BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

TRẦN VĂN TUẤN

DÁNG ĐIỆU NGHIỆM CỦA MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HOÁ KHÔNG ĐỊA PHƯƠNG

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 9 46 01 02

HÀ NỘI, 2021

Công trình được hoàn thành tại: Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2

Người hướng dẫn khoa học : PGS. TS. Trần Đình Kế

Phản biện: ....
....

Phản biện: ....
....

Phản biện: ....
....

Luận án sẽ được bảo vệ tại Hội đồng cấp Trường chấm luận án tiến sĩ họp tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 vào hồi ... giờ ... ngày... tháng ... năm 20....

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam
- Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2

MỞ ĐẦU

1. Tổng quan về tình hình nghiên cứu và lí do chọn đề tài

Thuật ngữ "*phương trình vi phân không địa phương*" (NDE) dùng để chỉ những phương trình vi phân mà trong đó đạo hàm của hàm trạng thái không xác định tại từng điểm mà xác định thông qua một công thức tích phân (gọi là đạo hàm "*có nhớ*"). Một trong các lớp NDE tiêu biểu là lớp NDE dùng để mô tả các quá trình khuếch tán dị thường (anomalous diffusion)

$$\partial_t\big(k * [u - u(0)]\big) = \Delta u, \tag{1}$$

trong đó $u = u(x, t)$ là hàm trạng thái, k là một hàm khả tích địa phương, '*' là kí hiệu tích chập Laplace, Δ là toán tử Laplace theo biến không gian. Lớp NDE này đã và đang nhận được quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học. Có thể kể ra một số kết quả tiêu biểu theo hướng nghiên cứu lớp phương trình khuếch tán dị thường trong các công trình Ke (2020), Kemppainen (2016), Pozo (2019), Vergara (2015). Trong trường hợp đặc biệt khi

$$k(t) = g_{1-\alpha}(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, t > 0, \alpha \in (0, 1), \tag{2}$$

phương trình (1) chính là phương trình dưới khuếch tán, là đối tượng nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong hai thập kỷ qua. Phương trình (1) với nhân k được cho bởi (2) còn được gọi là phương trình vi phân phân thứ (FrDE). Có thể thấy FrDE là mô hình tiêu biểu của NDE, hiện là chủ đề nghiên cứu có tính thời sự.

FrDE là hướng nghiên cứu của giải tích phân thứ được đề xuất nghiên cứu vào năm 1695 bởi Leibniz và Euler sau đó được phát triển bởi nhiều nhà toán học như Laplace, Fourier, Liouville, Riemann, Laurant, Hardy, và Riesz,..., xem Kilbas (2006), Miller (1993), Sabatier (2007) và Podlubny (1999). Trong vài thập kỷ trở lại đây, người ta đã tìm thấy rất nhiều ứng dụng của giải tích phân thứ nói chung và FrDE nói riêng trong các ngành khoa học công nghệ, chẳng hạn như các bài toán liên quan đến điện hóa học, lưu biến học, vật liệu xốp, vật liệu đàn hồi, vật liệu fractal,... Chi tiết một số bài toán mô tả bởi FrDE có thể tìm thấy trong các cuốn sách chuyên khảo (xem Hilfer (2000), Sabatier (2007), Shantanu (2011) và Podlubny (1999)). Phạm vi ứng dụng ngày càng rộng của FrDE đã thúc đẩy nhiều nghiên cứu định tính trong những năm gần đây.

Một trong những vấn đề trung tâm trong lí thuyết định tính phương trình vi-tích phân là nghiên cứu dáng điệu nghiệm. Trong phạm vi của luận án này, dáng điệu nghiệm của NDE bao gồm các câu hỏi về dáng điệu nghiệm trong thời gian hữu hạn, tính ổn định nghiệm và nghiệm phân rã.

Trong khoảng hai thập kỷ trở lại đây, hướng nghiên cứu tính ổn định nghiệm đối với FrDE trong không gian hữu hạn và vô hạn chiều đã nhận được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học trong và ngoài nước. Với các FrDE trong không gian hữu hạn chiều, bài toán nghiên cứu tính ổn định nghiệm đã đạt được nhiều kết quả cơ bản và có tính hệ thống. Phương pháp hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định cho FrDE đã được đề xuất vào năm 2008 bởi Lakshmikantham. Sau đó, phương pháp này được áp dụng để nghiên cứu tính ổn định cho nhiều lớp FrDE như: FrDE chứa xung (xem Agarwal (2016)), phương trình vi phân hàm phân thứ (xem Stamova (2016)),... (xem thêm trong bài báo tổng quan của Li (2011)). Các điều kiện ổn định cho FrDE tuyến tính thông qua số mũ Lyapunov phân thứ và ổn định tuyến tính hoá cho FrDE nửa tuyến tính được nghiên cứu bởi Cong (2014, 2016). Thêm vào đó, sử dụng một vài công cụ khác như bất đẳng thức kiểu Gronwall, nguyên lí so sánh hay hàm ma trận Mittag-Leffler, các tác giả Kinh (2016), Lazarevic (2009), Li (2017) và Zhang (2016) đã thu được các kết quả về ổn định trong thời gian hữu hạn.

Không giống như FrDE trong không gian hữu hạn chiều, việc nghiên cứu tính ổn định cho FrDE trong không gian vô hạn chiều gặp nhiều khó khăn. Trên thực tế, vì cấu trúc vô hạn chiều của không gian pha, kéo theo các tính toán đối với đạo hàm phân thứ trên phiếm hàm Lyapunov khó thực hiện, nên việc áp dụng phương pháp hàm Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định tiệm cận cho FrDE không khả thi. Chính vì thế kết quả về tính ổn định của nghiệm đối với các FrDE trong không gian vô hạn chiều còn ít được biết đến. Do đó, để nghiên cứu tính ổn định cho FrDE trong không gian vô hạn chiều ta cần tìm một cách tiếp cận mới.

Gần đây, Chuong (2014) đã nghiên cứu tính ổn định theo nghĩa Lyapunov đối với một lớp phương trình tán xạ-sóng nửa tuyến tính chứa xung và trễ hữu hạn bằng cách sử dụng phương pháp điểm bất động. Anh và Ke (2015) đã thiết lập sự tồn tại nghiệm phân rã kiểu đa thức cho một lớp FrDE trung tính chứa trễ vô hạn bằng cách sử dụng định lí điểm bất động cho ánh xạ nén. Một số kết quả khác về tính giải được, tính ổn định tiệm cận, và sự tồn tại nghiệm phân rã cho FrDE trong không gian vô hạn chiều ta có thể tham khảo các công trình Anh (2014), Ke (2014), Wang (2012) và Zhou (2010).

Trong những năm gần đây, hệ động lực trong thời gian hữu hạn đã được nghiên cứu rộng rãi bởi nhiều nhà toán học. Động cơ đầu tiên thúc đẩy nghiên cứu hệ động lực trong thời gian hữu hạn là tính toán trường véc tơ trong khoảng thời gian bị chặn $t \in [t_0, t_1]$ của hệ động lực sinh bởi phương trình vi phân

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big). \tag{3}$$

Khi phương trình (3) được xét trên nửa trục, người ta quan tâm tới dáng điệu trong thời gian ngắn của nghiệm, nghĩa là dáng điệu của nghiệm trong $[t_0, t_1]$. Việc nghiên cứu này nảy sinh từ các bài toán vận chuyển trong chất lỏng, mạng hoá sinh, truyền tín hiệu (xem Berger (2008), Rateitschak (2010)), ở đó các quá trình xảy ra trong thời gian ngắn. Do đó, việc nghiên cứu dáng điệu nghiệm trong thời gian hữu hạn đóng vai trò quan trọng và có nhiều ý nghĩa thực tiễn. Trong luận án, chúng tôi sử dụng khái niệm tính hút trong thời gian hữu hạn được đưa ra bởi Giesl (2012) để phân tích dáng điệu nghiệm tại thời điểm cuối. Cụ thể, một nghiệm y của hệ (3) được gọi là hút trên $[0, T]$ nếu tồn tại số $\eta > 0$ sao cho với bất kì nghiệm $x(\cdot, \xi)$ của (3) với dữ kiện ban đầu ξ ta có

$$\|x(T, \xi) - y(T, y(0))\| < \|\xi - y(0)\|, \ \forall \xi \in B_\eta\big(y(0)\big) \backslash \{y(0)\},$$

trong đó $B_\eta(y_0)$ là hình cầu tâm tại y_0 bán kính η. Nếu ta có

$$\limsup_{\eta \searrow 0} \frac{1}{\eta} \sup_{\xi \in B_\eta(y(0))} \|x(T,\xi) - y(T, y(0))\| < 1,$$

thì nghiệm y được gọi là hút mũ trên $[0,T]$. Một số kết quả tiêu biểu theo hướng nghiên cứu tính hút trong thời gian hữu hạn cho phương trình vi phân thường có thể tìm thấy trong các công trình Berger (2011, 2008), Giesl (2012) và Haller (1998). Theo như khảo sát của chúng tôi, chưa có nghiên cứu nào về dáng điệu trong thời gian hữu hạn của FrDE trong không gian vô hạn chiều, đặc biệt cho lớp phương trình được đưa về phương trình dưới khuếch tán. Do đó chúng tôi đặt vấn đề nghiên cứu sự tồn tại và tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm đối với phương trình dưới khuếch tán chứa nhiễu phi tuyến trong không gian Banach X:

$$\frac{d}{dt}\big(g_{1-\alpha} * [u - u(0)]\big)(t) = Au(t) + f\big(u(t)\big), t \in [0,T] \tag{4}$$

ở đó $T > 0$ cố định; hàm trạng thái $u(\cdot)$ nhận giá trị trong không gian Banach X; A là toán tử tuyến tính, đóng và không bị chặn; $f : X \to X$ là hàm phi tuyến; $g_{1-\alpha} * v$, với $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; X)$ là tích chập Laplace.

Các NDE theo biến thời gian như phương trình (4) với A là toán tử đạo hàm riêng elliptic cấp hai được sử dụng trong vật lí toán để mô hình hoá các quá trình động lực học trong vật liệu có tính nhớ. Kemppainen và các cộng sự (2016) đã chỉ ra rằng nếu thay nhân $g_{1-\alpha}$ bởi các nhân khả tích địa phương khác, ta có thể dùng phần tuyến tính của hệ (4) để mô tả nhiều quá trình như quá trình khuếch tán nhanh và quá trình khuếch tán siêu chậm.

Sử dụng bất đẳng thức kiểu Gronwall cùng với các ước lượng địa phương của nghiệm (ước lượng với dữ kiện ban đầu nhỏ), chúng tôi chứng minh tính hút và hút mũ của *nghiệm tầm thường* (nghiệm 0) và nghiệm tuỳ ý cho phương trình (4), ở đó số hạng phi tuyến f cho phép tăng trưởng trên tuyến tính.

Khi mô hình hoá một bài toán bởi một hệ phương trình tiến hoá, có hai tình huống được xem xét. Tình huống đầu tiên là ta có thể xác định được các hệ số và dữ kiện ban đầu của hệ phương trình. Khi đó ta có thể giải hệ hoặc nghiên cứu các tính chất định tính của nghiệm bằng các công cụ giải tích. Bài toán ứng với tình huống này gọi là bài toán thuận (forward problem). Tình huống thứ hai xảy ra khi ta không xác định được đầy đủ các hệ số trong phương trình hoặc không đo được dữ kiện ban đầu. Khi đó cùng lúc ta phải xác định các hệ số hoặc dữ kiện và nghiệm tương ứng của hệ dựa vào những 'đo đạc' bổ sung. Lúc này ta có bài toán ngược (inverse problem). Cần nhấn mạnh rằng, khác với bài toán thuận, bài toán ngược thường là bài toán đặt không chỉnh theo nghĩa Hadamard, có độ phức tạp cao và cần có cách tiếp cận phù hợp với từng trường hợp cụ thể. Chính vì vậy, các phương pháp giải bài toán ngược rất phong phú.

Trong nhưng năm gần đây, bài toán ngược đối với phương trình đạo hàm riêng phân thứ thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Bài toán xác định ngoại lực đối với phương trình đạo hàm riêng phân thứ tuyến tính đã được đề cập trong nhiều bài báo, ở đó hệ số được xác định dựa trên: phương pháp hàm đặc trưng (xem Kirane (2013), Sakamoto (2011), Wei (2013) và Zhang (2011)), phương pháp chính quy hoá (xem Ruan (2017), Wei (2016)), Định lí giải tích Fredholm (xem Tatar (2015)), hoặc phương pháp thác triển duy nhất (xem Jiang (2017)). Ngoài ra, người đọc quan tâm có thể tham khảo (Jin (2015), Kaltenbacher (2019)) cho các loại bài toán ngược đối với phương trình dưới khuếch tán, trong đó tham số cần xác định có thể là dữ liệu ban đầu, số hạng nguồn hoặc các hệ số khác trong phương trình. So với trường hợp tuyến tính, bài toán xác định ngoại lực với phương trình đạo hàm riêng phi tuyến phức tạp hơn rất nhiều và các kết quả liên quan còn ít được biết đến. Sử dụng nguyên lý cực đại cho phương trình dưới khuếch tán, Luchko và các cộng sự (2013) đã nghiên cứu bài toán xác định số hạng nguồn phi tuyến. Slodicka và Siskova (2016) sử dụng phương pháp rời rạc hoá để nghiên cứu bài toán xác định số hạng nguồn phụ thuộc thời gian cho phương trình dưới khuếch tán nửa tuyến tính. Sử dụng phương pháp tối ưu, Tatar và Ulusoy (2017) đã nghiên cứu bài toán xác định số hạng khuếch tán phi tuyến trong phương trình dưới khuếch tán. Sử dụng phương pháp định lí điểm bất động, Wu (2014) đã nghiên cứu bài toán xác định số hạng nguồn cho phương trình truyền sóng phân thứ nửa tuyến tính, ở đó các tác giả đã chứng minh kết quả về sự tồn tại địa phương. Cần chú ý rằng, không giống như các phương trình bậc nguyên, chúng ta không thể kéo dài nghiệm cho phương trình phân thứ vì nghiệm của phương trình phân thứ không có tính chất nửa nhóm. Ngoài ra sử dụng phương pháp điểm bất động nghiên cứu bài toán ngược có thể xem Lorenzi (2012), (2014).

Trong luận án, chúng tôi xét bài toán xác định tham số (**FrIP**): cho $\xi, \psi \in X$, tìm (x, u, z) thoả mãn bất đẳng thức vi biến phân phân thứ

$$D_0^\alpha x(t) = Ax(t) + B(u(t))z + h(x(t)), t \in (0, T], \tag{5}$$

$$\langle F(x(t)) + G(u(t)), v - u(t)\rangle \geq 0, \forall v \in \mathcal{K}, t \in [0, T], \tag{6}$$

$$x(0) = \xi, \tag{7}$$

và thoả mãn điều kiện

$$\int_0^T \varphi(s)x(s)ds = \psi, \tag{8}$$

trong đó $x(\cdot)$ nhận giá trị trong không gian Banach X và $u(\cdot)$ nhận giá trị trong không gian Hilbert $\mathcal{U}$, $\mathcal{K}$ là tập con lồi đóng trong $\mathcal{U}$, $z \in X$; $D_0^\alpha, \alpha \in (0, 1)$, là đạo hàm phân thứ Caputo cấp α. Trong mô hình bài toán, A là toán tử tuyến tính đóng trên X; $\varphi \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ là hàm không âm; $B : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $h : X \to X$, $F : X \to \mathcal{U}^*$, $G : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^*$ là các ánh xạ cho trước và $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là cặp đối ngẫu chính tắc giữa $\mathcal{U}$ và $\mathcal{U}^*$.

Các bất đẳng thức vi biến phân (DVIs) xuất hiện như là một hệ chứa một phương trình tiến hoá và một ràng buộc bất đẳng thức biến phân. DVIs được nghiên cứu hệ thống bởi Pang và Stewart (2008). Ở đó DVIs như là mô hình tổng quát cho các phương trình vi phân đại số, các bài toán bù vi phân,... Thực tế DVIs mô tả các mô hình toán học ở đó là nơi giao thoa của hệ động lực và tối ưu.

Xét một số trường hợp đặc biệt của hệ (5)-(6). Giả sử, $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{K} = \mathcal{U} = \mathbb{R}^m$. Hệ (5)-(6) có dạng sau

$$D_0^\alpha x(t) = \hat{F}(x(t), u(t), z),\ t \in (0, T],$$
$$\hat{G}(x(t), u(t)) = 0,\ t \in [0, T],$$

ở đó $\hat{F}(x(t), u(t), z) = Ax(t) + B(u(t))z + h(x(t))$ và $\hat{G}(x(t), u(t)) = F(x(t)) + G(u(t))$, đây là một hệ phương trình vi phân phân thứ-đại số. Hệ này đã được sử dụng để mô tả mạng điện (xem Pang (2008)).

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn với biên trơn, $X = \mathcal{U} = \mathcal{K} = L^2(\Omega)$, $A = \Delta$ là toán tử Laplace với điều kiện biên thuần nhất và, $G = -\Delta$. Khi đó (5)-(6) có dạng

$$\begin{aligned}
&\partial_t^\alpha y = \Delta y + \hat{h}(y, u, z) \ \text{ trong } \Omega \times (0, T],\\
&-\Delta u + F(y) = 0 \ \text{ trong } \Omega \times [0, T],\\
&y = u = 0 \ \text{ trên } \partial\Omega \times [0, T],
\end{aligned}$$

ở đó, ∂_t^α là đạo hàm Caputo phân thứ cấp α theo biến thời gian t, $\hat{h}(y, u, z) = B(u)z + h(y)$. Đây là hệ loại parabolic-elliptic, hệ này được sử dụng để mô tả chuyển động của vi khuẩn dưới tác động của hoá chất (xem Jäger (1992)), và quá trình khôi phục ảnh (xem, Jin (2010)).

DVIs phân thứ (FrDVIs) được đề xuất đầu tiên trong Loi (2016), ở đó các tác giả đã sử dụng phương pháp bậc tô pô để chứng minh tính giải được. Trong công trình Ke (2015), các tính chất định tính cho một lớp FrDVIs được nghiên cứu. Chú ý rằng các FrDVIs trong Loi (2016) và Ke (2015) được thiết lập trong không gian hữu hạn chiều. Tuy nhiên, nếu phương trình tiến hoá trong DVIs miêu tả một phương trình đạo hàm riêng, chúng ta có DVIs vô hạn chiều. Trong những năn gần đây, DVIs trong không gian vô hạn chiều thu hút sự quan tâm nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học, có thể kể đến các kết quả tiêu biểu Anh (2017), Liu (2017), (2016), ở đó các tác giả đã nghiên cứu tính giải được và dáng điệu tiệm cận nghiệm của DVIs mà ràng buộc là phương trình tiến hoá cấp một trong không gian Banach.

Trong luận án này chúng tôi nghiên cứu câu hỏi xác định số hạng ràng buộc của FrDVI (5)-(9). Cụ thể, trong biểu diễn $B(u(t))z$ của phương trình (5), số hạng $B(u(t))$ là biên độ của ràng buộc, số hạng $z \in X$ là hướng của ràng buộc và được giả sử là chưa biết. Số hạng này sẽ được xác định bởi sử dụng phép đo (10). Chú ý rằng, khi $\varphi(t) = T^{-1}$, điều kiện đo dạng (10) chính là giá trị trung bình của hàm trạng thái trên $[0, T]$. Bài toán (**FrIP**) sẽ được chúng tôi nghiên cứu như sau. Dưới giả sử là A là toán tử quạt, chúng tôi chứng minh nghiệm tích phân của (5)-(10) cũng là nghiệm cổ điển. Sử dụng định lí điểm bất động Schauder chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm toàn cục (x, u, z) với mỗi dữ kiện ban đầu (ξ, ψ). Bổ sung thêm giả thiết hệ số Lipschitz của F nhỏ, chúng tôi chứng minh ánh xạ $(\xi, \psi) \mapsto (x, u, z)$ Lipschitz địa phương từ $X \times D(A)$ tới $C([0, T]; X) \times C([0, T]; \mathcal{U}) \times X$, từ đó chúng tôi nhận được kết quả về tính duy nhất và tính ổn định của nghiệm.

Bên cạnh lớp phương trình dưới khuếch tán, trong luận án này chúng tôi quan tâm tới hai lớp NDE khác được nghiên cứu gần đây trong động lực học chất lỏng. Lớp NDE thứ nhất liên quan đến phương trình Basset dạng

$$\frac{d}{dt}\big(k_0 u + k * [u - u(0)]\big)(t) + Au(t) = f\big(u(t)\big), t \in (0, T] \tag{9}$$

$$u(0) = u_0, \tag{10}$$

ở đó hàm trạng thái $u(\cdot)$ nhận giá trị trong không gian Hilbert khả ly H; $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+), k_0 > 0$; A là toán tử tuyến tính trên H và $f : H \to H$ là hàm phi tuyến.

NDE như (9) xuất hiện khi mô hình hoá nhiều quá trình, chẳng hạn: quá trình truyền nhiệt trong các vật liệu có tính chất nhớ (xem Clément (1981), Prüss (2012)); quá trình thuần nhất hoá dòng một pha trong môi trường xốp (xem Amaziane (2007), Hornung (1990)). Khi $k_0 = 0$ và $k = g_{1-\alpha}, \alpha \in (0, 1)$, phương trình (9) chính là phương trình dưới khuếch tán (4). Khi $k_0 > 0$ và $k = g_{1/2}$ phương trình (9) là phương trình Basset phi tuyến (xem Ashyralyev (2011)).

Phương trình Basset được đề xuất nghiên cứu vào những năm 1910 bởi nhà toán học người Anh, A.B. Basset khi ông nghiên cứu chuyển động của hạt trong môi trường chất lỏng có nhớt không nén được dưới tác động của lực hấp dẫn. McKee (1983) đã sử dụng phương pháp số tìm nghiệm gần đúng của phương trình loại Basset. Tính đặt đúng của phương trình Basset tuyến tính đã được thiết lập gần đây trong các công trình Ashyralyev (2011), Bazhlekova (2014) và Hornung (1990). Theo như chúng tôi được biết, cho đến nay các kết quả về nghiên cứu định tính cho lớp phương trình loại Basset vẫn còn hạn chế. Trong luận án này, mục đích của chúng tôi là tìm điều kiện thích hợp đối với k và f để chứng minh sự tồn tại nghiệm và tính hút trong thời gian hữu hạn cho các nghiệm của (9)-(10) trong trường hợp $k_0 > 0$.

Sử dụng cách tiếp cận trong Ke (2020), chúng tôi dẫn ra công thức nghiệm dạng biến thiên hằng số cho hệ (9)-(10) và chứng minh một bất đẳng thức kiểu Gronwall tương ứng với hệ (9)-(10). Sau đó sử dụng nguyên lí ánh xạ co kết hợp với các ước lượng địa phương của nghiệm để chứng minh sự tồn tại và tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm. Hệ quả của tính hút, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm tuần hoàn/đối tuần hoàn của (9), nghĩa là, các nghiệm thoả mãn $u(0) = \pm u(T)$.

Lớp NDE thứ hai liên quan đến phương trình Rayleigh-Stokes dạng

$$\partial_t u - \Delta u - \partial_t(m * \Delta u) = f(t, u) \text{ trong } \Omega, t > 0, \tag{11}$$

$$\mathcal{B}u = 0 \text{ trên } \partial\Omega,\ t \geq 0, \tag{12}$$

$$u(\cdot, 0) = \xi \text{ trong } \Omega, \tag{13}$$

ở đó $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$; $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ là một hàm không âm; f là hàm phi tuyến; $\xi \in L^2(\Omega)$ là dữ kiện ban đầu; $\mathcal{B}$ là toán tử biên thuộc một trong hai dạng sau

$$\mathcal{B}u = u \text{ hoặc } \mathcal{B}u = \nu \cdot \nabla u + \eta u,\ \eta > 0,$$

với ν là pháp tuyến ngoài đối với biên $\partial\Omega$.

Có thể thấy, phương trình (11) là dạng tổng quát của nhiều lớp phương trình. Nếu m là một hằng số không âm thì (11) chính là phương trình khuếch tán cổ điển. Trong trường hợp m là một hàm chính quy, ví dụ $m \in C^1(\mathbb{R}^+)$, thì (11) trở thành phương trình khuếch tán có nhớ:

$$\partial_t u - (1 + m(0))\Delta u - \int_0^t m'(t-s)\Delta u(s)ds = f(t, u),$$

đây là lớp phương trình được nhiều nhà nghiên cứu quan tâm, xem Cannarsa (2013), Conti (2014), Miller (1978) về các kết quả liên quan đến lớp phương trình này. Ngoài ra, nếu $m(t) = m_0 g_{1-\alpha}(t), m_0 > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, thì ta có phương trình

$$\partial_t u - (1 + m_0 \partial_t^\alpha)\Delta u = f(t, u).$$

Đây là phương trình Rayleigh-Stokes phân thứ (xem Bazhlekova (2015)), với ∂_t^α là đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville cấp α.

Phương trình Rayleigh-Stokes phân thứ được sử dụng để mô tả dòng chảy không Newton trong môi trường vật liệu có cả tính đàn hồi và tính nhớt. Theo đó, phương trình Rayleigh-Stokes phân thứ được sử dụng để nghiên cứu nhiều bài toán áp dụng thực tiễn trong công nghiệp, kĩ thuật (xem Bazhlekova (2015) cùng với các tài liệu trích dẫn trong đó). Các phương pháp số để tìm nghiệm xấp xỉ cho phương trình Rayleigh-Stokes phân thứ đã được nghiên cứu trong Bazhlekova (2015), Chen (2013). Gần đây, trong các công trình Luc (2019) và Tuan (2019), các tác giả đã bàn về bài toán giá trị cuối cho phương trình Rayleigh-Stokes phân thứ. Trong luận án, chúng tôi đặt vấn đề nghiên cứu tính giải được và tính ổn định của bài toán (11)-(13) trong trường hợp m là hàm không chính quy (chẳng hạn m không bị chặn trong lân cận của $t = 0$).

Để nghiên cứu nội dung này, chúng tôi đặt giả thiết hàm $1 + \gamma m, \gamma > 0$, là hàm hoàn toàn dương. Dựa trên giả thiết này, chúng tôi thiết lập công thức biểu diễn nghiệm dạng biến thiên hằng số và chứng minh một bất đẳng thức kiểu Gronwall cho hệ (11)-(13). Kết hợp bất đẳng thức này cùng với các ước lượng địa phương của nghiệm chúng tôi thu được kết quả về sự tồn tại và tính ổn định theo nghĩa Lyapunov của nghiệm. Ngoài ra, khi tính duy nhất nghiệm không được đảm bảo, chúng tôi chứng minh tồn tại tập compact khác rỗng các nghiệm phân rã của hệ (11)-(13), bằng cách áp dụng định lí điểm bất động cho ánh xạ nén.

Từ những lí do vừa kể trên, chúng tôi đã lựa chọn đề tài nghiên cứu của luận án là: “**Dáng điệu nghiệm của một số lớp phương trình tiến hoá không địa phương**”.

2. Mục đích, đối tượng và phạm vi nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu: Luận án nghiên cứu một số vấn đề định tính đối với một số lớp NDE, bao gồm: tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm; tính ổn định tiệm cận nghiệm theo nghĩa Lyapunov; tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định của bài toán xác định tham số.

2.2. Đối tượng nghiên cứu: Trong luận án, chúng tôi xét bốn lớp bài toán sau

⋆ Phương trình dưới khuếch tán.

⋆ Phương trình loại Basset.

⋆ Phương trình loại Rayleigh-Stokes.

⋆ Bất đẳng thức vi biến phân phân thứ.

2.3. Phạm vi nghiên cứu: Phạm vi nghiên cứu của luận án được thể hiện thông qua các nội dung sau.

⋆ **Nội dung 1.** Nghiên cứu dáng điệu nghiệm trong thời gian hữu hạn thông qua tính hút và hút mũ trong thời gian hữu hạn của nghiệm cho hai lớp NDE: lớp phương trình dưới khuếch tán và lớp phương trình loại Basset.

⋆ **Nội dung 2.** Nghiên cứu tính ổn định tiệm cận nghiệm của phương trình tiến hoá loại Rayleigh-Stokes nửa tuyến tính.

⋆ **Nội dung 3.** Tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định đối với bài toán xác định tham số trong một lớp bất đẳng thức vi biến phân phân thứ.

3. Phương pháp nghiên cứu

Luận án sử dụng các công cụ của giải tích lồi, giải tích đa trị, giải tích phân thứ, phương trình tích phân Volterra với nhân hoàn toàn dương, lí thuyết ổn định, lí thuyết điểm bất động và lí thuyết nửa nhóm. Ngoài ra, khi nghiên cứu các nội dung cụ thể, chúng tôi sử dụng một số kết quả và kĩ thuật tương ứng. Cụ thể:

- Để chứng minh sự tồn tại nghiệm, nghiệm phân rã chúng tôi sử dụng phương pháp ước lượng theo độ đo không compact và các định lí điểm bất động.
- Để chứng minh tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn chúng tôi sử dụng các bất đẳng thức kiểu Gronwall kết hợp với các ước lượng địa phương của nghiệm.
- Để chứng minh tính ổn định tiệm cận nghiệm chúng tôi sử dụng phương pháp ước lượng địa phương và bất đẳng thức kiểu Gronwall.
- Để chứng minh tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định cho bài toán xác định tham số trong một lớp bất đẳng thức vi biến phân phân thứ chúng tôi dựa trên tính chính quy nghiệm của phương trình dưới khuếch tán và các định lí điểm bất động.

4. Kết quả đạt được của luận án

Luận án đã đạt được các kết quả sau đây:

1. Chứng minh sự tồn tại nghiệm tích phân và tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm tầm thường cũng như nghiệm tuỳ ý đối với hai lớp NDE nửa tuyến tính: phương trình dưới khuếch tán và phương trình loại Basset, với giả thiết số hạng phi tuyến có tăng trưởng trên tuyến tính.
2. Chứng minh sự tồn tại và tính ổn định tiệm cận nghiệm của một lớp NDE nửa tuyến tính loại Rayleigh-Stokes. Đặc biệt trong trường hợp không duy nhất nghiệm chúng tôi chứng minh tồn tại tập compact khác rỗng các nghiệm phân rã.
3. Chứng minh tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định đối với bài toán xác định tham số trong một lớp bất đẳng thức vi biến phân phân thứ.

Các kết quả trên đây của luận án được công bố trong 03 bài báo trên các tạp chí chuyên ngành (liệt kê ở mục "*Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án*"), 01 bài báo đã hoàn thành ở dạng tiền ấn phẩm. Các nội dung chính của luận án đã được báo cáo tại:

- Xêmina *Giải tích*, Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2;
- Xêmina *Phương trình vi phân và tích phân*, Bộ môn Giải tích, Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;

- Hội thảo cho Nghiên cứu sinh, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, 2017, 2018, 2019.

5. Cấu trúc của luận án

Ngoài phần Mở đầu, Kết luận, Danh mục công trình công bố và Tài liệu tham khảo, luận án gồm 4 chương:

- Chương 1: *Kiến thức chuẩn bị*. Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và kết quả cơ sở về giải tích phân thứ, giải tích đa trị, một số định lí điểm bất động, lí thuyết nửa nhóm, lí thuyết độ đo không compact (MNC) và ánh xạ nén, phương trình tích phân Volterra và một số kết quả bổ trợ.
- Chương 2: *Dáng điệu nghiệm trong thời gian hữu hạn của một số lớp phương trình tiến hoá không địa phương nửa tuyến tính*. Trong chương này, chúng tôi chứng minh tính giải được và tính hút trong khoảng thời gian hữu hạn của nghiệm đối với hai lớp NDE: lớp phương trình dưới khuếch tán và lớp phương trình loại Basset, với giả thiết phần phi tuyến có tăng trưởng trên tuyến tính.
- Chương 3. *Tính ổn định của phương trình tiến hoá loại Rayleigh-Stokes nửa tuyến tính*. Với bài toán này, chúng tôi chứng minh tính giải được, tính ổn định tiệm cận. Ngoài ra, trong trường hợp không duy nhất nghiệm, chúng tôi chứng minh tồn tại tập compact khác rỗng các nghiệm phân rã.
- Chương 4. *Bài toán xác định tham số trong bất đẳng thức vi biến phân phân thứ*. Trong chương này, chúng tôi chứng minh kết quả về tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định nghiệm đối với bài toán xác định tham số trong bất đẳng thức vi biến phân phân thứ.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ sở về giải tích phân thứ, giải tích đa trị, một số định lí điểm bất động, lí thuyết nửa nhóm, lí thuyết phương trình tích phân Volterra và một số kết quả bổ trợ.

1.1. Một số không gian hàm

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại một số không gian hàm cần dùng trong luận án.

1.2. Giải tích phân thứ

Trong mục này, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và tính chất liên quan đến đạo hàm, tích phân phân thứ.

1.3. Phép biến đổi Laplace

Trong mục này chúng tôi nhắc lại định nghĩa và một số tính chất cơ bản của phép biến đổi Laplace, biến đổi Laplace ngược.

1.4. Độ đo không compact và các ước lượng

Trong mục này, chúng tôi trình bày khái niệm độ đo không compact và một số ước lượng liên quan đến độ đo không compact Hausdorff.

1.5. Ánh xạ nén và một số định lí điểm bất động

Trong mục này, chúng tôi trình bày về nguyên lí điểm bất động cho ánh xạ nén.

1.6. Lí thuyết nửa nhóm

Mục này được dùng để trình bày một số khái niệm và kết quả trong lí thuyết nửa nhóm.

1.7. Bài toán Cauchy đối với phương trình vi phân phân thứ

Mục này trình bày công thức biểu diễn nghiệm đối với bài toán Cauchy cho phương trình dưới khuếch tán.

1.8. Phương trình tích phân Volterra

Trong phần này, chúng tôi nhắc lại một số kết quả đối với nghiệm của phương trình tích phân Volterra với nhân hoàn toàn dương.

Chương 2

DÁNG ĐIỆU NGHIỆM TRONG THỜI GIAN HỮU HẠN CỦA MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HOÁ KHÔNG ĐỊA PHƯƠNG NỬA TUYẾN TÍNH

Chương này chúng tôi mở rộng khái niệm về tính hút và hút mũ trong khoảng thời gian hữu hạn do Giesl và Rasmussen đề xuất và xét các tính chất này của nghiệm đối với hai lớp NDE nửa tuyến tính: lớp phương trình dưới khuếch tán và lớp phương trình loại Basset.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo số [1], [2] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

2.1. Dáng điệu nghiệm trong thời gian hữu hạn của phương trình dưới khuếch tán

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu tính giải được và tính hút, hút mũ trong khoảng thời gian hữu hạn cho các nghiệm của phương trình dưới khuếch tán.

2.1.1. Đặt bài toán

Cho $(X, \|\cdot\|)$ là không gian Banach và $\alpha \in (0,1)$. Xét phương trình

$$\frac{d}{dt}\big(g_{1-\alpha} * [u - u(0)]\big)(t) = Au(t) + f\big(u(t)\big), t \in [0,T], \tag{2.1}$$

ở đó $g_{1-\alpha}(t) = t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha), \alpha \in (0,1), t > 0$, hàm trạng thái $u(\cdot)$ lấy giá trị trong không gian Banach X, A là toán tử tuyến tính đóng trên X, $f : X \to X$ là hàm phi tuyến.

2.1.2. Sự tồn tại nghiệm tích phân

Để nghiên cứu tính giải được của phương trình (2.1), chúng tôi đặt các giả thiết sau.

(HA) C_0-nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sinh bởi A liên tục theo chuẩn và tồn tại $M \geq 1$ sao cho

$$\|S(t)u\| \leq M\|u\|, \forall t \geq 0, \forall u \in X.$$

(HF) Hàm phi tuyến $f : X \to X$ liên tục và thoả mãn

(1) điều kiện tăng trưởng

$$\|f(u)\| \leq \Psi(\|u\|), \forall u \in X,$$

trong đó $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là một hàm liên tục không giảm;

(2) nếu $S(\cdot)$ không compact thì với mỗi tập bị chặn $\Omega \subset X$, ta có

$$\chi\big(f(\Omega)\big) \leq k\, \chi(\Omega), k \in \mathbb{R}^+.$$

Cho $\xi \in X$, xét *toán tử nghiệm* $\Sigma : C([0,T]; X) \to C([0,T]; X)$ cho bởi công thức

$$\Sigma(u)(t) = \mathcal{S}_\alpha(t)\xi + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathcal{P}_\alpha(t-s)f(u(s))\, ds.$$

Theo công thức trên ta thấy rằng u là nghiệm tích phân của phương trình (2.1) khi và chỉ khi u là điểm bất động của toán tử nghiệm Σ. Bổ đề sau chỉ ra tính nén của Σ.

Bổ đề 2.1. *Nếu các giả thiết* (**HA**) *và* (**HF**) *được thoả mãn thì với mọi tập bị chặn* $\Omega \subset C([0,T];X)$ *ta có ước lượng*

$$\chi^*(\Sigma(\Omega)) \leq \Big(\sup_{t\in[0,T]} 4k\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|\mathcal{P}_\alpha(t-s)\|_\chi ds\Big)\chi^*(\Omega).$$

Định lí sau phát biểu kết quả về tính giải được của phương trình (2.1).

Định lí 2.1. *Giả sử các giả thiết* (**HA**) *và* (**HF**) *được thoả mãn. Nếu tồn tại* $R > 0$ *sao cho*

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)R}{\Gamma(\alpha+1)\|\xi\| + T^\alpha\Psi(R)} \geq M, \tag{2.2}$$

thì tồn tại một tập compact khác rỗng các nghiệm tích phân của phương trình (2.1) *trên* $[0,T]$.

2.1.3. Tính hút trong thời gian hữu hạn

Trong phần này, chúng tôi chứng minh một số kết quả về tính hút trong thời gian hữu hạn cho nghiệm của phương trình (2.1). Kí hiệu $\mathbb{S}(\xi)$ là tập các nghiệm của phương trình (2.1) ứng với dữ kiện ban đầu ξ. Chúng tôi sử dụng khái niệm sau về tính hút trong thời gian hữu hạn của nghiệm của phương trình (2.1).

Định nghĩa 2.1 (Tính hút trong thời gian hữu hạn)**.** Cho $y : [0,T] \to X$ là một nghiệm của phương trình (2.1).

(i) y được gọi là hút trên $[0,T]$ nếu tồn tại $\eta > 0$ sao cho

$$\|u(T,\xi) - y(T,y(0))\| < \|\xi - y(0)\|,$$

với mọi $\xi \in B_\eta(y(0))\backslash\{y(0)\}$ và $u \in \mathbb{S}(\xi)$.

(ii) y được gọi là hút mũ trên $[0,T]$ nếu

$$\limsup_{\eta\searrow 0}\frac{1}{\eta}\sup_{\xi\in B_\eta(y(0))}\sup_{u\in\mathbb{S}(\xi)}\|u(T,\xi) - y(T,y(0))\| < 1.$$

Từ định nghĩa suy ra rằng nếu một nghiệm có tính chất hút mũ thì nó có tính chất hút. Bổ đề sau cho ta một điều kiện đủ của tính hút mũ.

Bổ đề 2.2. *Cho* $y \in C([0,T];X)$ *là một nghiệm của phương trình* (2.1)*. Khi đó* y *hút mũ trên* $[0,T]$ *nếu*

$$\limsup_{\|\xi\|\to 0}\sup_{u\in\mathbb{S}(y(0)+\xi)}\frac{\|u(T,y(0)+\xi) - y(T,y(0))\|}{\|\xi\|} < 1. \tag{2.3}$$

Để nghiên cứu tính hút trong thời gian hữu hạn cho các nghiệm của phương trình (2.1), chúng tôi thay thế các giả thiết (**HA**) và (**HF**) bởi các giả thiết sau.

(**A***) Nửa nhóm $S(\cdot)$ sinh bởi A liên tục theo chuẩn và tồn tại $M \geq 1, \beta > 0$ sao cho

$$\|S(t)u\| \leq Me^{-\beta t}\|u\|, \forall t \geq 0, \forall u \in X.$$

($\mathbf{F}^*$) Hàm f thoả mãn giả thiết (**HF**) với Ψ là hàm Lipschitz địa phương, $\Psi(0)=0$ và tồn tại số $\gamma < \frac{\beta}{M}$ sao cho $\|f(u)\| = \gamma\|u\| + o(\|u\|)$ khi $\|u\| \to 0$.

Bổ đề 2.3. *Nếu các giả thiết* ($\mathbf{A}^*$) *và* ($\mathbf{F}^*$) *được thoả mãn thì*

$$\limsup_{\|\xi\|\to 0} \sup_{u\in\mathbb{S}(\xi)} \|u(t)\| = 0,\ \forall t \in (0,T].$$

Định lí 2.2. *Nếu các giả thiết* ($\mathbf{A}^*$) *và* ($\mathbf{F}^*$) *được thoả mãn và*

$$E_{\alpha,1}(-(\beta-\gamma M)T^\alpha) < \frac{1}{M}, \tag{2.4}$$

thì nghiệm tầm thường của phương trình (2.1) *hút mũ trên* $[0,T]$.

Hệ quả sau cho ta kết quả về hút tuyến tính hoá cho phương trình (2.1).

Hệ quả 2.1. *Giả sử* (**HA**) *được thoả mãn và* $f \in C^1(X)$ *sao cho*

(1) $f(0)=0$;

(2) f *thoả mãn giả thiết* (**HF**) *với* Ψ *là hàm Lipschitz địa phương;*

(3) $A_0 = A + Df(0)$ *là phần tử sinh của nửa nhóm ổn định mũ* $\{S_0(t)\}_{t\ge 0}$, *nghĩa là tồn tại* $\beta > 0$ *sao cho*

$$\|S_0(t)\|_{op} \le e^{-\beta t},\ \forall t \ge 0.$$

Khi đó, nghiệm tầm thường của phương trình (2.1) *hút trên* $[0,T]$.

Để chứng minh tính hút của các nghiệm khác nghiệm tầm thường, ta thay giả thiết ($\mathbf{F}^*$) bởi giả thiết sau.

($\mathbf{F}^\sharp$) Hàm f thoả mãn giả thiết (**HF**)(2) và

$$\|f(u)-f(v)\| \le \Psi(\|u-v\|),\ \forall u,v \in X,$$

trong đó $\Psi \in C(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^+)$ là hàm Lipschitz địa phương, không giảm và tồn tại số $\gamma < \frac{\beta}{M}$ sao cho $\Psi(r) = \gamma r + o(r)$ khi $r \to 0$.

Định lí 2.3. *Giả sử* ($\mathbf{A}^*$), ($\mathbf{F}^\sharp$) *và* (2.4) *được thoả mãn. Khi đó mọi nghiệm của phương trình* (2.1) *hút mũ trên* $[0,T]$.

2.1.4. Áp dụng

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là miền bị chặn với biên $\partial\Omega$ trơn. Xét bài toán

$$\partial_t^\alpha u(x,t) = \Delta_x u(x,t) + \tilde{f}(u(x,t)),\ \alpha\in(0,1),\ t\in[0,T], \tag{2.5}$$

$$u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \tag{2.6}$$

$$u(x,0) = \xi(x),\ x\in\Omega. \tag{2.7}$$

Trong mô hình bài toán (2.5)-(2.7), ∂_t^α là đạo hàm phân thứ Caputo cấp α ứng với biến thời gian t, Δ_x là toán tử Laplace theo biến x, và $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm số liên tục.

Xét

$$X = C_0(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v = 0 \text{ trên } \partial\Omega\},$$

với $\|v\| = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |v(x)|$. Đặt $A = \Delta$ với miền xác định $D(A) = \{v \in C_0(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega) : \Delta v \in C_0(\overline{\Omega})\}$, và xét $f : C_0(\overline{\Omega}) \to C_0(\overline{\Omega})$ như sau

$$f(v)(x) = \tilde{f}(v(x)),\ \forall v \in C_0(\overline{\Omega}).$$

Khi đó (2.5)-(2.7) là một trường hợp cụ thể của phương trình (2.1). Ta biết rằng A sinh ra C_0-nửa nhóm $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ co, compact trên X. Do đó giả thiết (**HA**) thoả mãn.

Lưu ý rằng với nửa nhóm co $S(\cdot)$, thì $\|S(t)\|_{op} = 1$ với mọi $t \geq 0$ hoặc $S(\cdot)$ ổn định mũ. Mặt khác, ta có

$$\|S(t)\|_{op} \leq Me^{-\lambda_1 t},\ M = \exp\left(\frac{\lambda_1|\Omega|^{2/N}}{4\pi}\right),$$

trong đó λ_1 là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta$ trong $H_0^1(\Omega)$, cụ thể

$$\lambda_1 = \sup\left\{\frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\int_\Omega u^2 dx} : u \in H_0^1(\Omega), u \neq 0\right\},$$

và $|\Omega|$ là thể tích của miền Ω. Do đó giả thiết ($\mathbf{A}^*$) được thoả mãn.

Ta xét trường hợp $\tilde{f}$ có tăng trưởng trên tuyến tính

$$|\tilde{f}(z)| \leq k\,|z|^p, \forall z \in \mathbb{R},\ \text{với } k > 0,\ p > 1.$$

Khi đó $f(0) = 0$ và $\|f(v)\| \leq k\|v\|^p$ với mọi $v \in C_0(\overline{\Omega})$. Ta thấy rằng f thoả mãn ($\mathbf{F}^*$) với $\gamma = 0$. Theo Định lí 2.2, nghiệm tầm thường của (2.5) hút mũ trên $[0, T]$ nếu

$$\exp\left(\frac{\lambda_1|\Omega|^{2/N}}{4\pi}\right) E_{\alpha,1}(-\lambda_1 T^\alpha) < 1.$$

Thực tế, điều kiện cuối đặt trên T, điều kiện này yêu cầu $T > T^*$ với $T^* = T^*(\Omega, N) > 0$. Ta sẽ thay thế điều kiện này bởi giả thiết rằng $\tilde{f} \in C^2(\mathbb{R})$ sao cho $\tilde{f}'(0) < 0$. Vì $\tilde{f}$ khả vi cấp hai, nên $f \in C^1(C_0(\overline{\Omega}))$. Chú ý là $Df(0) = \tilde{f}'(0)I$, nửa nhóm $S_0(\cdot)$ sinh bởi $A_0 = A + Df(0)$ xác định bởi

$$S_0(t) = e^{\tilde{f}'(0)t}S(t),\ t \geq 0,$$

và vì $S(\cdot)$ là nửa nhóm co nên $\|S_0(t)\|_{op} \leq e^{\tilde{f}'(0)t},\ t \geq 0$. Sử dụng Hệ quả 2.1, ta có thể khẳng định rằng nghiệm tầm thường của (2.5) hút mũ trên $[0, T]$ với mọi $T > 0$.

2.2. Dáng điệu nghiệm trong thời gian hữu hạn của phương trình tiến hoá loại Basset

Trong mục này, chúng tôi nghiên cứu tính giải được và tính hút, hút mũ trong khoảng thời gian hữu hạn cho các nghiệm của phương trình tiến hoá loại Basset.

2.2.1. Đặt bài toán

Cho H là không gian Hilbert khả ly và $T > 0$. Xét bài toán

$$\frac{d}{dt}\big(k_0 u + k * [u - u(0)]\big)(t) + Au(t) = f\big(u(t)\big), t \in (0, T] \tag{2.8}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2.9}$$

trong đó hàm trạng thái $u(\cdot)$ lấy giá trị trong H, $k_0 > 0$, $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, A là toán tử tuyến tính trên H và $f : H \to H$ là hàm phi tuyến.

Để nghiên cứu bài toán (2.8)-(2.9), chúng tôi đặt các giả thiết sau.

(Hk) $k_0 > 0$ và nhân $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ là một hàm không tăng, không âm.

(Ha) $A : D(A) \to H$ là toán tử trù mật, xác định dương, tự liên hợp với giải thức compact.

2.2.2. Biểu diễn nghiệm của bài toán tuyến tính

Giả sử giả thiết (Hk) được thoả mãn. Xét bài toán tuyến tính

$$\frac{d}{dt}\big(k_0 u + k * [u - u_0]\big)(t) + Au(t) = f(t), t \in (0, T] \tag{2.10}$$

$$u(0) = u_0, \tag{2.11}$$

ở đó $f \in C([0, T], H)$. Gọi ℓ là nghiệm duy nhất của phương trình tích phân

$$k_0 \ell + k * \ell = 1 \text{ trên } \mathbb{R}^+. \tag{2.12}$$

Theo giả thiết (Ha), tồn tại dãy tăng $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$,

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots, \lambda_n \to +\infty \text{ khi } n \to +\infty,$$

và các véctơ $\{e_n\}_{n=1}^\infty \subset D(A)$ sao cho $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ là một sở trực chuẩn của H và $Ae_n = \lambda_n e_n,$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Sử dụng phương pháp chuỗi Fourier, nghiệm của bài toán (2.10)-(2.11), được cho bởi

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t R(t-s)f(s)ds,$$

trong đó $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ và $\{R(t)\}_{t>0}$ được xác định bởi

$$S(t)z = \sum_{n=1}^\infty s_{\lambda_n}(t) z_n e_n, t \ge 0, R(t)z = \sum_{n=1}^\infty r_{\lambda_n}(t) z_n e_n, t > 0, z \in H, \text{ và}$$

$$\int_0^t R(t-s)f(s)ds = \sum_{n=1}^\infty \big(r_{\lambda_n} * f_n\big)(t) e_n,$$

với $s_{\lambda_n}, r_{\lambda_n}, n = 1, 2, \ldots$ là nghiệm duy nhất của phương trình

$$s_\mu(t) + \lambda_n\big(\ell * s_\mu\big)(t) = 1, \quad t \ge 0, \tag{2.13}$$

và

$$r_\mu(t) + \lambda_n\big(\ell * r_\mu\big)(t) = \ell(t), \quad t \ge 0. \tag{2.14}$$

2.2.3. Sự tồn tại nghiệm tích phân

Định nghĩa 2.2. Một hàm $u \in C([0, T]; H)$ được gọi là nghiệm tích phân của bài toán (2.8)-(2.9) trên $[0, T]$ nếu

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t R(t-s) f\big(u(s)\big)\, ds, \text{ với mọi } t \in [0, T].$$

Để nghiên cứu tính giải được của bài toán (2.8)-(2.9) chúng tôi đặt giả thiết sau trên số hạng phi tuyến f.

(Hf) Hàm $f : H \to H$ liên tục Lipschitz địa phương, nghĩa là

$$\|f(u_1) - f(u_2)\| \le L(r)\|u_1 - u_2\|, \forall u_1, u_2 \in B_r,$$

trong đó $L(r)$ thoả mãn $\limsup_{r\to 0} L(r) < \lambda_1$.

Định lí chính trong phần này được phát biểu như sau.

Định lí 2.4. *Giả sử các giả thiết* (Hk), (Ha) *và* (Hf) *được thoả mãn. Nếu* $f(0) = 0$*, thì tồn tại* $\delta > 0$ *sao cho với* $\|u_0\| \le \delta$ *bài toán* (2.8)-(2.9) *có duy nhất nghiệm tích phân trên* $[0, T]$.

Khi hàm phi tuyến f liên tục Lipschitz, ta cũng nhận được kết quả về tính giải được toàn cục của bài toán (2.8)-(2.9) mà không có bất kì ràng buộc nào về dữ kiện ban đầu.

Định lí 2.5. *Giả sử các giả thiết* (Hk), (Ha) *và* (Hf) *được thoả mãn với* $L(r)$ *là hằng số. Khi đó bài toán* (2.8)-(2.9) *có duy nhất nghiệm tích phân toàn cục.*

2.2.4. Tính hút trong thời gian hữu hạn

Kết quả chính trong phần này là định lí sau.

Định lí 2.6. *Giả sử các giả thiết của Định lí 2.4 được thoả mãn. Khi đó tồn tại số* $\delta > 0$ *sao cho mọi nghiệm* u *của* (2.8) *với* $\|u(0)\| \le \delta$ *hút mũ trên* $[0, T]$.

Trong trường hợp hàm phi tuyến f liên tục Lipschitz, ta thu được kết quả sau.

Định lí 2.7. *Giả sử các giả thiết của Định lí 2.5 được thoả mãn với* $L < \lambda_1$*. Khi đó mọi nghiệm của* (2.8) *hút mũ trên* $[0, T]$.

Sử dụng các điều kiện tương tự như khẳng định tính hút, chúng tôi chứng minh kết quả về tính giải được của bài toán giá trị biên sau:

$$\frac{d}{dt}\big(k_0 u + k * [u - u(0)]\big)(t) + Au(t) = f\big(u(t)\big), t \in (0, T] \tag{2.15}$$

$$u(0) = g(u), \tag{2.16}$$

trong đó hàm $g : C([0, T]; H) \to H$ thoả mãn giả thiết

(Hg) tồn tại số $\tau \in (0, T]$ sao cho

$$\|g(u_1) - g(u_2)\| \le \sup_{s\in[\tau,T]} \|u_1(s) - u_2(s)\|, \forall u_1, u_2 \in C([0, T]; H).$$

Một hàm $u \in C([0, T]; H)$ được gọi là nghiệm tích phân của bài toán (2.15)-(2.16) nếu u thoả mãn

$$u(t) = S(t)g(u) + \int_0^t R(t - s)f\big(u(s)\big)\, ds, \forall t \in [0, T].$$

Sau đây là kết quả về tính giải được của bài toán (2.15)-(2.16).

Định lí 2.8. *Giả sử các giả thiết của Định lí 2.5 và giả thiết* (Hg) *được thoả mãn. Khi đó bài toán* (2.15)-(2.16) *có nghiệm tích phân.*

2.2.5. Áp dụng

Cho $\alpha \in (0,1)$, xét bài toán

$$\begin{aligned}\partial_t u(x,t) + \partial_t^\alpha u(x,t) &= \partial_x^2 u(x,t)\\ &\quad + h\Big(\int_0^1 u^2(x,t)dx\Big)u(x,t), x\in(0,1), t\in(0,T] \quad (2.17)\\ u(0,t) = u(1,t) &= 0, t\ge 0, \quad (2.18)\\ u(x,0) &= \xi(x),\ x\in[0,1]. \quad (2.19)\end{aligned}$$

Trong mô hình trên, ∂_t^α là đạo hàm phân thứ Caputo cấp α, ∂_x là đạo hàm suy rộng theo biến x, $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ là một hàm phi tuyến. Kí hiệu $H = L^2(0,1)$. Tích vô hướng và chuẩn trong H cho bởi

$$(u,v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx, \qquad ||v|| = \Big(\int_0^1 |v(x)|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Kí hiệu $A = -\partial_x^2$ với miền xác định $D(A) = H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$. Ta biết rằng A với miền $D(A)$ là toán tử trù mật, xác định dương, tự liên hợp với giải thức compact trong H. Hơn nữa, các giá trị riêng của A là $\lambda_n = n^2\pi^2, n = 1,2,\ldots$, ứng với các véctơ riêng $e_n = \sqrt{2}\sin(nx), n\ge 1$. Rõ ràng $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ là một cơ sở trực chuẩn của H. Do đó giả thiết (Ha) được kiểm tra.

Kí hiệu

$$f(v)(x) = h\Big(\int_0^1 v^2(x)\,dx\Big)v(x), v\in L^2(0,1).$$

Rõ ràng, bài toán (2.17)-(2.19) là một mô hình của (2.8)-(2.9) với $k_0 = 1$, $k(t) = g_{1-\alpha}(t)$. Tính toán trực tiếp ta có $(-1)^n k^{(n)}(t)\ge 0, \forall n\in\mathbb{N}, t>0$ và do đó nhân k hoàn toàn đơn điệu. Hệ quả, giả thiết (Hk) được kiểm tra.

Liên quan tới số hạng phi tuyến trong (2.17), ta giả sử rằng hàm h thuộc $C^1(\mathbb{R}^+)$ và $|h(r)|\le a + br^\beta$, với a,b,β là các hằng số không âm. Khi đó, f ánh xạ $L^2(0,1)$ vào chính nó và với mọi $v_1, v_2\in L^2(0,1)$ mà $\|v_1\|, \|v_2\|\le r$, ta có

$$\|f(v_1)-f(v_2)\| \le \big(2r^2\sup_{z\in[0,r^2]}|h'(z)| + a + br^{2\beta}\big)\|v_1-v_2\|.$$

Do đó giả thiết (Hf) được thoả mãn với $L(r) = 2r^2\sup_{z\in[0,r^2]}|h'(z)| + a + br^{2\beta}$. Rõ ràng, $\lim\limits_{r\to 0} L(r) = a$. Do đó, nếu $a<\pi^2$, thì mọi nghiệm của (2.17)-(2.19) với dữ kiện ban đầu ξ đủ nhỏ là hút trên $[0,T]$.

Chương 3

TÍNH ỔN ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH TIẾN HOÁ LOẠI RAYLEIGH-STOKES NỬA TUYẾN TÍNH

Chương này, chúng tôi nghiên cứu tính giải được, tính ổn định tiệm cận và sự tồn tại nghiệm phân rã cho lớp phương loại Rayleigh-Stokes nửa tuyến tính. Các vấn đề nêu trên được nghiên cứu dựa trên tính chất của các hàm hoàn toàn dương, các ước lượng địa phương và định lí điểm bất động.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo tiền ấn phẩm [4] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

3.1. Đặt bài toán

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ là một miền bị chặn với biên $\partial\Omega$ trơn. Xét bài toán sau

$$\partial_t u - \Delta u - \partial_t(m * \Delta u) = f(t, u) \ \text{ trong } \Omega, t > 0, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{B}u = 0 \ \text{ trên } \partial\Omega, \ t \geq 0, \tag{3.2}$$

$$u(\cdot, 0) = \xi \ \text{ trong } \Omega, \tag{3.3}$$

ở đó $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ là một hàm không âm, f là hàm phi tuyến, $\xi \in L^2(\Omega)$ là dữ kiện ban đầu, $\mathcal{B}$ là toán tử biên thuộc một trong hai dạng sau

$$\mathcal{B}u = u \text{ hoặc } \mathcal{B}u = \nu \cdot \nabla u + \eta u, \ \eta > 0,$$

với ν là pháp tuyến ngoài đối với biên $\partial\Omega$.

3.2. Biểu diễn nghiệm của bài toán tuyến tính

Trong phần này, chúng tôi xây dựng công thức nghiệm cho bài toán tuyến tính

$$\partial_t u - \Delta u - \partial_t(m * \Delta u) = F \ \text{ trong } \Omega, t \in (0, T], \tag{3.4}$$

$$\mathcal{B}u = 0 \ \text{ trên } \partial\Omega, \ t \in [0, T], \tag{3.5}$$

$$u(\cdot, 0) = \xi \ \text{ trong } \Omega, \tag{3.6}$$

với $F \in C([0, T]; L^2(\Omega))$. Kí hiệu $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ là cơ sở trực chuẩn của $L^2(\Omega)$ bao gồm các hàm riêng của toán tử $-\Delta$ ứng với điều kiện biên thuần nhất, tức là

$$-\Delta\varphi_n = \lambda_n\varphi_n \text{ trong } \Omega, \ \mathcal{B}\varphi_n = 0 \text{ trên } \partial\Omega,$$

ở đây chúng ta giả thiết $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ..., \lambda_n \to \infty$ khi $n \to \infty$. Giả sử hàm $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ thoả mãn giả thiết

(M) *Hàm $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ không âm sao cho $a_\gamma(t) := 1 + \gamma m(t)$ là một hàm hoàn toàn dương với mỗi $\gamma > 0$.*

Khi đó, sử dụng phương pháp chuỗi Fourier, nghiệm của bài toán (3.4)-(3.6) cho bởi

$$u(\cdot,t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-\tau)F(\cdot,\tau)d\tau, \tag{3.7}$$

với $S(t)$ là *giải thức* xác định bởi

$$S(t)\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \omega(t,\lambda_n)\xi_n\varphi_n,\ \xi \in L^2(\Omega), \tag{3.8}$$

ở đó $\omega(t,\lambda_n), n = 1,2,\dots$ là nghiệm của bài toán

$$\omega'(t) + \lambda_n\omega(t) + \lambda_n(m*\omega)'(t) = 0 \text{ với } t > 0,\ \omega(0) = 1. \tag{3.9}$$

3.3. Tính giải được và tính ổn định nghiệm

Nghiệm tích phân cho bài toán (3.1)-(3.3) được định nghĩa như sau.

Định nghĩa 3.1. Hàm $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ được gọi là nghiệm tích phân của bài toán (3.1)-(3.3) trên đoạn $[0,T]$ nếu

$$u(\cdot,t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-\tau)f(\tau,u(\cdot,\tau))d\tau \text{ với mọi } t \in [0,T].$$

Định lí sau là kết quả về tính giải được toàn cục của bài toán (3.1)-(3.3).

Định lí 3.1. *Giả sử* (**M**) *được thỏa mãn và hàm phi tuyến* $f : [0,T] \times L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *có các tính chất*

(**F**1) *f liên tục sao cho $f(\cdot,0) = 0$ và $\|f(t,v_1) - f(t,v_2)\| \le \kappa(r)\|v_1 - v_2\|$ với mọi $v_1, v_2 \in B_r$, $t \in [0,T]$, ở đây B_r là hình cầu đóng trong $L^2(\Omega)$ có tâm tại điểm gốc và bán kính r, $\kappa(\cdot)$ là một hàm không âm sao cho $\limsup_{r\to 0} \kappa(r) = \ell \in [0,\lambda_1)$.*

Khi đó tồn tại $\delta > 0$ sao cho với $\|\xi\| \le \delta$, bài toán (3.1)-(3.3) *có duy nhất nghiệm tích phân trên đoạn $[0,T]$.*

Trong định lí tiếp theo, ta thu được kết quả về tính giải được toàn cục khi hàm phi tuyến tăng trưởng dưới tuyến tính.

Định lí 3.2. *Giả sử* (**M**) *được thỏa mãn với m là hàm không tăng. Giả sử thêm rằng f có tính chất*

(**F**2) *f liên tục và $\|f(t,v)\| \le p(t)\|v\| + q(t)$, với mọi $v \in L^2(\Omega)$, ở đây $p, q \in L^1(0,T)$ là các hàm không âm.*

Khi đó, bài toán (3.1)-(3.3) *có ít nhất một nghiệm tích phân trên đoạn $[0,T]$.*

Kết quả về tính ổn định nghiệm đối với bài toán (3.1)-(3.3) được cho trong định lí sau.

Định lí 3.3. *Giả sử* (**M**) *được thỏa mãn với m là hàm không tăng. Giả sử thêm rằng f có tính chất*

($\mathbf{F}2'$) *f liên tục và $\|f(t,v)\| \leq p(t)\|v\| + q(t)$, với mọi $v \in L^2(\Omega)$, ở đây $p \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ và $q \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ là các hàm không âm sao cho $\|p\|_\infty < \lambda_1$ và $\omega * q$ là hàm bị chặn.*

Khi đó tồn tại tập hấp thụ cho nghiệm của bài toán (3.1)-(3.3) *với dữ kiện ban đầu bất kì. Hơn nữa, nếu $q = 0$ thì nghiệm tầm thường của* (3.1) *ổn định tiệm cận.*

Định lí 3.4. *Giả sử các giả thiết của Định lí 3.1 được thỏa mãn với mọi $T > 0$. Khi đó nghiệm tầm thường của* (3.1) *ổn định tiệm cận.*

Xét trường hợp f có tính chất Lipschitz toàn cục, ta nhận được kết quả mạnh hơn sau đây.

Định lí 3.5. *Giả sử* (**M**) *được thỏa mãn. Nếu tồn tại $\kappa_0 \in [0, \lambda_1)$ sao cho*

$$\|f(t,v_1) - f(t,v_2)\| \leq \kappa_0\|v_1 - v_2\|, \text{ với mọi } t \in \mathbb{R}^+, v_1, v_2 \in L^2(\Omega),$$

thì mọi nghiệm của (3.1)-(3.3) *ổn định tiệm cận.*

3.4. Sự tồn tại nghiệm phân rã

Trong phần này ta xét bài toán (3.1)-(3.3) với giả thiết f không thỏa mãn điều kiện Lipschitz và có tăng trưởng trên tuyến tính. Cụ thể

($\mathbf{F}3$) $f : \mathbb{R}^+ \times L^2(\Omega)) \to L^2(\Omega)$ liên tục sao cho

$$\|f(t,v)\| \leq p(t)G(\|v\|), \ \forall t \in \mathbb{R}^+, v \in L^2(\Omega),$$

với $p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ là một hàm không âm và $G \in C(\mathbb{R}^+)$ là một hàm không âm, không tăng sao cho

$$\limsup_{r\to 0} \frac{G(r)}{r} \cdot \sup_{t\geq 0} \int_0^t \omega(t-\tau, \lambda_1)p(\tau)d\tau < 1, \tag{3.10}$$

và

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{t\geq T} \int_0^{\frac{t}{2}} \omega(t-\tau, \lambda_1)p(\tau)d\tau = 0. \tag{3.11}$$

Sử dụng định lí điểm bất động cho ánh xạ nén ta thu được kết quả sau.

Định lí 3.6. *Giả sử* (**M**) *và* (**F**3) *được thỏa mãn. Khi đó tồn tại $\delta > 0$ sao cho với $\|\xi\| \leq \delta$, bài toán* (3.1)-(3.3) *có một tập compact khác rỗng các nghiệm phân rã.*

Chương 4

BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH THAM SỐ TRONG BẤT ĐẲNG THỨC VI BIẾN PHÂN PHÂN THỨ

Chương này, chúng tôi nghiên cứu tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định cho bài toán xác định tham số trong bất đẳng thức vi biến phân phân thứ. Nội dung nghiên cứu này sẽ được thực hiện dựa trên phân tích tính chính quy nghiệm cho phương trình dưới khuếch tán và các định lí điểm bất động.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo [3] trong Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án.

4.1. Đặt bài toán

Cho X là không gian Banach, $\mathcal{U}$ là không gian Hilbert và $\mathcal{K}$ là tập con lồi đóng trong $\mathcal{U}$, chúng tôi xét bài toán xác định tham số (**FrIP**) sau: cho $\xi, \psi \in X$, tìm (x, u, z) thoả mãn bất đẳng thức vi biến phân phân thứ

$$D_0^\alpha x(t) = Ax(t) + B(u(t))z + h(x(t)), t \in (0, T], \tag{4.1}$$

$$\langle F(x(t)) + G(u(t)), v - u(t)\rangle \geq 0, \forall v \in \mathcal{K}, t \in [0, T], \tag{4.2}$$

$$x(0) = \xi, \tag{4.3}$$

và thoả mãn điều kiện

$$\int_0^T \varphi(s)x(s)ds = \psi, \tag{4.4}$$

trong đó (x, u) lấy giá trị trong $X \times \mathcal{U}$, $z \in X$; $D_0^\alpha, \alpha \in (0, 1)$, là đạo hàm phân thứ Caputo cấp α. Trong mô hình bài toán, A là toán tử tuyến tính đóng trên X, $\varphi \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ là hàm không âm, $B : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, $h : X \to X$, $F : X \to \mathcal{U}^*$, $G : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^*$ là các ánh xạ cho trước và $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là cặp đối ngẫu chính tắc giữa $\mathcal{U}$ và $\mathcal{U}^*$.

Mục đích của chương này là đưa ra một số điều kiện phù hợp để đảm bảo tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định Lipschitz đối với bài toán (**FrIP**) (4.1)-(4.4).

4.2. Tính giải được

Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán (**FrIP**), chúng tôi đặt các giả thiết sau:

(**A**) A là toán tử quạt và A sinh ra nửa nhóm compact sao cho

$$\|S(t)v\| \leq e^{-\beta t}\|v\|, \ \forall t \geq 0, v \in X,$$

trong đó β là số dương.

(**B**) $B : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ là hàm Lipschitz, nghĩa là tồn tại số dương $L_B > 0$ sao cho

$$\|B(u_1) - B(u_2)\| \leq L_B\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{U}}, \forall u_1, u_2 \in \mathcal{U},$$

và tồn tại số dương $m_B, M_B > 0$ sao cho $m_B \le B(v) \le M_B$ với mọi $v \in \mathcal{K}$.

(**F**) Toán tử $F : X \to \mathcal{U}^*$ liên tục Lipschitz với hệ số L_F,

$$\|F(y_1) - F(y_2)\|_{\mathcal{U}^*} \le L_F\|y_1 - y_2\|,\ \forall y_1, y_2 \in X.$$

(**G**) Toán tử $G : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^*$ được cho bởi

$$\langle G(u), v\rangle = b(u, v), \forall u, v \in \mathcal{U},$$

trong đó $b : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ là dạng song tuyến tính liên tục trên $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ và thoả mãn

$$b(u, u) \ge \eta_G\|u\|^2_{\mathcal{U}}, \forall u \in \mathcal{U},$$

ở đó $\eta_G > 0$.

(**H**) $h : X \to X$ là hàm Lipschitz với hệ số L_h,

$$\|h(y_1) - h(y_2)\| \le L_h\|y_1 - y_2\|,\ \forall y_1, y_2 \in X.$$

Đặt

$$\mathcal{U}_{ad} = \{u \in C([0, T]; \mathcal{U}) : \ u(t) \in \mathcal{K}, \forall t \in [0, T]\}.$$

Định nghĩa 4.1. Cho $\xi, z \in X$, một cặp $(x, u) \in C([0, T]; X) \times \mathcal{U}_{ad}$ được gọi là nghiệm cổ điển (tương ứng tích phân) của bài toán (4.1)-(4.3) nếu (x, u) thoả mãn (4.2) và x là nghiệm cổ điển (tương ứng tích phân) của bài toán

$$\begin{aligned} D^\alpha_0 x(t) &= Ax(t) + f(t),\ t \in (0, T],\\ x(0) &= \xi, \end{aligned}$$

với $f(t) = B(u(t))z + h(x(t))$.

Định nghĩa 4.2. Cho $\xi, \psi \in X$, bộ ba $(x, u, z) \in C([0, T]; X) \times \mathcal{U}_{ad} \times X$ được gọi là nghiệm của bài toán (**FrIP**) nếu (x, u) là nghiệm cổ điển của (4.1)-(4.3) và x thoả mãn (4.4).

Kết quả chính của phần này là định lí sau.

Định lí 4.1. *Giả sử các giả thiết* (**A**), (**B**), (**F**), (**G**) *và* (**H**) *được thoả mãn. Khi đó, nếu*

$$\frac{M_B(L_\varphi + L_h\|\varphi\|_{L^1})}{m_B\|\varphi\|_{L^1}} + L_h < \beta, \tag{4.5}$$

thì bài toán (**FrIP**) *có nghiệm, trong đó* $L_\varphi = \frac{T^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}(|\varphi(T)| + T\sup_{t\in[0,T]}|\varphi'(t)|)$,

4.3. Tính duy nhất và tính ổn định

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu ánh xạ $(\xi, \psi) \mapsto (x, u, z)$, trong đó (x, u, z) là nghiệm của (**FrIP**) ứng với dữ kiện (ξ, ψ).

Bổ đề 4.1. *Giả sử các giả thiết* (**A**), (**B**), (**F**), (**G**), (**H**), *và* (4.5) *được thoả mãn. Kí hiệu* (x,u,z) *là nghiệm của* (**FrIP**) *tương ứng với cặp* (ξ,ψ). *Khi đó tồn tại* $\rho_0 = \rho_0(\xi,\psi) > 0$ *sao cho* $\|x\|_\infty \le \rho_0$. *Hơn nữa, nếu* $(\hat{x},\hat{u},\hat{z})$ *là một nghiệm khác của* (**FrIP**) *ứng với* $(\hat{\xi},\hat{\psi})$, *thì tồn tại các số dương* δ *và* $\rho = \rho(\xi,\psi,\hat{\xi},\hat{\psi})$ *sao cho*

$$\|x-\hat{x}\|_\infty \le \rho\left(\|\xi-\hat{\xi}\| + \|\psi-\hat{\psi}\|_{D(A)}\right),$$

nếu $L_F < \delta$.

Chúng tôi thu được kết quả về tính duy nhất và tính ổn định nghiệm của bài toán (**FrIP**).

Định lí 4.2. *Nếu các giả thiết của Bổ đề 4.1 được thoả mãn thì với mỗi* (ξ,ψ) *bài toán* (**FrIP**) *có duy nhất nghiệm. Hơn nữa ánh xạ nghiệm* $(\xi,\psi)\to(x,u,z)$ *liên tục Lipschitz địa phương từ* $X\times D(A)$ *tới* $C([0,T];X)\times C([0,T];\mathcal{U})\times X$.

4.4. Áp dụng

Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N, N\ge 1$, với biên $\partial\Omega$ trơn. Giả sử $\varrho\in H^2(\Omega)$ là một hàm không âm. Kí hiệu

$$\mathcal{K} := \{v\in L^2(\Omega) : v(x)\ge \varrho(x) \text{ với hầu khắp } x\in\Omega\}.$$

Xét bài toán: tìm $z\in L^2(\Omega)$ và $Y,u\in C([0,T];L^2(\Omega))$ thoả mãn

$$\partial_t^\alpha Y(t,x) = \Delta_x Y(t,x) + z(x)\int_\Omega Q(y,u(t,y))dy + \tilde{h}(x,Y(t,x)), x\in\Omega, \tag{4.6}$$

$$-\Delta_x u(t,x) + W(u(t,x)-\varrho(x)) \ni f(x,Y(t,x)), x\in\Omega, \tag{4.7}$$

$$Y(t,x) = u(t,x) = 0, x\in\partial\Omega, \tag{4.8}$$

$$Y(0,x) = \xi(x),\ x\in\Omega, \tag{4.9}$$

và điều kiện đo

$$\frac{1}{T}\int_0^T Y(t,x)\,dt = \psi(x), x\in\Omega, \tag{4.10}$$

trong đó ∂_t^α là đạo hàm phân thứ Caputo cấp α theo biến thời gian t, $W:\mathbb{R}\to 2^{\mathbb{R}}$ là ánh xạ đơn điệu cực đại,

$$W(r) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } r>0,\\ \mathbb{R}^- & \text{nếu } r=0,\\ \emptyset & \text{nếu } r<0.\end{cases}$$

Rõ ràng, hàm $\varphi(t) = T^{-1}$ là hàm khả vi, không âm trên $[0,T]$, $\xi,\psi\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Đặt $X=\mathcal{U}=L^2(\Omega)$. Chuẩn trong X và $\mathcal{U}$ cho bởi $\|u\|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2\,dx$. Xét hàm

$$\begin{aligned} &B:\mathcal{U}\to\mathbb{R},\\ &B(v) = \int_\Omega Q(y,v(y))dy. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Khi đó (4.6) được biểu diễn dưới dạng

$$\partial_t^\alpha Y(t) = AY(t) + B(u(t))z + h(Y(t)), t \in [0,1],$$

trong đó $A = \Delta, D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), Y(t) \in X, u(t) \in \mathcal{U}$ sao cho $Y(t)(x) = Y(t,x), u(t)(x) = u(t,x)$, và $h : X \to X$ xác định bởi

$$h(v)(x) = \tilde{h}(x, v(x)),\ x \in \Omega. \tag{4.12}$$

Do Định lí 7.2.5 và Định lí 7.2.8 trong Vrabie (2003), A là phần tử sinh của một nửa nhóm giải tích, compact $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ trên X. Hơn nữa $\|S(t)\| \leq e^{-\lambda_1 t}$, $\forall t \geq 0$, trong đó λ_1 cho bởi công thức $\lambda_1 = \sup_{\|u\|=1} \|\nabla u\| > 0$.

Xét (4.7). Đặt $G = -\Delta$, trong đó $-\Delta$ là toán tử Laplace xác định bởi

$$\langle -\Delta u, v\rangle := \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx, \text{ for all } u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Khi đó $\langle Gu, u\rangle = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \geq \lambda_1 \|u\|^2$. Vì thế giả thiết (**G**) thoả mãn với $\eta_G = \lambda_1$.

Xét ánh xạ $F : X \to X$ được xác định bởi

$$F(v)(x) = f(x, v(x)),\ x \in \Omega. \tag{4.13}$$

Lập luận tương tự như Barbu (2010), Mệnh đề 2.11, bao hàm thức (4.7) được viết dưới dạng $-\Delta u(t) + \partial I_{\mathcal{K}}(u(t)) \ni F(Y(t))$, trong đó

$$\begin{aligned}\partial I_{\mathcal{K}}(u) &= \{v \in L^2(\Omega) : \int_\Omega v(x)(u(x) - z(x))\, dx \geq 0, \forall z \in \mathcal{K}\} \\ &= \{v \in L^2(\Omega) : v(x) \in W(u(x) - \varrho(x)),\ \text{với hầu khắp } x \in \Omega\}.\end{aligned}$$

Giả sử rằng các hàm phi tuyến Q, $\tilde{h}$ và f xuất hiện trong phương trình (4.6)-(4.7) là các hàm Carathéodory xác định trên $\Omega \times \mathbb{R}$ và tồn tại các hàm không âm $p \in L^1(\Omega)$, $q, k, \ell \in L^2(\Omega)$ sao cho

(N1) Hàm $Q(x, \cdot)$ không giảm và $Q(x,r) \leq p(x)$, $\forall (x,r) \in \Omega \times \mathbb{R}$,

(N2) $|Q(x,r) - Q(x,s)| \leq q(x)|r-s|, \forall (x,r) \in \Omega \times \mathbb{R}$,

(N3) $|\tilde{h}(x,r) - \tilde{h}(x,s)| \leq k(x)|r-s|, \forall (x,r) \in \Omega \times \mathbb{R}$,

(N4) $|f(x,r) - f(x,s)| \leq \ell(x)|r-s|, \forall (x,r) \in \Omega \times \mathbb{R}$.

Khi đó từ (N1)-(N2) hàm B cho bởi (4.11) thoả mãn các ước lượng sau

$$\begin{aligned}B(v) &\leq M_B := \int_\Omega p(x)dx,\ \forall v \in X \\ B(v) &\geq m_B := \int_\Omega Q(y, \varrho(y))dy,\ \forall v \in \mathcal{K}, \\ |B(v_1) - B(v_2)| &\leq L_B \|v_1 - v_2\|,\ \forall v_1, v_2 \in X,\end{aligned}$$

trong đó $L_B = \|q\|$. Do đó giả thiết (**B**) được thoả mãn nếu $m_B > 0$.

Sử dụng (N3), ta thấy hàm h cho bởi (4.12) liên tục Lipschitz

$$\|h(v_1) - h(v_2)\| \leq L_h \|v_1 - v_2\|, \ \forall v_1, v_2 \in X,$$

trong đó $L_h = \|k\|$. Tương tự, theo (N4), hàm F được xác định bởi (4.13) là hàm Lipschitz với hệ số $L_F = \|\ell\|$. Do đó các giả thiết (**H**) và (**F**) được thoả mãn. Theo Định lí 4.1 và 4.2, chúng tôi thu được kết quả sau.

Định lí 4.3. *Giả sử* (N1)-(N4) *được thoả mãn. Khi đó bài toán* (4.6)-(4.10) *có duy nhất nghiệm và ánh xạ nghiệm* $(\xi, \psi) \mapsto (Y, u, z)$ *Lipschitz địa phương từ* $X \times D(A)$ *tới* $C([0, T]; X) \times C([0, T]; X) \times X$*, nếu*

$$M_B(T^{-\alpha}\Gamma(2-\alpha)^{-1} + \|k\|) + m_B\|k\| < \lambda_1 m_B,$$

và $\|\ell\|$ *đủ nhỏ.*

Nhận xét 4.1. Chú ý rằng, hệ (4.6)-(4.9) là hệ parabolic-elliptic suy rộng. Nếu ta chọn $\mathcal{K} = L^2(\Omega)$, thì $\partial I_{\mathcal{K}}(u) = \{0\}$. Khi đó ràng buộc (4.7) viết lại ở dạng

$$u(t, x) = \mathbb{V}(Y)(t, x) = (-\Delta_x)^{-1} f(x, Y(t, x)).$$

Từ đó phương trình (4.6) trở thành

$$\partial_t^\alpha Y = \Delta Y + \mathcal{Q}(Y)z + h(Y).$$

Bài toán (**FrIP**) (4.6)-(4.10) trở thành bài toán xác định tham số trong phương trình dưới khuếch tán.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu dáng điệu nghiệm của một số lớp NDE nửa tuyến tính: lớp phương trình dưới khuếch tán, lớp phương trình loại Basset và lớp phương trình loại Rayleigh-Stokes. Cụ thể, luận án đã đạt được các kết quả sau:

(a) Đối với lớp phương trình dưới khuếch tán và lớp phương trình loại Basset xác định trên khoảng thời gian bị chặn, nhận được:

- Kết quả về tính giải được với phần phi tuyến có tăng trưởng trên tuyến tính; Tính hút và hút mũ cho nghiệm tầm thường và nghiệm tuỳ ý.
- Áp dụng kết quả lí thuyết cho hai lớp phương trình đạo riêng trong miền bị chặn.

(b) Đối với phương trình loại Rayleigh-Stokes, nhận được:

- Sự tồn tại nghiệm trong trường hợp phần phi tuyến có tăng trưởng trên tuyến tính.
- Tính ổn định tiệm cận của nghiệm tầm thường; Sự tồn tại nghiệm phân rã.

(c) Đối với bài toán xác định tham số trong bất đẳng thức vi biến phân phân thứ, nhận được:

- Tính giải được, tính duy nhất và tính ổn định Lipschitz.
- Áp dụng kết quả lí thuyết cho hệ parabolic-elliptic suy rộng trong miền bị chặn.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Đối với các lớp phương trình NDE đã xét trong luận án, ta có thể nghiên cứu thêm một số vấn đề sau đây:

- Nghiên cứu tính ổn định hoặc ổn định yếu khi xuất hiện số hạng trễ hoặc xung.
- Nghiên cứu sự tồn tại, tính ổn định của bài toán ngược: bài toán xác định tham số, bài toán giá trị cuối.
- Nghiên cứu tính chính quy nghiệm và sự hội tụ về điểm cân bằng.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. T.D. Ke, T.V. Tuan, (2018), Finite-time attractivity for semilinear fractional differential equations, *Results Math.*, 73:7, 19 pp.

2. T.V. Tuan, (2020), Short-time behavior for a class of semilinear nonlocal evolution equations in Hilbert spaces, *Appl. Anal. Optim.*, accepted.

3. T.D. Ke, T.V. Tuan, (2020), An identification problem involving fractional differential variational inequalities, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, doi: 10.1515/jiip-2017-0103, accepted.

4. T.D. Ke, T.V. Tuan, (2020), Stability analysis for a class of semilinear nonlocal evolution equations, *submitted.*

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại:

- Xêmina Giải tích của Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2;
- Xêmina của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội;
- Hội thảo cho Nghiên cứu sinh, Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, 2017, 2018, 2019.