \text{ khi } r\to 0.$$

Áp dụng Định lí 3.4, ta kết luận nghiệm tầm thường của (3.1) ổn định tiệm cận.

Bây giờ ta bỏ giả thiết $F \in C^1(\mathbb{R}^+)$, khi đó tính chất Lipschitz của f sẽ không được đảm bảo. Giả thiết $F \in C(\mathbb{R}^+)$ sao cho $|F(s)| \le a|s|^\sigma$ với $a, \sigma > 0$, ta có đánh giá

$$\|f(t,v)\| \le |p(t)|\big|F(\|v\|^2)\big|\|v\| \le |p(t)|a\|v\|^{2\sigma+1}.$$

Như đã chỉ ra trong Chú ý 3.1, f trong trường hợp này thỏa mãn (**F**3) với $G(r) = ar^{2\sigma+1}$, và $\frac{G(r)}{r} = ar^{2\sigma} \to 0$ khi $r \to 0$. Do đó, Định lí 3.6 đảm bảo sự tồn tại một tập compact các nghiệm phân rã của bài toán (3.1)-(3.3).

Kết luận chương

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định tiệm cận nghiệm đối với phương trình tiến hoá loại Rayleigh-Stokes nửa tuyến tính. Các kết quả chính bao gồm:

1) Chứng minh sự tồn tại nghiệm toàn cục (Định lí 3.1, 3.2).

2) Chứng minh tính ổn định tiệm cận nghiệm của nghiệm (Định lí 3.3, 3.4, 3.5).

3) Chứng minh sự tồn tại tập compact khác rỗng các nghiệm phân rã (Định lí 3.6).

Giả thiết (**M**) đóng vai trò quan trọng trong chứng minh các tính chất của cặp hàm s, r. Từ đó, ta chứng minh được bất đẳng thức kiểu Gronwall và tính compact của toán tử Cauchy. Các kĩ thuật sử dụng trong chương này là mới và có thể áp dụng để nghiên cứu một số lớp phương trình vi phân không địa phương khác như phương trình khuếch tán có nhớ.

Chương 4

BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH THAM SỐ TRONG BẤT ĐẲNG THỨC VI BIẾN PHÂN PHÂN THỨ

Chương này, chúng tôi nghiên cứu tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định cho bài toán xác định tham số trong bất đẳng thức vi biến phân phân thứ. Nội dung nghiên cứu này sẽ được thực hiện dựa trên phân tích tính chính quy nghiệm cho phương trình dưới khuếch tán và các định lí điểm bất động.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo [3] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

4.1. Đặt bài toán

Cho X là không gian Banach, $\mathcal{U}$ là không gian Hilbert và $\mathcal{K}$ là tập con lồi đóng trong $\mathcal{U}$, chúng tôi xét bài toán xác định tham số (**FrIP**) sau: cho $\xi, \psi \in X$, tìm (x, u, z) thoả mãn bất đẳng thức vi biến phân phân thứ

$$D_0^\alpha x(t) = Ax(t) + B(u(t))z + h(x(t)), t \in (0, T], \tag{4.1}$$

$$\langle F(x(t)) + G(u(t)), v - u(t)\rangle \geq 0, \forall v \in \mathcal{K}, t \in [0, T], \tag{4.2}$$

$$x(0) = \xi, \tag{4.3}$$

và thoả mãn điều kiện

$$\int_0^T \varphi(s)x(s)ds = \psi, \tag{4.4}$$

trong đó (x, u) lấy giá trị trong $X \times \mathcal{U}$, $z \in X$; $D_0^\alpha, \alpha \in (0, 1)$, là đạo hàm phân thứ Caputo cấp α. Trong mô hình bài toán, A là toán tử tuyến tính đóng trên X, $\varphi \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ là hàm không âm, $B : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $h : X \to X$, $F : X \to \mathcal{U}^*$, $G : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^*$ là các ánh xạ cho trước và $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là cặp đối ngẫu chính tắc giữa $\mathcal{U}$ và $\mathcal{U}^*$.

Mục đích của chương này là đưa ra một số điều kiện phù hợp để đảm bảo tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định Lipschitz đối với bài toán (**FrIP**) (4.1)-(4.4).

4.2. Tính giải được

Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán (**FrIP**), chúng tôi đặt các giả thiết sau:

(**A**) A là toán tử quạt và A sinh ra nửa nhóm compact sao cho

$$\|S(t)v\| \leq e^{-\beta t}\|v\|, \ \forall t \geq 0, v \in X,$$

trong đó β là số dương;

(**B**) $B : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ là hàm Lipschitz, nghĩa là tồn tại số dương $L_B > 0$ sao cho

$$\|B(u_1) - B(u_2)\| \leq L_B\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{U}}, \forall u_1, u_2 \in \mathcal{U},$$

và tồn tại số dương $m_B, M_B > 0$ sao cho $m_B \leq B(v) \leq M_B$ với mọi $v \in \mathcal{K}$;

(**F**) Toán tử $F : X \to \mathcal{U}^*$ liên tục Lipschitz với hệ số L_F,

$$\|F(y_1) - F(y_2)\|_{\mathcal{U}^*} \leq L_F\|y_1 - y_2\|, \ \forall y_1, y_2 \in X;$$

(**G**) Toán tử $G : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^*$ được cho bởi

$$\langle G(u), v\rangle = b(u, v), \forall u, v \in \mathcal{U},$$

trong đó $b : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ là dạng song tuyến tính liên tục trên $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ và thoả mãn

$$b(u, u) \geq \eta_G\|u\|^2_{\mathcal{U}}, \forall u \in \mathcal{U},$$

ở đó $\eta_G > 0$;

(**H**) $h : X \to X$ là hàm Lipschitz với hệ số L_h,

$$\|h(y_1) - h(y_2)\| \le L_h\|y_1 - y_2\|,\ \forall y_1, y_2 \in X.$$

Đặt

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in C([0,T];\mathcal{U}) :\ u(t) \in \mathcal{K}, \forall t \in [0,T]\}.$$

Ta nhắc lại định nghĩa nghiệm tích phân và nghiệm cổ điển của bài toán.

Định nghĩa 4.1. Cho $\xi, z \in X$, một cặp $(x,u) \in C([0,T];X) \times \mathcal{U}_{ad}$ được gọi là nghiệm cổ điển (tương ứng tích phân) của bài toán (4.1)-(4.3) nếu (x,u) thoả mãn (4.2) và x là nghiệm cổ điển (tương ứng tích phân) của bài toán

$$\begin{aligned} D_0^\alpha x(t) &= Ax(t) + f(t),\ t \in (0,T], \\ x(0) &= \xi, \end{aligned}$$

với $f(t) = B(u(t))z + h(x(t))$.

Định nghĩa 4.2. Cho $\xi, \psi \in X$, bộ ba $(x,u,z) \in C([0,T];X) \times \mathcal{U}_{ad} \times X$ được gọi là nghiệm của bài toán (**FrIP**) nếu (x,u) là nghiệm cổ điển của (4.1)-(4.3) và x thoả mãn (4.4).

Cho trước $w \in \mathcal{U}^*$, kí hiệu

$$\mathbb{S}(w) := \{u \in \mathcal{K} : \langle G(u) + w, v - u\rangle \ge 0, \forall v \in \mathcal{K}\}.$$

Theo [53, Theorem 2.1], chúng ta thu được kết quả sau về tập $\mathbb{S}(w)$.

Bổ đề 4.1. *Giả sử* (**G**) *được thoả mãn. Khi đó với mỗi $w \in \mathcal{U}^*$, tập nghiệm $\mathbb{S}(w)$ là một điểm. Hơn nữa, ánh xạ $w \mapsto u$ liên tục Lipschitz từ $\mathcal{U}^*$ tới $\mathcal{U}$ với hệ số $\dfrac{1}{\eta_G}$, nghĩa là*

$$\|\mathbb{S}(w_1) - \mathbb{S}(w_2)\|_{\mathcal{U}} \le \frac{1}{\eta_G}\|w_1 - w_2\|_{\mathcal{U}^*}, \forall w_1, w_2 \in \mathcal{U}^*.$$

Xét bài toán: cho trước $\tilde{x} \in X$, tìm $\tilde{u} \in \mathcal{K}$ sao cho

$$\langle G(\tilde{u}) + F(\tilde{x}), v - \tilde{u} \rangle \geq 0, \forall v \in \mathcal{K}. \tag{4.5}$$

Bất đẳng thức (4.5) là dạng gốc của (4.2).

Bổ đề 4.2. *Giả sử* (**F**) *và* (**G**) *được thoả mãn. Khi đó với mỗi* $\tilde{x} \in X$ *tồn tại và duy nhất nghiệm* $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ *của* (4.5)*. Hơn nữa ánh xạ nghiệm*

$$\mathbb{V} : X \to \mathcal{U}$$

$$\tilde{x} \mapsto \tilde{u}$$

thoả mãn

$$\|\mathbb{V}(\tilde{x}) - \mathbb{V}(\tilde{y})\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{L_F}{\eta_G}\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_X, \ \forall \tilde{x}, \tilde{y} \in X.$$

Chứng minh. Vì $\mathbb{V} = \mathbb{S} \circ F$ nên sử dụng Bổ đề 4.1 ta thu được chứng minh của Bổ đề 4.2. □

Bài toán tương đương. Trong các phần sau chúng tôi sử dụng kí hiệu $\|\cdot\|_\infty$ cho chuẩn trên $C([0,T];X)$. Giả sử (x,u,z) là nghiệm của (**FrIP**) ứng với (ξ, ψ). Nhân (4.1) với $\varphi(t)$ và lấy tích phân ta có

$$\int_0^T \varphi(t)y'(t)dt = A\int_0^T \varphi(t)x(t)dt + \int_0^T \varphi(t)h(x(t))dt + \int_0^T \varphi(t)B(u(t))zdt, \tag{4.6}$$

trong đó

$$y(t) = \int_0^t g_{1-\alpha}(t-s)[x(s) - \xi]ds.$$

Khi đó

$$\|y(t)\| \leq \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}(\|x\|_\infty + \|\xi\|), \ \forall t \in [0,T].$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\Lambda x := \int_0^T \varphi(t)y'(t)dt = \varphi(T)y(T) - \int_0^T \varphi'(t)y(t)dt.$$

Từ đây, ta thu được đánh giá

$$\|\Lambda x\| \leq L_\varphi(\|x\|_\infty + \|\xi\|), \tag{4.7}$$

trong đó

$$L_\varphi = \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}(|\varphi(T)| + T \sup_{t\in[0,T]} |\varphi'(t)|). \tag{4.8}$$

Từ (4.6) ta có

$$\int_0^T \varphi(t)B(u(t))zdt = \Lambda x - A\psi - \int_0^T \varphi(t)h(x(t))dt.$$

Từ đây

$$z = \mathcal{I}(u)\mathcal{J}(x), \tag{4.9}$$

trong đó

$$\mathcal{I}(u) = \left(\int_0^T \varphi(t)B(u(t))dt\right)^{-1}, \tag{4.10}$$

$$\mathcal{J}(x) = \Lambda x - A\psi - \int_0^T \varphi(t)h(x(t))dt. \tag{4.11}$$

Theo giả thiết (**B**), ta có

$$|\mathcal{I}(u)| \leq \frac{1}{m_B\|\varphi\|_{L^1}}, \forall u \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{4.12}$$

Sử dụng giả thiết (**H**) và (4.7), ta có đánh giá

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{J}(x)\| &\leq \|\Lambda x\| + \|A\psi\| + (\|h(0)\| + L_h\|x\|_\infty)\|\varphi\|_{L^1} \\
&\leq (L_\varphi + L_h\|\varphi\|_{L^1})\|x\|_\infty + L_\varphi\|\xi\| + \|A\psi\| + \|h(0)\|\|\varphi\|_{L^1} \\
&\leq K_J\|x\|_\infty + M_J,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

trong đó

$$K_J = L_\varphi + L_h\|\varphi\|_{L^1}, \tag{4.14}$$

$$M_J = L_\varphi\|\xi\| + \|A\psi\| + \|h(0)\|\|\varphi\|_{L^1}. \tag{4.15}$$

Để nghiên cứu tính giải được của bài toán (**FrIP**), chúng ta viết lại bài toán này như một hệ phương trình tiến hoá phân thứ tương đương. Xét ánh xạ $\Phi : C([0,T];X) \to C([0,T];X)$ xác định bởi

$$\Phi(x)(t) := B(\mathbb{V}(x(t)))\mathcal{I}(\mathbb{V}x)\mathcal{J}(x) + h(x(t)), \tag{4.16}$$

và hệ

$$D_0^\alpha x(t) = Ax(t) + \Phi(x)(t), t \in (0,T], \tag{4.17}$$

$$x(0) = \xi, \tag{4.18}$$

ở đây, chúng tôi sử dụng kí hiệu $\mathbb{V}x$ cho ánh xạ $t \mapsto \mathbb{V}(x(t))$. Phương trình (4.17) là phương trình nửa tuyến tính bao gồm số hạng không địa phương phi tuyến.

Rõ ràng, nếu (x,u,z) là một nghiệm của bài toán (**FrIP**) trong đó z cho bởi (4.9) và u cho bởi $u = \mathbb{V}x$, thì x là một nghiệm cổ điển của bài toán (4.17)-(4.18). Kết quả sau chỉ ra khẳng định ngược lại cũng đúng.

Bổ đề 4.3. *Cho $\xi \in X, \psi \in D(A)$. Giả sử các giả thiết* (**A**), (**B**), (**F**) *và* (**G**) *được thoả mãn. Khi đó, nếu x là một nghiệm cổ điển của bài toán* (4.17)-(4.18), *thì (x,u,z), với $u = \mathbb{V}x$ và $z = \mathcal{I}(u)\mathcal{J}(x)$, là một nghiệm của bài toán* (**FrIP**).

Chứng minh. Giả sử x là một nghiệm cổ điển của bài toán (4.17)-(4.18). Theo công thức của Φ, ta có

$$D_0^\alpha x(t) = Ax(t) + B(u(t))z + h(x(t)), t \in (0,T], \tag{4.19}$$

$$x(0) = \xi,$$

trong đó $u(t) = \mathbb{V}(x(t)), t \in [0,T]$, là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân (4.2). Để chứng minh Bổ đề 4.3 ta cần chứng minh $\int_0^T \varphi(s)x(s)ds =$

ψ. Thật vậy, nhân (4.19) với φ, và lấy tích phân trên $[0, T]$ và sử dụng $z = I(u)\mathcal{J}(x)$, ta nhận được

$$A \int_0^T \varphi(s)x(s)ds = A\psi.$$

Vì $0 \in \rho(A)$, ta có $\int_0^T \varphi(s)x(s)ds = \psi$ như yêu cầu. □

Bổ đề 4.4. *Cố định $\xi \in X, \psi \in D(A)$ và giả sử* (**B**), (**F**), (**G**) *và* (**H**) *được thoả mãn. Khi đó với mọi $x \in C([0, T]; X)$ mà $\|x\|_\infty \le r$ ta có*

$$\|\Phi(x)(t_1) - \Phi(x)(t_2)\| \le K_\Phi(r)\|x(t_1) - x(t_2)\|, \ \forall t_1, t_2 \in [0, T], \tag{4.20}$$

ở đây $K_\Phi(r) > 0$. Hơn nữa

$$\|\Phi(x)\|_\infty \le L_\Phi\|x\|_\infty + M_\Phi, \forall x \in C([0, T]; X), \tag{4.21}$$

trong đó $L_\Phi, M_\Phi > 0$.

Chứng minh. Sử dụng giả thiết (**B**), (**H**), Bổ đề 4.2, các ước lượng (4.12)-(4.13) và công thức (4.16), ta có

$$\begin{aligned}\|\Phi(x)(t_1) - \Phi(x)(t_2)\| &= |B(\mathbb{V}(x(t_1)) - B(\mathbb{V}(x(t_2))| \cdot |\mathcal{I}(\mathbb{V}x)| \cdot \|\mathcal{J}(x)\| \\ &\quad + \|h(x(t_1)) - h(x(t_2))\| \\ &\le \frac{L_B L_F}{m_B \eta_G \|\varphi\|_{L^1}} (K_J\|x\|_\infty + M_J)\|x(t_1) - x(t_2)\| + L_h\|x(t_1)) - x(t_2)\|.\end{aligned}$$

Từ đó ta thu được ước lượng (4.20) với

$$K_\Phi(r) = \frac{L_B L_F}{m_B \eta_G \|\varphi\|_{L^1}} (K_J r + M_J) + L_h.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\|\Phi(x)(t)\| &\le |B(\mathbb{V}(x(t))| \cdot |\mathcal{I}(\mathbb{V}x)| \cdot \|\mathcal{J}(x)\| + \|h(x(t))\| \\ &\le \frac{M_B}{m_B\|\varphi\|_{L^1}} (K_J\|x\|_\infty + M_J) + L_h\|x(t)\| + \|h(0)\|.\end{aligned}$$

Do đó

$$\|\Phi(x)\|_\infty \leq L_\Phi \|x\|_\infty + M_\Phi,$$

trong đó

$$L_\Phi = \frac{M_B K_J}{m_B \|\varphi\|_{L^1}} + L_h, \tag{4.22}$$

$$M_\Phi = \frac{M_B M_J}{m_B \|\varphi\|_{L^1}} + \|h(0)\|. \tag{4.23}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Định lí 4.1. *Giả sử* (**A**), (**B**), (**F**), (**G**) *và* (**H**) *được thoả mãn. Nếu* $x \in C([0,T];X)$ *là một nghiệm tích phân của* (4.17)-(4.18) *với* $\xi \in D(A)$ *thì ánh xạ* $t \mapsto x(t)$ *liên tục Hölder trên* $[0,T]$.

Chứng minh. Cố định $\tau \in (0,T)$ và $t \in [0, T-\tau]$. Ta có

$$x(t) = \mathcal{S}_\alpha(t)\xi + \int_0^t s^{\alpha-1}\mathcal{P}_\alpha(s)\Phi(x)(t-s)ds.$$

Từ đây, ta có

$$\begin{aligned}
\|x(t+\tau) - x(t)\| &\leq \|\mathcal{S}_\alpha(t+\tau)\xi - \mathcal{S}_\alpha(t)\xi\| \\
&\quad + \|\int_t^{t+\tau} s^{\alpha-1}\mathcal{P}_\alpha(s)\Phi(x)(t+\tau-s)ds\| \\
&\quad + \|\int_0^t s^{\alpha-1}\mathcal{P}_\alpha(s)[\Phi(x)(t+\tau-s) - \Phi(x)(t-s)]ds\| \\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Cố định $\eta \in (0,1)$ và sử dụng Bổ đề 1.1, ta có đánh giá sau cho I_1

$$\begin{aligned}
I_1 &= \|\int_t^{t+\tau} \frac{d}{ds}\mathcal{S}_\alpha(s)\xi ds\| \\
&= \|\int_t^{t+\tau} s^{\alpha-1}(-A)\mathcal{P}_\alpha(s)\xi\| = \|\int_t^{t+\tau} s^{\alpha-1}(-A)^\eta\mathcal{P}_\alpha(s)(-A)^{1-\eta}\xi\|
\end{aligned}$$

$$\leq \|(-A)^{1-\eta}\xi\| \int_t^{t+\tau} s^{\alpha-1}\|(-A)^{\eta}\mathcal{P}_\alpha(s)\|ds$$
$$\leq C\|(-A)^{1-\eta}\xi\| \int_t^{t+\tau} s^{\alpha(1-\eta)-1}ds \leq C\tau^{\alpha(1-\eta)},$$

ở đây C là hằng số chung.

Xét I_2, sử dụng Bổ đề 1.1 và Bổ đề 4.4 ta có

$$I_2 \leq \int_t^{t+\tau} s^{\alpha-1}\|\mathcal{P}_\alpha(s)\|_{op}\|\Phi(x)(t+\tau-s)\|ds$$
$$\leq \frac{L_\Phi r + M_\Phi}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{t+\tau} s^{\alpha-1}ds \leq C\tau^\alpha,$$

trong đó $r = \|x\|_\infty$. Cuối cùng ta ước lượng cho I_3. Theo Bổ đề 4.4, ta có

$$I_3 \leq \frac{K_\Phi(r)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t s^{\alpha-1}\|x(t+\tau-s)-x(t-s)\|ds$$
$$\leq C\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|x(s+\tau)-x(s)\|ds.$$

Sử dụng các ước lượng $I_i, i = 1,2,3$ trong (4.24), chúng ta có

$$\|x(t+\tau)-x(t)\| \leq C\tau^{\alpha(1-\eta)} + C\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|x(s+\tau)-x(s)\|ds.$$

Từ đây áp dụng Bổ đề 1.4 ta nhận được

$$\|x(t+\tau)-x(t)\| \leq C\tau^{\alpha(1-\eta)}.$$

Định lí được chứng minh. □

Hệ quả 4.1. *Nếu các giả thiết của Định lí 4.1 được thoả mãn thì mọi nghiệm tích phân của* (4.17)-(4.18) *đều là nghiệm cổ điển.*

Chứng minh. Giả sử $x \in C([0,T];X)$ là một nghiệm tích phân của (4.17)-(4.18). Theo Bổ đề 4.4 và Định lí 4.1 hàm $f(t) = \Phi(x)(t)$ liên tục Hölder. Do đó, theo Bổ đề 1.2, x là nghiệm cổ điển của (4.17)-(4.18). □

Với mỗi $y \in C([0,T];X)$, đặt

$$\Phi_y(\zeta) = B(\mathbb{V}(\zeta))\mathcal{I}(\mathbb{V}y)\mathcal{J}(y) + h(\zeta),\ \zeta \in X. \tag{4.25}$$

Xét bài toán phi tuyến không địa phương

$$D_0^\alpha x(t) = Ax(t) + \Phi_y(x(t)), t \in (0,T], \tag{4.26}$$

$$x(0) = \xi. \tag{4.27}$$

Kí hiệu

$$C_\xi([0,T];X) = \{x \in C([0,T];X) : x(0) = \xi\}.$$

Ta thu được kết quả phụ trợ sau.

Mệnh đề 4.1. *Giả sử rằng* (**A**), (**B**), (**F**), (**G**) *và* (**H**) *được thoả mãn. Khi đó với mỗi $y \in C_\xi([0,T];X)$, tồn tại duy nhất nghiệm tích phân x của bài toán* (4.26)-(4.27)*. Thêm vào đó ánh xạ*

$$\Sigma : C_\xi([0,T];X) \to C_\xi([0,T];X)$$

cho bởi $\Sigma(y) = x$, liên tục.

Chứng minh. Để chứng minh phần đầu của Mệnh đề 4.1 chúng ta sử dụng nguyên lí ánh xạ co. Thật vậy, xét Π là toán tử xác định trên $C_\xi([0,T];X)$ cho bởi công thức

$$\Pi(x)(t) = \mathcal{S}_\alpha(t)\xi + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{P}_\alpha(t-s)\Phi_y(x(s))ds.$$

Trong $C_\xi([0,T];X)$, chúng ta xét chuẩn tương đương dạng

$$\|x\|_\sigma = \sup_{t\in[0,T]} e^{-\sigma t}\|x(t)\|,$$

với $\sigma > 0$ sẽ được chọn sau. Khi đó sử dụng (**B**), (**H**) và Bổ đề 4.2 ta có

$$\|\Pi(x_1)(t) - \Pi(x_2)(t)\| \le \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_{op}\|\Phi_y(x_1(s)) - \Phi_y(x_2(s))\|ds$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{L_B L_F L_y}{\eta_G} + L_h\right)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|x_1(s)-x_2(s)\|ds,$$

trong đó $L_y = |\mathcal{I}(\mathbb{V}y)|\|\mathcal{J}(y)\|$. Từ đây suy ra

$$\|\Pi(x_1)-\Pi(x_2)\|_\sigma \leq L_\sigma\|x_1-x_2\|_\sigma,$$

trong đó

$$\begin{aligned}
L_\sigma &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{L_B L_F L_y}{\eta_G} + L_h\right)\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{-\sigma(t-s)}ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{L_B L_F L_y}{\eta_G} + L_h\right)\int_0^T t^{\alpha-1}e^{-\sigma t}dt \\
&\leq \left(\frac{L_B L_F L_y}{\eta_G} + L_h\right)\sigma^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Chọn $\sigma > 0$ sao cho $L_\sigma < 1$, Π là ánh xạ co và do đó Π có duy nhất điểm bất động. Điểm bất động của Π là nghiệm tích phân của (4.26)-(4.27).

Bây giờ, ta chứng minh khẳng định thứ hai. Giả sử $y_i \in C_\xi([0,T];X)$ sao cho $\|y_i\|_\infty \leq r, i = 1,2$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\|\Phi_{y_1}(\zeta_1)-\Phi_{y_2}(\zeta_2)\| &= \|B(\mathbb{V}(\zeta_1))\mathcal{I}(\mathbb{V}y_1)\mathcal{J}(y_1) - B(\mathbb{V}(\zeta_2))\mathcal{I}(\mathbb{V}y_2)\mathcal{J}(y_2)\| \\
&\quad + \|h(\zeta_1)-h(\zeta_2)\| \\
&\leq |B(\mathbb{V}(\zeta_1)) - B(\mathbb{V}(\zeta_2))|\|\mathcal{I}(\mathbb{V}y_1)\mathcal{J}(y_1)\| \\
&\quad + |B(\mathbb{V}(\zeta_2))||\mathcal{I}(\mathbb{V}y_1)|\|\mathcal{J}(y_1)-\mathcal{J}(y_2)\| \\
&\quad + |B(\mathbb{V}(\zeta_2))|\|\mathcal{J}(y_2)\||\mathcal{I}(\mathbb{V}y_1)-\mathcal{I}(\mathbb{V}y_2)| \\
&\quad + \|h(\zeta_1)-h(\zeta_2)\| \\
&= E_1 + E_2 + E_3 + E_4.
\end{aligned}$$

Tiếp theo chúng ta dẫn ra các ước lượng cho $E_i, i = 1,2,3,4$. Sử dụng (**B**), Bổ đề 4.2 và (4.13) ta nhận được

$$E_1 \leq \frac{(K_J r + M_J)L_B L_F}{m_B \eta_G \|\varphi\|_{L^1}}\|\zeta_1-\zeta_2\|.$$

Theo (**B**), (**H**), (4.11) và (4.12) ta có đánh giá

$$\begin{aligned}
E_2 &\le \frac{M_B}{m_B\|\varphi\|_{L^1}}\|\mathcal{J}(y_1)-\mathcal{J}(y_2)\|\\
&\le \frac{M_B}{m_B\|\varphi\|_{L^1}}\left(\|\Lambda y_1-\Lambda y_2\| + \int_0^T |\varphi(t)|\|h(y_1(t))-h(y_2(t))\|dt\right)\\
&\le \frac{M_B}{m_B\|\varphi\|_{L^1}}\left(L_\varphi\|y_1-y_2\|_\infty + L_h\|\varphi\|_{L^1}\|y_1-y_2\|_\infty\right)\\
&= \frac{M_BK_J}{m_B\|\varphi\|_{L^1}}\|y_1-y_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Với E_3, ta có

$$\begin{aligned}
E_3 &\le M_B(K_Jr+M_J)|\mathcal{I}(\mathbb{V}y_1)-\mathcal{I}(\mathbb{V}y_2)|\\
&\le \frac{M_B(K_Jr+M_J)}{m_B^2\|\varphi\|_{L^1}^2}\int_0^T |\varphi(t)||B(\mathbb{V}y_1(t))-B(\mathbb{V}y_2(t))|dt\\
&\le \frac{M_BL_BL_F(K_Jr+M_J)}{m_B^2\eta_G\|\varphi\|_{L^1}}\|y_1-y_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Rõ ràng, theo giả thiết (**H**), $E_4 \le L_h\|\zeta_1-\zeta_2\|$. Do vậy

$$\|\Phi_{y_1}(\zeta_1)-\Phi_{y_2}(\zeta_2)\| \le C_1(r)\|\zeta_1-\zeta_2\| + C_2(r)\|y_1-y_2\|_\infty, \tag{4.28}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
C_1(r) &= \frac{(K_Jr+M_J)L_BL_F}{m_B\eta_G\|\varphi\|_{L^1}} + L_h,\\
C_2(r) &= \frac{M_BK_J}{m_B\|\varphi\|_{L^1}} + \frac{M_BL_BL_F(K_Jr+M_J)}{m_B^2\eta_G\|\varphi\|_{L^1}}.
\end{aligned}$$

Đặt $x_i = \Sigma(y_i), i = 1, 2$. Khi đó sử dụng (4.28) với bất kì $t \in [0, T]$, ta có

$$\begin{aligned}
\|x_1(t)-x_2(t)\| &\le \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_{op}\|\Phi_{y_1}(x_1(s))-\Phi_{y_2}(x_2(s))\|ds\\
&\le \frac{C_1(r)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|x_1(s)-x_2(s)\|ds\\
&\quad + \frac{C_2(r)}{\Gamma(\alpha)}\|y_1-y_2\|_\infty\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds
\end{aligned}$$

$$= \frac{t^\alpha C_2(r)}{\Gamma(\alpha+1)}\|y_1 - y_2\|_\infty + \frac{C_1(r)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|x_1(s) - x_2(s)\|ds.$$

Từ đây, theo Bổ đề 1.4, ta có

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \le \frac{t^\alpha C_2(r)}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\alpha,1}(C_1(r)t^\alpha)\|y_1 - y_2\|_\infty, \ \forall t \in [0,T].$$

Bất đẳng thức cuối khẳng định Σ là ánh xạ liên tục. Mệnh đề được chứng minh. □

Tiếp theo chúng tôi phát biểu kết quả chính của phần này.

Định lí 4.2. *Giả sử các giả thiết trong Định lí 4.1 được thoả mãn. Khi đó, nếu*

$$\frac{M_B(L_\varphi + L_h\|\varphi\|_{L^1})}{m_B\|\varphi\|_{L^1}} + L_h < \beta, \tag{4.29}$$

trong đó L_φ được cho bởi (4.8) *thì bài toán* (**FrIP**) *có nghiệm.*

Chứng minh. Chú ý rằng nếu x là điểm bất động của ánh xạ Σ được xác định trong Mệnh đề 4.1, thì x là nghiệm của (4.17)-(4.18). Do đo ta cần chứng minh Σ có điểm bất động trong $C_\xi([0,T];X)$. Để chứng minh khẳng định này, chúng ta sử dụng định lí điểm bất động Schauder.

Bước 1. Trước hết ta chứng minh $\Sigma(B_r) \subset B_r$ với $r > 0$, trong đó B_r là hình cầu đóng tâm tại điểm gốc, bán kính r. Đặt $x = \Sigma(y)$, thì

$$\|x(t)\| \le \|\mathcal{S}_\alpha(t)\xi\| + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_{op}\|\Phi_y(x(s))\|ds, \ t \in [0,T].$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}\|\Phi_y(x(t))\| &\le |B(\mathbb{V}(x(t)))||\mathcal{I}(\mathbb{V}y)|\|\mathcal{J}(y)\| + \|h(x(t))\| \\ &\le \frac{M_B}{m_B\|\varphi\|_{L^1}}(K_J\|y\|_\infty + M_J) + L_h\|x(t)\| + \|h(0)\|, \end{aligned} \tag{4.30}$$

và

$$\|\mathcal{S}_\alpha(t)\|_{op} \le E_{\alpha,1}(-\beta t^\alpha),\ \|\mathcal{P}_\alpha(t)\|_{op} \le E_{\alpha,\alpha}(-\beta t^\alpha),\ \forall t \ge 0,$$

ta thu được

$$\|x(t)\| \le E_{\alpha,1}(-\beta t^\alpha)\|\xi\| + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\beta(t-s)^\alpha)(L_h\|x(s)\| + \kappa)ds,$$

trong đó

$$\kappa = \frac{M_B K_J}{m_B\|\varphi\|_{L^1}}\|y\|_\infty + \frac{M_B M_J}{m_B\|\varphi\|_{L^1}} + \|h(0)\|.$$

Vì $L_h < \beta$, nên từ Bổ đề 1.3 ta có

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\le E_{\alpha,1}(-(\beta - L_h)t^\alpha)\|\xi\| + \frac{\kappa}{\beta - L_h}[1 - E_{\alpha,1}(-(\beta - L_h)t^\alpha)]\\ &\le E_{\alpha,1}(-(\beta - L_h)t^\alpha)\|\xi\| + \frac{\kappa}{\beta - L_h}\\ &\le D_1\|y\|_\infty + D_2, \forall t \in [0,T],\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}D_1 &= \frac{M_B K_J}{m_B\|\varphi\|_{L^1}(\beta - L_h)},\\ D_2 &= \|\xi\| + \left(\frac{M_B M_J}{m_B\|\varphi\|_{L^1}} + \|h(0)\|\right)\frac{1}{\beta - L_h}.\end{aligned}$$

Theo (4.29), $D_1 < 1$. Vì vậy nếu $y \in B_r$ thì

$$\|x(t)\| \le D_1 r + D_2 \le r,\ \forall t \in [0,T],$$

nếu r được chọn đủ lớn. Nghĩa là, $\Sigma(y) \in B_r$.

Bước 2. Xét $\Sigma : B_r \to B_r$. Chúng ta chứng minh Σ là toán tử compact. Ta có

$$\Sigma(y) = \mathcal{S}_\alpha(\cdot)\xi + Q_\alpha \circ \Phi_y(\Sigma(y)), \tag{4.31}$$

trong đó

$$Q_\alpha(x)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{P}_\alpha(t-s)x(s)ds,\ x \in C([0,T];X).$$

Theo (4.30), ta có

$$\begin{aligned}\|\Phi_y(\Sigma(y)(t))\| &\le \frac{M_B}{m_B\|\varphi\|_{L^1}}(K_J r + M_J) + L_h\|\Sigma(y)(t)\| + \|h(0)\| \\ &\le \frac{M_B}{m_B\|\varphi\|_{L^1}}(K_J r + M_J) + L_h r + \|h(0)\|.\end{aligned}$$

Vì $\Phi_y(\Sigma(y)) \in B_R$ với $R = \dfrac{M_B}{m_B\|\varphi\|_{L^1}}(K_J r + M_J) + L_h r + \|h(0)\|$.

Sử dụng [6, Proposition 2.5], ta nhận được $Q_\alpha(B_R)$ là tập liên tục đồng bậc. Mặt khác, giả sử χ là độ đo không compact Hausdorff trên X (xem [39]). Vì với mỗi $t \in (0, T]$, $\mathcal{P}_\alpha(t)$ là toán tử compact nên theo [43, Mệnh đề 2.5], ta có

$$\chi(Q_\alpha(B_R)(t)) \le 4\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\chi(\mathcal{P}_\alpha(t-s)B_R(s))ds = 0.$$

Từ đây $Q_\alpha(B_R)(t)$ là tập compact tương đối với mọi $t \in [0, T]$. Do đó, theo định lí Arzelà-Ascoli, $Q_\alpha(B_R)$ là tập compact tương đối. Do

$$\Sigma(B_r) \subset \mathcal{S}_\alpha(\cdot)\xi + Q_\alpha(B_R),$$

ta nhận được $\Sigma(B_r)$ cũng là tập compact tương đối. Định lí được chứng minh. □

4.3. Tính duy nhất và tính ổn định

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu ánh xạ $(\xi, \psi) \mapsto (x, u, z)$, trong đó (x, u, z) là nghiệm của (**FrIP**) ứng với dữ kiện (ξ, ψ). Chúng tôi chỉ ra ánh xạ trên là ánh xạ liên tục Lipschitz từ $X \times D(A)$ tới $C([0, T]; X) \times \mathcal{U}_{ad} \times X$. Vì $u = \mathbb{V}x$ và $\mathbb{V}$ Lipschitz nên ta nghiên cứu ánh xạ $(\xi, \psi) \mapsto (x, z)$. Nhắc lại rằng $D(A)$ là không gian Banach với chuẩn đồ thị $\|\psi\|_{D(A)} = \|\psi\| + \|A\psi\|$ với $\psi \in D(A)$.

Bổ đề 4.5. *Giả sử các giả thiết* (**A**), (**B**), (**F**), (**G**), (**H**), *và* (4.29) *được thoả mãn. Kí hiệu* (x, u, z) *là nghiệm của* (**FrIP**) *tương ứng với cặp* (ξ, ψ). *Khi đó tồn tại* $\rho_0 = \rho_0(\xi, \psi) > 0$ *sao cho* $\|x\|_\infty \le \rho_0$. *Hơn nữa, nếu* $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{z})$ *là một nghiệm khác của* (**FrIP**) *ứng với* $(\hat{\xi}, \hat{\psi})$, *thì tồn tại các số dương* δ *và* $\rho = \rho(\xi, \psi, \hat{\xi}, \hat{\psi})$ *sao cho*

$$\|x - \hat{x}\|_\infty \le \rho \left(\|\xi - \hat{\xi}\| + \|\psi - \hat{\psi}\|_{D(A)} \right),$$

nếu $L_F < \delta$.

Chứng minh. Theo giả sử, x là nghiệm của (4.17)-(4.18). Vì vậy

$$\|x(t)\| \le \|\mathcal{S}_\alpha(t)\|_{op}\|\xi\| + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_{op}\|\Phi(x)(s)\|ds.$$

Lập luận tương tự như trong chứng minh của Bổ đề 4.4, chúng ta có

$$\begin{aligned}\|\Phi(x)(t)\| &\le \frac{M_B K_J}{m_B\|\varphi\|_{L^1}}\|x\|_\infty + L_h\|x(t)\| + \frac{M_B M_J}{m_B\|\varphi\|_{L^1}} + \|h(0)\| \\ &= L_h\|x(t)\| + \kappa,\ \forall t \in [0, T],\end{aligned}$$

trong đó

$$\kappa = \frac{M_B K_J}{m_B\|\varphi\|_{L^1}}\|x\|_\infty + \frac{M_B M_J}{m_B\|\varphi\|_{L^1}} + \|h(0)\|.$$

Tương tự như trong chứng minh của Định lí 4.2, chúng ta có

$$\|x(t)\| \le E_{\alpha,1}(-(\beta - L_h)t^\alpha)\|\xi\| + \frac{\kappa}{\beta - L_h},\ \forall t \in [0, T].$$

Suy ra

$$\left(1 - \frac{M_B K_J}{m_B\|\varphi\|_{L^1}(\beta - L_h)}\right)\|x\|_\infty \le \|\xi\| + \frac{1}{\beta - L_h}\left(\frac{M_B M_J}{m_B\|\varphi\|_{L^1}} + \|h(0)\|\right).$$

Theo (4.29), $q := 1 - \dfrac{M_B K_J}{m_B\|\varphi\|_{L^1}(\beta - L_h)} > 0$. Vì thế ta có

$$\|x\|_\infty \le \rho_0 := \frac{\|\xi\|}{q} + \frac{1}{q(\beta - L_h)}\left(\frac{M_B M_J}{m_B\|\varphi\|_{L^1}} + \|h(0)\|\right).$$

Giả sử $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{z})$ là một nghiệm khác của (**FrIP**) tương ứng với $(\hat{\xi}, \hat{\psi})$, thì

$$\begin{aligned}\|x(t) - \hat{x}(t)\| &\le \|\mathcal{S}_\alpha(t)\|_{op}\|\xi - \hat{\xi}\| + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_{op}\|\Phi(x)(s) - \Phi(\hat{x})(s)\|ds \\ &\le E_{\alpha,1}(-\beta t^\alpha)\|\xi - \hat{\xi}\| \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\beta(t-s)^\alpha)\|\Phi(x)(s) - \Phi(\hat{x})(s)\|ds. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Ước lượng tương tự như trong Mệnh đề 4.1, chúng ta có

$$\begin{aligned}\|\Phi(x)(t) - \Phi(\hat{x})(t)\| &\le |B(\mathbb{V}(x(t))) - B(\mathbb{V}(\hat{x}(t)))|\|\mathcal{I}(\mathbb{V}x)\mathcal{J}(x)\| \\ &\quad + |B(\mathbb{V}(\hat{x}(t)))||\mathcal{I}(\mathbb{V}x)|\|\mathcal{J}(x) - \mathcal{J}(\hat{x})\| \\ &\quad + |B(\mathbb{V}(\hat{x}(t)))|\|\mathcal{J}(\hat{x})\||\mathcal{I}(\mathbb{V}x) - \mathcal{I}(\mathbb{V}\hat{x})| \\ &\quad + \|h(x(t)) - h(\hat{x}(t))\| \\ &= E_1 + E_2 + E_3 + E_4,\ t \in [0, T],\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} E_1 &\le \frac{(K_J\rho_0 + M_J)L_B L_F}{m_B\eta_G\|\varphi\|_{L^1}}\|x(t) - \hat{x}(t)\|, \\ E_3 &\le \frac{M_B L_B L_F(K_J\rho_0 + \hat{M}_J)}{m_B^2\eta_G\|\varphi\|_{L^1}}\|x - \hat{x}\|_\infty, \\ E_4 &\le L_h\|x(t) - \hat{x}(t)\|,\end{aligned}$$

với $\hat{M}_J = L_\varphi\|\hat{\xi}\| + \|A\hat{\psi}\| + \|h(0)\|\|\varphi\|_{L^1}$. Xét E_2, sử dụng (4.11) ta có

$$\begin{aligned}\|\mathcal{J}(x) - \mathcal{J}(\hat{x})\| &\le \|\Lambda x - \Lambda\hat{x}\| + \|A\psi - A\hat{\psi}\| \\ &\quad + \int_0^T |\varphi(t)|\|h(x(t)) - h(\hat{x}(t))\|dt \\ &\le L_\varphi(\|x - \hat{x}\|_\infty + \|\xi - \hat{\xi}\|) + \|A\psi - A\hat{\psi}\| \\ &\quad + L_h\|\varphi\|_{L^1}\|x - \hat{x}\|_\infty\end{aligned}$$

$$= K_J\|x-\hat{x}\|_\infty + L_\varphi\|\xi-\hat{\xi}\| + \|A\psi - A\hat{\psi}\|.$$

Do đó

$$E_2 \le \frac{M_B}{m_B\|\varphi\|_{L^1}}(K_J\|x-\hat{x}\|_\infty + L_\varphi\|\xi-\hat{\xi}\| + \|A\psi - A\hat{\psi}\|).$$

Từ các đánh giá trên ta thu được

$$\begin{aligned}\|\Phi(x)(t)-\Phi(\hat{x})(t)\| \le C_1\|x(t)-\hat{x}(t)\| + C_2\|x-\hat{x}\|_\infty\\ + C_3\|\xi-\hat{\xi}\| + C_4\|A\psi - A\hat{\psi}\|,\end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{(K_J\rho_0+M_J)L_BL_F}{m_B\eta_G\|\varphi\|_{L^1}} + L_h,\\ C_2 &= \frac{M_BK_J}{m_B\|\varphi\|_{L^1}} + \frac{M_BL_BL_F(K_J\rho_0+\hat{M}_J)}{m_B^2\eta_G\|\varphi\|_{L^1}},\\ C_3 &= \frac{M_BL_\varphi}{m_B\|\varphi\|_{L^1}},\ C_4 = \frac{M_B}{m_B\|\varphi\|_{L^1}}.\end{aligned}$$

Thế ước lượng cuối vào (4.32), ta có

$$\begin{aligned}\|x(t)-\hat{x}(t)\| &\le E_{\alpha,1}(-\beta t^\alpha)\|\xi-\hat{\xi}\|\\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\beta(t-s)^\alpha)(C_1\|x(s)-\hat{x}(s)\|+\vartheta)ds,\end{aligned}$$

trong đó $\vartheta = C_2\|x-\hat{x}\|_\infty + C_3\|\xi-\hat{\xi}\| + C_4\|A\psi - A\hat{\psi}\|$. Theo (4.29), chúng ta tìm được một số $\delta > 0$ sao cho $C_1 < \beta$ và $C_2 < \beta - C_1$ với bất kì $L_F \in (0,\delta)$. Sử dụng Bổ đề 1.3 ta có

$$\|x(t)-\hat{x}(t)\| \le E_{\alpha,1}(-(\beta-C_1)t^\alpha)\|\xi-\hat{\xi}\| + \frac{\vartheta}{\beta-C_1}.$$

Từ đây ta có

$$\left(1-\frac{C_2}{\beta-C_1}\right)\|x-\hat{x}\|_\infty \le \left(1+\frac{C_3}{\beta-C_1}\right)\|\xi-\hat{\xi}\| + \frac{C_4}{\beta-C_1}\|A\psi - A\hat{\psi}\|.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Định lí 4.3. *Nếu các giả thiết của Bổ đề 4.5 được thoả mãn thì với mỗi (ξ, ψ) bài toán* (**FrIP**) *có duy nhất nghiệm. Hơn nữa ánh xạ nghiệm $(\xi, \psi) \to (x, u, z)$ liên tục Lipschitz địa phương từ $X \times D(A)$ tới $C([0, T]; X) \times C([0, T]; \mathcal{U}) \times X$.*

Chứng minh. Vì ánh xạ $\mathbb{V}(\cdot)$ liên tục Lipschitz và ánh xạ $z = \mathcal{I}(\mathbb{V}x)\mathcal{J}(x)$ Lipschitz địa phương nên kết luận của Định lí 4.3 được suy ra từ Bổ đề 4.5. $\square$

4.4. Áp dụng

Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, với biên $\partial\Omega$ trơn. Giả sử $\varrho \in H^2(\Omega)$ là một hàm không âm. Kí hiệu

$$\mathcal{K} := \{v \in L^2(\Omega) : v(x) \geq \varrho(x) \text{ với hầu khắp } x \in \Omega\}.$$

Xét bài toán: tìm $z \in L^2(\Omega)$ và $Y, u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ thoả mãn

$$\partial_t^\alpha Y(t, x) = \Delta_x Y(t, x) + z(x) \int_\Omega Q(y, u(t, y))dy + \tilde{h}(x, Y(t, x)), x \in \Omega, \tag{4.33}$$

$$-\Delta_x u(t, x) + W(u(t, x) - \varrho(x)) \ni f(x, Y(t, x)), x \in \Omega, \tag{4.34}$$

$$Y(t, x) = u(t, x) = 0, x \in \partial\Omega, \tag{4.35}$$

$$Y(0, x) = \xi(x),\ x \in \Omega, \tag{4.36}$$

và điều kiện đo

$$\frac{1}{T} \int_0^T Y(t, x)\, dt = \psi(x), x \in \Omega, \tag{4.37}$$

trong đó ∂_t^α là đạo hàm phân thứ Caputo cấp α theo biến thời gian t, $W : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ là ánh xạ đơn điệu cực đại,

$$W(r) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } r > 0, \\ \mathbb{R}^- & \text{nếu } r = 0, \\ \emptyset & \text{nếu } r < 0. \end{cases}$$

Rõ ràng, hàm $\varphi(t) = T^{-1}$ là hàm khả vi, không âm trên $[0, T]$, $\xi, \psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, các hàm $Q, \tilde{h}$ và f sẽ được mô tả sau.

Đặt $X = \mathcal{U} = L^2(\Omega)$. Chuẩn trong X và $\mathcal{U}$ cho bởi

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx.$$

Xét hàm

$$\begin{aligned} &B : \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \\ &B(v) = \int_\Omega Q(y, v(y)) dy. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Khi đó (4.33) được biểu diễn dưới dạng

$$\partial_t^\alpha Y(t) = AY(t) + B(u(t))z + h(Y(t)), t \in [0, T],$$

trong đó $A = \Delta, D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), Y(t) \in X, u(t) \in \mathcal{U}$ sao cho $Y(t)(x) = Y(t, x), u(t)(x) = u(t, x)$, và $h : X \to X$ xác định bởi

$$h(v)(x) = \tilde{h}(x, v(x)), \ x \in \Omega. \tag{4.39}$$

Do Định lí 7.2.5 và Định lí 7.2.8 trong [84], A là toán tử sinh của một nửa nhóm giải tích, compact $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ trên X. Hơn nữa

$$\|S(t)\| \leq e^{-\lambda_1 t}, \ \forall t \geq 0,$$

trong đó λ_1 cho bởi công thức $\lambda_1 = \sup_{\|u\|=1} \|\nabla u\| > 0$.

Xét (4.34). Đặt $G = -\Delta$, trong đó $-\Delta$ là toán tử Laplace xác định bởi

$$\langle -\Delta u, v \rangle := \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx, \ \text{ với mọi } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Khi đó $\langle Gu, u\rangle = \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \geq \lambda_1\|u\|^2$. Vì thế giả thiết (**G**) thoả mãn với $\eta_G = \lambda_1$.

Xét ánh xạ $F : X \to X$ được xác định bởi

$$F(v)(x) = f(x, v(x)),\ x \in \Omega. \tag{4.40}$$

Lập luận tương tự như [10, Proposition 2.11], bao hàm thức (4.34) được viết dưới dạng

$$-\Delta u(t) + \partial I_{\mathcal{K}}(u(t)) \ni F(Y(t)),$$

trong đó

$$\begin{aligned}\partial I_{\mathcal{K}}(u) &= \{v \in L^2(\Omega) : \int_\Omega v(x)(u(x) - z(x))\,dx \geq 0, \forall z \in \mathcal{K}\}\\ &= \{v \in L^2(\Omega) : v(x) \in W(u(x) - \varrho(x)),\ \text{với hầu khắp } x \in \Omega\}.\end{aligned}$$

Giả sử rằng các hàm phi tuyến Q, $\tilde{h}$ và f xuất hiện trong phương trình (4.33)-(4.34) là các hàm Carathéodory xác định trên $\Omega \times \mathbb{R}$ và tồn tại các hàm không âm $p \in L^1(\Omega)$, $q, k, \ell \in L^2(\Omega)$ sao cho

(N1) Hàm $Q(x, \cdot)$ không giảm và

$$Q(x, r) \leq p(x),\ \forall (x, r) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

(N2) $|Q(x, r) - Q(x, s)| \leq q(x)|r - s|, \forall (x, r) \in \Omega \times \mathbb{R}$,

(N3) $|\tilde{h}(x, r) - \tilde{h}(x, s)| \leq k(x)|r - s|, \forall (x, r) \in \Omega \times \mathbb{R}$,

(N4) $|f(x, r) - f(x, s)| \leq \ell(x)|r - s|, \forall (x, r) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Khi đó từ (N1)-(N2) hàm B cho bởi (4.38) thoả mãn các ước lượng sau

$$\begin{aligned}B(v) &\leq M_B := \int_\Omega p(x)dx,\ \forall v \in X\\ B(v) &\geq m_B := \int_\Omega Q(y, \varrho(y))dy,\ \forall v \in \mathcal{K},\\ |B(v_1) - B(v_2)| &\leq L_B\|v_1 - v_2\|,\ \forall v_1, v_2 \in X,\end{aligned}$$

trong đó $L_B = \|q\|$. Do đó giả thiết (**B**) được thoả mãn nếu $m_B > 0$.

Sử dụng (N3), ta thấy hàm h cho bởi (4.39) liên tục Lipschitz

$$\|h(v_1) - h(v_2)\| \le L_h \|v_1 - v_2\|, \ \forall v_1, v_2 \in X,$$

trong đó $L_h = \|k\|$. Tương tự, theo (N4), hàm F được xác định bởi (4.40) là hàm Lipschitz với hệ số $L_F = \|\ell\|$. Do đó các giả thiết (**H**) và (**F**) được thoả mãn. Theo Định lí 4.2 và Định lí 4.3, chúng tôi thu được kết quả sau.

Định lí 4.4. *Giả sử* (N1)-(N4) *được thoả mãn. Khi đó bài toán* (4.33)-(4.37) *có duy nhất nghiệm và ánh xạ nghiệm* $(\xi, \psi) \mapsto (Y, u, z)$ *Lipschitz địa phương từ* $X \times D(A)$ *tới* $C([0,T]; X) \times C([0,T]; X) \times X$, *nếu*

$$M_B(T^{-\alpha}\Gamma(2-\alpha)^{-1} + \|k\|) + m_B\|k\| < \lambda_1 m_B,$$

và $\|\ell\|$ *đủ nhỏ.*

Nhận xét 4.1. Chú ý rằng, hệ (4.33)-(4.36) là hệ parabolic-elliptic suy rộng. Nếu ta chọn $\mathcal{K} = L^2(\Omega)$, thì $\partial I_{\mathcal{K}}(u) = \{0\}$. Khi đó ràng buộc (4.34) viết lại ở dạng

$$u(t,x) = \mathbb{V}(Y)(t,x) = (-\Delta_x)^{-1} f(x, Y(t,x)).$$

Từ đó phương trình (4.33) trở thành

$$\partial_t^\alpha Y = \Delta Y + \mathcal{Q}(Y)z + h(Y).$$

Bài toán (**FrIP**) (4.33)-(4.37) trở thành bài toán xác định tham số trong phương trình dưới khuếch tán.

Kết luận chương

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán xác định tham số trong bất đẳng thức vi biến phân phân thứ. Các kết quả chính bao gồm:

1) Chứng minh được tính chính quy, liên tục Hölder, của ánh xạ $t \mapsto x(t)$, ở đó $x(t)$ là nghiệm tích phân của (**FrIP**) (Định lí 4.1).

2) Chứng minh được sự tồn tại nghiệm của bài toán (**FrIP**) (Định lí 4.2).

3) Chứng minh được tính duy nhất và tính ổn định Lipschitz của bài toán (**FrIP**) (Định lí 4.3).

4) Áp dụng kết quả thu được cho bài toán xác định tham số trong bất đẳng thức vi biến phân phân thứ xác lập bởi một ràng buộc phương trình dưới khuếch tán và một ràng buộc bất đẳng thức biến phân loại elliptic trên một miền bị chặn (Mục 4.4).

Theo hiểu biết của chúng tôi, đây là lần đầu tiên bài toán xác định tham số được khảo sát cho lớp bất đẳng thức vi biến phân phân thứ. Sử dụng tính chính quy nghiệm của phương trình dưới khuếch tán, chúng tôi thu được các kết quả về tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định của bài toán (**FrIP**) dưới giả thiết các hàm phi tuyến liên tục Lipschitz với hệ số đủ nhỏ.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu dáng điệu nghiệm của một số lớp NDE nửa tuyến tính: lớp phương trình dưới khuếch tán, lớp phương trình loại Basset và lớp phương trình loại Rayleigh-Stokes. Cụ thể, luận án đã đạt được các kết quả sau:

(a) Đối với lớp phương trình dưới khuếch tán và lớp phương trình loại Basset xác định trên khoảng thời gian bị chặn, nhận được:

- Kết quả về tính giải được với phần phi tuyến có tăng trưởng trên tuyến tính; Tính hút và hút mũ cho nghiệm tầm thường và nghiệm tuỳ ý.
- Áp dụng kết quả lí thuyết cho hai lớp phương trình đạo riêng trong miền bị chặn.

(b) Đối với phương trình loại Rayleigh-Stokes, nhận được:

- Sự tồn tại nghiệm trong trường hợp phần phi tuyến có tăng trưởng trên tuyến tính.
- Tính ổn định tiệm cận của nghiệm tầm thường; Sự tồn tại nghiệm phân rã.

(c) Đối với bài toán xác định tham số trong bất đẳng thức vi biến phân phân thứ, nhận được:

- Tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định Lipschitz.
- Áp dụng kết quả lí thuyết cho hệ parabolic-elliptic suy rộng trong miền bị chặn.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Đối với các lớp phương trình NDE đã xét trong luận án, ta có thể nghiên cứu thêm một số vấn đề sau đây:

- Nghiên cứu tính ổn định hoặc ổn định yếu khi xuất hiện số hạng trễ hoặc xung.
- Nghiên cứu sự tồn tại, tính ổn định của bài toán ngược: bài toán xác định tham số, bài toán giá trị cuối.
- Nghiên cứu tính chính quy nghiệm và sự hội tụ về điểm cân bằng.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. T.D. Ke, T.V. Tuan, (2018), Finite-time attractivity for semilinear fractional differential equations, *Results Math.*, 73:7, 19 pp.

2. T.V. Tuan, (2020), Short-time behavior for a class of semilinear nonlocal evolution equations in Hilbert spaces, *Appl. Anal. Optim.*, accepted.

3. T.D. Ke, T.V. Tuan, (2020), An identification problem involving fractional differential variational inequalities, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, doi: 10.1515/jiip-2017-0103, accepted.

4. T.D. Ke, T.V. Tuan, (2020), Stability analysis for a class of semilinear nonlocal evolution equations, *submitted.*

Tài liệu tham khảo

[1] R. Agarwal, S. Hristova, D. O'Regan, (2016), A survey of Lyapunov functions, stability and impulsive Caputo fractional differential equations, *Fract. Calc. Appl. Anal.* **19**, no. 2, 290-318.

[2] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, B.N. Sadovskii, (1992), *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin.

[3] B. Amaziane, L. Pankratov, A. Piatnitski, (2007), Homogenization of a single phase flow through a porous medium in a thin layer, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **17**, pp. 1317-1349.

[4] N.T.V. Anh, T.D. Ke, (2017), On the differential variational inequalities of parabolic-elliptic type, *Math. Methods Appl. Sci.* 40, 4683-4695.

[5] N.T. Anh, T.D. Ke, (2015), Decay integral solutions for neutral fractional differential equations with infinite delays, *Math. Methods Appl. Sci.* 38, 1601-1622.

[6] C.T. Anh, T.D. Ke, (2014), On nonlocal problems for retarded fractional differential equations in Banach spaces, *Fixed Point Theory* **15**, 373-392.

[7] W. Arendt, C.J. K. Batty, M. Hieber, F. Neubrander, (2011), *Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, Springer-Verlag, New York.

[8] W. Arendt, P. Bénilan, (1999), Wiener regularity and heat semigroups on spaces of continuous functions, in Topics in Nonlinear Analysis, *Progress in Nonlinear Differential Equations Application*, vol. 35 (Birkhauser, Basel), pp. 29-49.

[9] A. Ashyralyev, (2011), Well-posedness of the Basset problem in spaces of smooth functions, *Appl. Math. Lett.*, **24**, 1176-1180.

[10] V. Barbu, (2010), *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*, Springer, New York.

[11] E. Bajlekova (2001), *Fractional evolution equations in Banach spaces*, Ph.D. Thesis, Eindhoven University of Technology.

[12] E. Bazhlekova, I. Dimovski, (2014), Exact solution of two-term time-fractional Thornley's problem by operational method, *Integral Transforms Spec. Funct.*, **25**, 61-74.

[13] E. Bazhlekova, B. Jin, R. Lazarov, Z. Zhou, (2015), An analysis of the Rayleigh-Stokes problem for a generalized second-grade fluid, *Numer. Math.* 131, no. 1, 1-31.

[14] A. Berger, (2011), On finite-time hyperbolicity, *Commun. Pure Appl. Anal.* **10**, 963-981.

[15] A. Berger, D.T. Son, S. Siegmund, (2008), Nonautonomous finite-time dynamics, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, **9**, no. 3-4, 463-492.

[16] H. Brezis, (2011), *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York.

[17] P. Cannarsa, H. Frankowska, E. M. Marchini, (2013), Optimal control for evolution equations with memory, *J. Evol. Equ.* 13, no. 1, 197-227.

[18] C.M. Chen, F. Liu, K. Burrage, Y. Chen, (2013), Numerical methods of the variable-order Rayleigh–Stokes problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivative, *IMA J. Appl. Math.* 78, no. 5, 924-944.

[19] N.M. Chuong, T.D. Ke, N.N. Quan, (2014), Stability for a class of fractional partial integro-differential equations, *J. Integral Equations Appl.*, **26**, 145–170.

[20] P. Clément, J. A. Nohel, (1981), Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels, *SIAM J. Math. Anal.*, **12**, 514-535.

[21] N.D. Cong, D.T. Son, H.T. Tuan, (2014), On fractional Lyapunov exponent for solutions of linear fractional differential equations, *Fract. Calc. Appl. Anal.* **17**, 285-306.

[22] N.D. Cong, D.T. Son, S. Siegmund, H.T. Tuan, (2016), Linearized asymptotic stability for fractional differential equations, *Electron. J. Qual Theory Differ. Equ.* (39). pp. 1-13.

[23] M. Conti, Elsa M. Marchini, V. Pata, (2014), Reaction-diffusion with memory in the minimal state framework, *Trans. Amer. Math. Soc.* 366, no. 9, 4969-4986.

[24] P. Drábek, J. Milota, (2007), *Methods of Nonlinear Analysis. Applications to Differential Equations*, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, Basel.

[25] K.J. Engel, R. Nagel, (2000), *One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 194. Springer-Verlag, New York.

[26] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Second edition. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[27] P. Giesl, M. Rasmussen, (2012), Areas of attraction for nonautonomous differential equations on finite time intervals, *J. Math. Anal. Appl.* **390**, 27-46.

[28] G. Gripenberg, S.-O. Londen, O. Staffans, (1990), *Volterra Integral and Functional Equations*, Encycl. Math. Appl., vol. 34, Cambridge University Press, Cambridge.

[29] G. Haller, A.C. Poje, (1998), Finite time transport in aperiodic flows, *Phys. D* **119**, 352-380.

[30] A. Haraux, M.A. Jendoubi, (2015), *The convergence Problem for Dissipative Autonomous Systems. Classical methods and recent advances*, Springer, New York.

[31] R. Hilfer (edited), (2000), *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ.

[32] U. Hornung, R. Showalter, (1990), Diffusion models for fractured media, *J. Math. Anal. Appl.*, **147**, 69-80.

[33] W. Jäger, S. Luckhaus, (1992), On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis, *Trans. Amer. Math. Soc.* 329, 819-824.

[34] D. Jiang, Z. Li, Y. Liu, M. Yamamoto, (2017), Weak unique continuation property and a related inverse source problem for time-fractional diffusion-advection equations, *Inverse Problems* 33, 055013, 22 pp.

[35] B. Jin, W. Rundell, (2015), A tutorial on inverse problems for anomalous diffusion processes, *Inverse Problems* 31, 035003.

[36] Z. Jin, X. Yang, (2010), Weak solutions of a parabolic-elliptic type system for image inpainting, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 16, 1040-1052.

[37] B. Kaltenbacher, W. Rundell, (2019), On an inverse potential problem for a fractional reaction-diffusion equation, *Inverse Problems* 35, 065004.

[38] B. Kaltenbacher, W. Rundell, (2020), Recovery of multiple coefficients in a reaction-diffusion equation, *J. Math. Anal. Appl.* 481, 123475.

[39] M. Kamenskii, V. Obukhovskii, P. Zecca, (2001), *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications*, vol. 7, Berlin, New York.

[40] T. Kato, (1995), *Perturbation Theory for Linear Operators*, Reprint of the 1980 edition, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.

[41] T.D. Ke, D. Lan, (2014), Decay integral solutions for a class of impulsive fractional differential equations in Banach spaces, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 17:1, 96-121.

[42] T.D. Ke, N.V. Loi, V. Obukhovskii, (2015), Decay solutions for a class of fractional differential variational inequalities, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 18, 531-553.

[43] T.D. Ke, D. Lan, (2017), Fixed point approach for weakly asymptotic stability of fractional differential inclusions involving impulsive effects, *J. Fixed Point Theory Appl.* 19, no. 4, 2185–2208.

[44] T.D. Ke, N.N. Thang, L.T.P. Thuy, (2020), Regularity and stability analysis for a class of semilinear nonlocal differential equations in Hilbert spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 483, No. 2, 123655.

[45] J. Kemppainen, J. Siljander, V. Vergara, R. Zacher, (2016), Decay estimates for time-fractional and other non-local in time subdiffusion equations in R^d, *Math. Ann.* **366**, 941-979.

[46] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, (2006), *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204, Elsevier, Amsterdam.

[47] C.T. Kinh, L.V. Hien, T.D. Ke, (2016), Short-time behaviour analysis of fractional-order model of generalized pantograph-type neural networks, *Int. J. Comput. Math.*: CST 1:3-4, 113-128.

[48] M. Kirane, S.A. Malik, M.A. Al-Gwaiz, (2013), An inverse source problem for a two dimensional time fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions, *Math. Methods Appl. Sci.* 36, 1056-1069.

[49] V. Lakshmikantham, S. Leela, M. Sambandham, (2008), Lyapunov theory for fractional differential equations, *Commun. Appl. Anal.* **12**, 365-376.

[50] M.P. Lazarevic, A.M. Spasic, (2009), Finite-time stability analysis of fractional order time-delay systems: Gronwall's approach, *Math. Comput. Modelling* **49**, 475-481.

[51] M. Li, J.R. Wang, (2017), Finite time stability of fractional delay differential equations, *Appl. Math. Lett.* **64**, 170-176.

[52] C.P. Li, F.R. Zhang, (2011), A survey on the stability of fractional differential equations, *Eur. Phys. J. Special Topics* **193**, 27-47.

[53] J.-L. Lions, G. Stampacchia, (1967), Variational inequalities, *Commun. Pure Appl. Math.* 20, 493-519.

[54] Z. Liu, S. Migorski, S. Zeng, (2017), Partial differential variational inequalities involving nonlocal boundary conditions in Banach spaces, *J. Differential Equations* 263, no. 7, 3989–4006.

[55] Z. Liu, S. Zeng, D. Motreanu, (2018), Partial differential hemivariational inequalities, *Adv. Nonlinear Analysis*, 7, no. 4, 571–586.

[56] Z. Liu, S. Zeng, D. Motreanu, (2016), Evolutionary problems driven by variational inequalities, *J. Differential Equations* 260, 6787-6799.

[57] N.V. Loi, T.D. Ke, V. Obukhovskii, P. Zecca, (2016), Topological methods for some classes of differential variational inequalities, *J. Nonlinear Convex Anal.* 17, 403-419.

[58] A. Lorenzi, I. Vrabie, (2012), An identification problem for a nonlinear evolution equation in a Banach space, *Appl. Anal.* 91, 1583-1604.

[59] A. Lorenzi, I. Vrabie, (2014), An identification problem for a semilinear evolution delay equation, *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 22, 209-244.

[60] N.H. Luc, N.H. Tuan, Y. Zhou, (2019), Regularity of the solution for a final value problem for the Rayleigh-Stokes equation, *Math. Methods Appl. Sci.* 42, no. 10, 3481–3495.

[61] Y. Luchko, W. Rundell, M. Yamamoto, L. Zuo, (2013), Uniqueness and reconstruction of an unknown semilinear term in a time-fractional reaction-diffusion equation, *Inverse Problems* 29, 065019, 16 pp.

[62] S. McKee, A. Stokes, (1983), Product integration methods for the nonlinear Basset equation, *SIAM J. Numer. Anal.* 20, no. 1, 143-160.

[63] R.K. Miller, (1968), On Volterra integral equations with nonnegative integrable resolvents, *J. Math. Anal. Appl.* **22**, 319-340.

[64] R.K. Miller, (1978), An integro-differential equation for rigid heat conductors with memory, *J. Math. Anal. Appl.* 66, no. 2, 313-332.

[65] K.S. Miller, B. Ross, (1993), *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[66] J.S. Pang, D.E. Stewart, (2008), Differential variational inequalities, *Math. Program.* 113, 345-424.

[67] J. Prüss, (2012), *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Birkhäuser/Springer, Basel.

[68] J.C. Pozo, V. Vergara, (2019), Fundamental solutions and decay of fully non-local problems, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **39**, 639-666.

[69] M. Rasmussen, (2007), *Attractivity and Bifurcation for Nonautonomous Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics 1907, Springer, Berlin.

[70] K. Rateitschak, O. Wolkenhauer, (2010), Thresholds in transient dynamics of signal transduction pathways, *J. Theoret. Biol.* **264**, 334-346.

[71] Z. Ruan, Z. Wang, (2017), Identification of a time-dependent source term for a time fractional diffusion problem, *Appl. Anal.* 96, 1638-1655.

[72] J. Sabatier, O.P. Agrawal, J.A. Tenreiro Machado (edited), (2007), *Advances in Fractional Calculus. Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer, Dordrecht.

[73] K. Sakamoto, M. Yamamoto, (2011), Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems, *J. Math. Anal. Appl.* 382, 426-447.

[74] D. Shantanu, (2011), *Functional Fractional Calculus*, Second edition, Springer, Berlin.

[75] M. Slodicka, K. Siskova, (2016), An inverse source problem in a semilinear time-fractional diffusion equation, *Comput. Math. Appl.* 72, 1655-1669.

[76] I.M. Stamova, (2016), On the Lyapunov theory for functional differential equations of fractional order, *Proc. Amer. Math. Soc.* **144**, 1581-1593.

[77] I. Podlubny, (1999), *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Math. Sci. Engrg. 198, Elsevier, New York.

[78] S. Tatar, S. Ulusoy, (2015), An inverse source problem for a one-dimensional space-time fractional diffusion equation, *Appl. Anal.* 94, 2233-2244.

[79] S. Tatar, S. Ulusoy (2017), An inverse problem for a nonlinear diffusion equation with time-fractional derivative, *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 25, 185-193.

[80] F. Tröltzsch, (2010), *Optimal Control of Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 112, American Mathematical Society.

[81] M. Tucsnak, G. Weiss, (2009), *Observation and Control for Operator Semigroups*, Springer, New York.

[82] N.H. Tuan, Y. Zhou, T.N. Thach, N.H. Can, (2019), Initial inverse problem for the nonlinear fractional Rayleigh-Stokes equation with random discrete data, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 78, 104873, 18 pp.

[83] V. Vergara, R. Zacher, (2015), Optimal decay estimates for time-fractional and other nonlocal subdiffusion equations via energy methods, *SIAM J. Math. Anal.* **47**, 210-239.

[84] I.I. Vrabie, (2003), *C_0-Semigroups and Applications*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

[85] R.N. Wang, D.H. Chen, T.J. Xiao, (2012), Abstract fractional Cauchy problems with almost sectorial operators, *J. Differential Equations.* 252, 202-235.

[86] T. Wei, X.L. Li, Y.S. Li, (2016), An inverse time-dependent source problem for a time-fractional diffusion equation, *Inverse Problems* 22, 085003, 24 pp.

[87] T. Wei, Z. Zhang, (2013), Reconstruction of a time-dependent source term in a time-fractional diffusion equation, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 37, 23-31.

[88] H. Ye, J. Gao, Y. Ding, (2007), A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation, *J. Math. Anal. Appl.* 328, 1075-1081.

[89] B. Wu, S. Wu, (2014), Existence and uniqueness of an inverse source problem for a fractional integrodifferential equation, *Comput. Math. Appl.* 68, 1123-1136.

[90] Y. Zhou, F. Jiao, (2010), Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations, *Comput. Math. Appl.* 59, 1063-1077.

[91] Y. Zhou, L. Peng, (2017), On the time-fractional Navier-Stokes equations, *Comput. Math. Appl.* 73, 874-891.

[92] Y. Zhang, J.R. Wang, (2016), Existence and finite-time stability results for impulsive fractional differential equations with maxima, *J. Appl. Math. Comput.* **51**, 67-79.

[93] Y. Zhang, X. Xu, (2011), Inverse source problem for a fractional diffusion equation, *Inverse Problems* 27, 035010, 12 pp.