

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

LƯƠNG THỊ THÊU

NGHIÊN CỨU HIỆU ỨNG CASIMIR
TRONG HỆ NGỪNG TỤ BOSE-EINSTEIN

Chuyên ngành: Vật lý lý thuyết và vật lý toán

Mã số: 9 44 01 03

Người hướng dẫn: PGS. TS. Nguyễn Văn Thụ

PGS. TS. Lưu Thị Kim Thanh

Hà Nội - 2020

LỜI CẢM ƠN

Trước tiên, tác giả luận án xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với cố **GS. TSKH. Nguyễn Ái Việt**, người đã dẫn dắt tác giả đến với con đường nghiên cứu khoa học.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn **PGS. TS. Nguyễn Văn Thụ**, thầy hướng dẫn khoa học. Sự hướng dẫn tận tụy và những động viên khích lệ của thầy là nguồn động lực to lớn cho tác giả trong suốt quá trình hoàn thành chương trình đào tạo và thực hiện luận án. Thầy mãi là tấm gương sáng về đạo đức, về tinh thần làm việc nghiêm túc và cống hiến hết mình vì khoa học để tác giả học tập và noi theo.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn PGS. TS. Lưu Thị Kim Thanh, cô đã tận tình hướng dẫn và cùng thảo luận giúp đỡ tác giả hoàn thành luận án.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn các bạn cùng nhóm nghiên cứu, TS. Phạm Thế Song, ThS. Hoàng Văn Quyết, ThS. Nguyễn Thị Thắm đã nhiệt tình giúp đỡ, cùng thảo luận về luận án và các vấn đề nghiên cứu liên quan.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, Khoa Vật lý, Phòng Đào tạo - Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 đã giúp đỡ và tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất để tác giả hoàn thành chương

trình đào tạo và luận án.

Tác giả xin gửi lời cảm ơn đến người chồng thân yêu, người đã động viên, tạo mọi điều kiện và khơi nguồn cảm hứng cho tôi hoàn thành con đường học vị của mình.

Con xin bày tỏ lòng biết ơn vô hạn đối với Cha và Mẹ, người đã cho con được thấy ánh sáng Mặt Trời, cho con nghị lực vượt qua mọi khó khăn và trở ngại. Gia đình luôn là nguồn động lực to lớn cho tôi trên con đường nghiên cứu khoa học đầy gian nan và thử thách.

Hà Nội, tháng 02 năm 2020

Tác giả

Lương Thị Thêu

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan luận án này là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Nguyễn Văn Thụ và PGS. TS. Lưu Thị Kim Thanh. Các kết quả nghiên cứu của luận án là trung thực và chưa từng công bố trên bất kì công trình nào trước đây.

Trong quá trình nghiên cứu thực hiện luận án, tôi đã kế thừa những thành tựu của các nhà khoa học với sự trân trọng và biết ơn. Các thông tin trích dẫn và tài liệu tham khảo đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Hà Nội, tháng 02 năm 2020

Tác giả

Lương Thị Thêu

Mục lục

Mở đầu	1
Chương 1: Hệ thống lý thuyết nghiên cứu về lực Casimir	9
1.1 Tổng quan về lực Casimir	9
1.1.1 Dao động điểm không và biểu hiện của chúng	9
1.1.2 Hiệu ứng Casimir	11
1.2 Tình hình nghiên cứu lực Casimir trong ngưng tụ Bose-Einstein	17
1.2.1 Ngưng tụ Bose-Einstein	17
1.2.2 Tổng quan về nghiên cứu hiệu ứng Casimir trong BEC	19
1.2.3 Lý thuyết Gross-Pitaevskii	25
1.2.4 Gần đúng parabol kép	30
1.2.5 Tác dụng hiệu dụng Cornwall-Jackiw-Tombolis	33
Chương 2: Hiệu ứng Casimir trong ngưng tụ Bose-Einstein một thành phần	39
2.1 Nghiên cứu lực Casimir-like	39
2.1.1 Trạng thái cơ bản	40

2.1.2	Lực Casimir-like trong GCE	41
2.1.3	Lực Casimir-like trong CE	44
2.2	Lực Casimir	47
2.2.1	Nghiên cứu trong gần đúng một vòng	49
2.2.2	Nghiên cứu trong gần đúng hai vòng	58
Chương 3: Hiệu ứng Casimir trong ngưng tụ Bose-Einstein		
hai thành phần		
3.1	Nghiên cứu lực Casimir-like	67
3.1.1	Trạng thái cơ bản	67
3.1.2	Lực Casimir-like	73
3.2	Lực Casimir	80
3.2.1	Nghiên cứu trong gần đúng một vòng	82
3.2.2	Nghiên cứu trong gần đúng hai vòng	89
Kết luận		99
Danh sách các công trình công bố kết quả nghiên cứu của luận án		101
Tài liệu tham khảo		102

Danh sách từ viết tắt

Ký hiệu	Tiếng Anh	Tiếng Việt
BEC	Bose-Einstein condensate	ngưng tụ Bose-Einstein
GCE	Grand canonical ensemble	tập hợp chính tắc lớn
CE	Canonical ensemble	tập hợp chính tắc
GP	Gross-Pitaevskii	Gross-Pitaevskii
GPE(s)	Gross-Pitaevskii equations	(hệ) phương trình Gross-Pitaevskii
DPA	Double-parabola approximation	gần đúng parabol kép
CJT	Cornwall-Jackiw-Tombolis	Cornwall-Jackiw-Tombolis
SD	Schwinger-Dyson	Schwinger-Dyson
UV	Ultra-violet	Tử ngoại
HF	Hartree-Fock	Hartree-Fock
IHF	Improved-Hartree-Fock	Hartree-Fock cải tiến

Danh sách hình vẽ

1.1	Lực Casimir giữa hai tấm phẳng mỏng song song [35].	14
1.2	Thế tương tác theo tham số trật tự ϕ	32
2.1	Sự phụ thuộc của tham số trật tự theo tọa độ.	41
2.2	Sự phụ thuộc của sức căng bề mặt vào L trong GCE.	42
2.3	Sự phụ thuộc của lực Casimir-like vào L trong GCE.	43
2.4	Sự phụ thuộc của sức căng bề mặt vào L trong CE.	46
2.5	Sự phụ thuộc của lực Casimir-like vào L trong CE.	47
2.6	Sự phụ thuộc của lực Casimir vào L trong GCE.	53
2.7	Sự phụ thuộc của lực Casimir toàn phần vào L trong GCE.	54
2.8	Sự phụ thuộc của lực Casimir vào L trong CE.	56
2.9	Sự phụ thuộc của lực Casimir toàn phần vào L trong CE.	56
2.10	Sự phụ thuộc của tổng năng lượng vào L trong CE.	57
2.11	Sự phụ thuộc của tham số trật tự vào L trong gần đúng hai vòng.	63
3.1	Hàm sóng ở trạng thái cơ bản ứng với $K = 3$ và $\xi = 1$	72
3.2	Hàm sóng ở trạng thái cơ bản ứng với $K \rightarrow \infty$ và $\xi = 1$	72

3.3	Sự biến thiên sức căng mặt phân cách theo $1/K$ tại $L = 10$ khi $\xi = 0.5$ (đường màu đen), $\xi = 1$ (đường màu đỏ) và $\xi = 3$ (đường màu xanh).	75
3.4	Sự biến thiên của sức căng mặt phân cách theo L tại $\xi = 1$. Đường nét liền, nét gạch và nét chấm lượn ứng với $K = 1.1, K = 2$ và $K = 3$	77
3.5	Sự biến thiên của sức căng mặt phân cách theo L tại $\xi = 3$. Đường nét liền, nét gạch và nét chấm lượn ứng với $K = 1.1, K = 2$ và $K = 3$	78
3.6	Sự phụ thuộc của lực tác dụng lên một đơn vị diện tích tường cứng theo L tại $\xi = 1$. Các đường nét liền, nét gạch và nét chấm lượn ứng với $K = 1.1, K = 2$ và $K = 3$. . .	79
3.7	Sự phụ thuộc của lực tác dụng lên một đơn vị diện tích tường cứng theo L tại $\xi = 3$. Các đường nét liền, nét gạch và nét chấm lượn ứng với $K = 1.1, K = 2$ và $K = 3$. . .	79
3.8	Sự phụ thuộc của lực Casimir vào khoảng cách \bar{L} tại $K = 0.5$ (đường màu đỏ), $K = 1$ (đường màu xanh lá) và $K = 1.5$ (đường màu xanh lam).	88
3.9	Sự phụ thuộc của lực Casimir vào tham số tương tác tại $\bar{L} = 1$ (đường màu đỏ), $\bar{L} = 2$ (đường màu xanh lá) và $\bar{L} = 3$ (đường màu xanh lam).	89
3.10	Sự phụ thuộc của các tham số trật tự không thứ nguyên và khoảng cách ℓ cho rubidium (đường màu đỏ) và caesium (đường màu xanh).	95

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài

Vào năm 1948, khi nghiên cứu về lực tương tác giữa hai nguyên tử trung hòa, H. B.G. Casimir [16, 17] đã nhận thấy rằng lực tương tác chậm London-van der Waals có biểu hiện như điểm không năng lượng (zero-point energy) của trường điện từ. Kết quả cũng tương tự khi ông và cộng sự nghiên cứu lực tương tác giữa hai tấm kim loại phẳng, trung hòa, đặt song song với nhau trong trường điện từ. Đây chính là hiệu ứng Casimir, một hiệu ứng hoàn toàn mới ở thời điểm đó. Mặc dù vậy, trong suốt một thời gian dài sau đó, hiệu ứng này không được các nhà nghiên cứu quan tâm. Phải đến những năm 1970 trở về sau, các nhà vật lý mới bắt đầu chú ý đến hiệu ứng Casimir và nghiên cứu nó trong các hệ vật lý khác nhau. Hiệu ứng Casimir là một vấn đề liên ngành, phạm vi áp dụng của nó rất rộng, từ vũ trụ học cho đến vật lý các môi trường đông đặc, đặc biệt là vật lý nano và công nghệ chế tạo vật liệu nano.

Trong lý thuyết trường lượng tử, hiệu ứng Casimir có ba ứng dụng chính: Mô hình hadron trong sắc động học lượng tử, năng lượng Casimir của quark và gluon đóng góp đáng kể vào năng lượng nucleon trong mô hình túi cho nucleon. Trong lý thuyết của Kaluza-Klein, hiệu ứng Casimir

cung cấp cơ chế hữu ích cho sự co tự phát (spontaneous compactification) của các chiều không gian phụ (extra dimensions). Việc đo lực Casimir tạo cơ hội để tìm được sự ràng buộc mạnh mẽ của các tham số tương tác tầm xa và hạt cơ bản nhẹ mà lý thuyết gauge thống nhất, siêu đối xứng, siêu hấp dẫn và lý thuyết dây đã tiên đoán.

Trong vật lý các môi trường đậm đặc, chẳng hạn ở vật liệu siêu dẫn [10, 19], hiệu ứng Casimir dẫn đến lực hút hoặc lực đẩy giữa các mặt giới hạn của màng vật liệu siêu dẫn, lực này phụ thuộc vào dạng hình học, nhiệt độ và thuộc tính điện, cơ của bề mặt vật liệu. Ở kích thước vài nano lực Casimir trội hơn các lực khác rất nhiều. Rõ ràng, lực Casimir có ảnh hưởng quan trọng đến sự gia công và sản xuất các thiết bị nano.

Trong lý thuyết hấp dẫn, thiên văn và vũ trụ học [59], hiệu ứng Casimir phát sinh trong không - thời gian với tôpô phi Euclide. Sự phân cực chân không từ hiệu ứng có thể thúc đẩy quá trình lạm phát (inflation) của vũ trụ. Trong lý thuyết về sự hình thành cấu trúc của vũ trụ, do các tôpô khuyết tật, hiệu ứng phân cực chân không Casimir gần các dây vũ trụ đóng một vai trò quan trọng.

Trong vật lý nguyên tử [5], tương tác Casimir tầm xa dẫn đến sự dịch chuyển các mức năng lượng trong trạng thái nguyên tử. Tương tự, đối với môi trường chất hạt nhân, hiệu ứng kích thước hữu hạn đã được nghiên cứu trong công trình [56] và chỉ ra rằng nó làm thay đổi đáng kể các quá trình chuyển pha trong chất hạt nhân.

Trong vật lý toán, việc nghiên cứu hiệu ứng Casimir thúc đẩy sự phát

triển của kỹ thuật tái chuẩn hóa bằng cách sử dụng hàm tắt nhanh ζ [63] cũng như trong các nghiên cứu vật lý toán khác [6, 50, 73].

Đối với môi trường BEC, mặc dù được dự đoán từ năm 1925 nhưng các nghiên cứu về nó chỉ thực sự bùng nổ từ những năm 1995 cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm, đặc biệt là sau thực nghiệm tạo ra được hệ BEC hai thành phần [71]. Tuy nhiên, nghiên cứu về hiệu ứng kích thước hữu hạn nói chung và hiệu ứng Casimir nói riêng trong môi trường này chỉ mới được chú ý đến từ những năm 2000 trở lại đây. Sau những thành công của thực nghiệm đo lực Casimir tới hạn trong chất lỏng lượng tử [29, 30] và lực Casimir-Polder [34, 41, 52] trong môi trường BEC thì các nghiên cứu về hiệu ứng kích thước hữu hạn trong hệ BEC mới thực sự bùng nổ. Do môi trường BEC có thể coi là một chất lỏng lượng tử nên tồn tại năng lượng bề mặt mà tương ứng với nó là sự xuất hiện lực căng bề mặt, nó được xem là thành phần trường trung bình của lực Casimir [13]. Vì lí do này mà ảnh hưởng của sự co gọn không gian trong môi trường BEC thường được nghiên cứu ở hai khía cạnh: thứ nhất là lực Casimir trường trung bình gây ra khi hệ BEC bị giam trong không gian giới hạn bởi các tường cứng, còn được gọi là hiệu ứng Casimir-like (tương ứng với nó là lực Casimir-like) [13, 61, 74, 75]; thứ hai là hiệu ứng gây ra bởi các thăng giáng lượng tử lên trạng thái cơ bản của hệ và nguyên nhân là do các kích thích phonon trên bề mặt của hệ, còn được gọi là thành phần thăng giáng lượng tử của lực Casimir [13, 66]. Trong luận án này, chúng tôi thống nhất gọi thành phần trường trung bình của lực Casimir là lực Casimir-like, còn thành phần thăng giáng lượng

tử của lực Casimir được gọi tắt là lực Casimir.

Trước hết, ta hãy nói về hiệu ứng Casimir-like. Đối với hệ các hạt Bose lý tưởng, dựa trên thống kê Bose-Einstein, S. Biswas [12] đã tính lực Casimir-like cho các miền khác nhau của nhiệt độ, kể cả miền nhiệt độ lớn hơn nhiều so với nhiệt độ tới hạn. Đối với hệ Bose loãng, việc tính toán lực Casimir-like đã được thực hiện bởi một số tác giả của các công trình [13,61]. Lực Casimir-like cũng được khảo sát đối với hệ BEC hai thành phần trong gần đúng DPA ở trạng thái tới hạn demixing [74].

Đối với thành phần lực Casimir gây ra bởi các thăng giáng lượng tử, các nghiên cứu hiện có tương đối phong phú. Tuy nhiên, điểm hạn chế của các nghiên cứu này là:

- Các tính toán mới chỉ thực hiện được trong gần đúng một vòng. Chính vì lý do này, các nghiên cứu hiện có mới chỉ tập trung khảo sát lực Casimir, trong khi còn nhiều đại lượng vật lý khác của hệ cũng bị ảnh hưởng bởi hiệu ứng kích thước hữu hạn.

- Chỉ khảo sát với hệ BEC một thành phần. Đối với hệ BEC hai thành phần, do xuất hiện thêm tương tác giữa các hạt ở hai thành phần khác nhau nên sẽ dẫn đến nhiều kết quả quan trọng. Mặc dù vậy, theo hiểu biết của chúng tôi, đây vẫn còn là lĩnh vực chưa được quan tâm.

- Chỉ khảo sát trong thống kê chính tắc lớn.

Chính vì những lý do trên chúng tôi đã lựa chọn đề tài của luận án là **“Nghiên cứu hiệu ứng Casimir trong hệ ngưng tụ Bose-Einstein”**.

2. Mục đích nghiên cứu

Với mục đích khảo sát ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước hữu hạn lên các tính chất của hệ BEC, trên cơ sở đó góp phần định hướng cho các nghiên cứu thực nghiệm về hiệu ứng Casimir trong môi trường BEC, trong luận án này, chúng tôi đặt ra hai mục đích nghiên cứu chính như sau:

- Nghiên cứu ảnh hưởng của sự co gọn một chiều không gian lên các tính chất của BEC một thành phần.
- Nghiên cứu ảnh hưởng của sự co gọn một chiều không gian lên các tính chất của BEC hai thành phần, đặc biệt là làm rõ vai trò của tương tác giữa các hạt ở hai thành phần khác nhau.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án bao gồm hai hệ vật lý:

- Hệ BEC một thành phần.
- Hệ BEC hai thành phần.

Các hệ BEC này bị giam giữa hai tường cứng đặt song song với nhau và kết nối (không kết nối) với bể hạt bên ngoài, tức là hệ tương ứng với tập hợp thống kê GCE (CE). Với đối tượng nghiên cứu như trên chúng tôi giới hạn phạm vi nghiên cứu của luận án ở các khía cạnh sau:

- Nghiên cứu hệ BEC một thành phần trong thống kê chính tắc và thống kê chính tắc lớn.
- Với hệ BEC hai thành phần, do tính phức tạp của các tính toán

toán học nên chúng tôi chỉ khảo sát trong thống kê chính tắc lớn.

Với hệ nghiên cứu như vậy, hiệu ứng Casimir phụ thuộc vào điều kiện biên, tương tác giữa các hạt trong hệ, nhiệt độ và trường ngoài. Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu hệ ở nhiệt độ gần nhiệt độ không tuyệt đối và không có trường ngoài.

4. Nhiệm vụ nghiên cứu

Với hai mục đích cụ thể như đã đề cập ở trên, nhiệm vụ nghiên cứu được đặt ra cụ thể như sau:

a. Hệ BEC một thành phần:

- Tìm hàm sóng mô tả trạng thái cơ bản dựa trên phương trình GP.
- Tính năng lượng mặt ngoài và lực Casimir-like.
- Nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước hữu hạn lên năng lượng Casimir và lực Casimir trong gần đúng một vòng và gần đúng hai vòng.
- Nghiên cứu lực Casimir toàn phần, là tổng hợp của lực Casimir lưỡng tử và lực Casimir trường trung bình.

Những khảo sát ở trên được thực hiện trong cả thống kê chính tắc và thống kê chính tắc lớn.

b. Hệ BEC hai thành phần:

- Sử dụng gần đúng DPA để nghiên cứu năng lượng mặt ngoài và lực Casimir-like.
- Nghiên cứu lực Casimir trong gần đúng một vòng và gần đúng hai vòng.

Như đã trình bày ở trên, đối với hệ BEC hai thành phần chúng tôi chỉ nghiên cứu trong thống kê chính tắc lớn.

5. Phương pháp nghiên cứu

Để thực hiện được các nghiên cứu ở trên, chúng tôi lựa chọn phương pháp nghiên cứu như sau:

- Khi nghiên cứu lực Casimir-like chúng tôi sử dụng phương pháp gần đúng trường trung bình đối với hệ BEC một và hai thành phần. Ở nhiệt độ không, trạng thái cơ bản của hệ được mô tả bởi (hệ) phương trình GP. Tuy nhiên do tính chất phi tuyến của (hệ) phương trình GP nên gần đúng DPA được áp dụng với mục tiêu tìm ra nghiệm giải tích, tức là biểu thức giải tích của hàm sóng mô tả trạng thái cơ bản của hệ. Trong các nghiên cứu này, hệ không bị ảnh hưởng bởi trường ngoài đồng thời các thăng giáng lượng tử cũng được bỏ qua.

- Để nghiên cứu lực Casimir, chúng tôi sử dụng phương pháp tác dụng hiệu dụng CJT.

6. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của luận án

Những kết quả mà luận án thu được đóng góp một phần rất quan trọng vào những kết quả nghiên cứu về lực Casimir và những ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước hữu hạn lên tính chất vật lý của hệ BEC bị giới hạn bởi các tường cứng. Đồng thời cũng góp phần vào những nghiên cứu mới về BEC ở Việt Nam cũng như trên thế giới.

7. Cấu trúc của luận án

Ngoài phần mở đầu và kết luận, nội dung chính của luận án được trình bày trong ba chương:

Chương 1. Hệ thống lý thuyết nghiên cứu về lực Casimir

Trình bày tổng quan về hiệu ứng Casimir, các nghiên cứu về BEC và tình hình nghiên cứu lực Casimir trong môi trường BEC. Đồng thời, Chương 1 cũng trình bày các lý thuyết liên quan đến các nghiên cứu của luận án trong Chương 2 và Chương 3 như: lý thuyết GP, phương pháp DPA và phương pháp tác dụng hiệu dụng CJT.

Chương 2. Lực Casimir trong ngưng tụ Bose-Einstein một thành phần

Sử dụng phương pháp gần đúng parabol kép, gần đúng một vòng và hai vòng, chúng tôi nghiên cứu ảnh hưởng của kích thước lên lực Casimir-like, lực Casimir và lực Casimir toàn phần. Qua đó, chỉ ra những ảnh hưởng của kích thước hữu hạn lên tính chất của hệ BEC một thành phần, chúng tôi thực hiện khảo sát hệ trong cả thống kê chính tắc và thống kê chính tắc lớn.

Chương 3. Lực Casimir trong ngưng tụ Bose-Einstein hai thành phần

Nghiên cứu ảnh hưởng của kích thước lên lực Casimir-like và lực Casimir. Qua đó, chỉ ra những ảnh hưởng của kích thước hữu hạn lên tính chất của hệ BEC hai thành phần, chúng tôi thực hiện tính toán trong gần đúng parabol kép, gần đúng một vòng và hai vòng. Do tính chất phức tạp của tính toán toán học, chúng tôi chỉ khảo sát hệ trong thống kê chính tắc lớn.

Chương 1

Hệ thống lý thuyết nghiên cứu về lực Casimir

1.1 Tổng quan về lực Casimir

1.1.1 Dao động điểm không và biểu hiện của chúng

Trước tiên chúng ta bàn về khái niệm năng lượng điểm không. Chúng ta đều biết rằng, năng lượng chuyển động nhiệt của một vật tỉ lệ với nhiệt độ tuyệt đối. Như vậy, khi nhiệt độ môi trường là không độ tuyệt đối thì vật sẽ đứng yên, tức là năng lượng của nó bằng không. Điều này có nghĩa là tại nhiệt độ không tuyệt đối chúng ta có thể biết chính xác tọa độ và xung lượng của hạt vi mô, tức là vi phạm nguyên lý bất định Heisenberg. Để thỏa mãn nguyên lý bất định Heisenberg thì ở nhiệt độ không tuyệt đối, vật vẫn phải có một năng lượng nào đó gọi là năng lượng điểm không. Khái niệm năng lượng điểm không được Planck sử dụng đầu tiên khi ông thiết lập công thức tính mật độ bức xạ của vật đen tuyệt đối [47]. Với khái niệm năng lượng điểm không, Planck đã

thiết lập được công thức tính mật độ bức xạ của vật đen tuyệt đối phù hợp với thực nghiệm. Ví dụ đơn giản nhất về năng lượng điểm không là năng lượng của dao động tử điều hòa. Ở trạng thái dừng thứ n , năng lượng của dao động tử điều hòa một chiều có tần số góc ω là

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.1)$$

với \hbar là hằng số Planck rút gọn và $n = 0, 1, \dots$. Như vậy, trạng thái cơ bản của dao động tử điều hòa này có năng lượng là

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \neq 0. \quad (1.2)$$

Bằng chứng thực nghiệm đầu tiên về sự tồn tại của năng lượng điểm không được quan sát bởi Mulliken vào năm 1924 [51] khi ông nghiên cứu cấu trúc quang phổ của ô-xít bo.

Chân không lượng tử là trạng thái cơ bản của vạn vật, vô hướng, trung hòa và mang năng lượng cực tiểu. Năng lượng của một trạng thái vi mô nào đó, theo nguyên lý bất định, là chuỗi của $\frac{\hbar\omega}{2}, \frac{3\hbar\omega}{2}, \frac{5\hbar\omega}{2}, \dots$ [22]. Như vậy, ngay tại nhiệt độ không tuyệt đối thì các nguyên tử, phân tử vẫn luôn dao động, điều này tạo nên các thăng giáng lượng tử. Do năng lượng tối thiểu khác không và tần số ω có thể nhận bất cứ giá trị nào từ không đến vô cùng nên chân không lượng tử có năng lượng vô hạn khi ta lấy tích phân theo tất cả các tần số dao động ω .

Tuy nhiên, do tính vô hướng, trung hòa, mà lại có năng lượng vô hạn nên theo lý thuyết trường lượng tử, không gian trống rỗng thật ra đang tràn ngập vật chất có thời gian sống ngắn, các hạt và phản hạt xuất hiện trong khoảnh khắc, chúng tương tác, biến đổi, phân rã trở về

với “không”, cứ như vậy nối tiếp vòng sinh hủy. Phản ánh tác động của chân không lượng tử, hiệu ứng Casimir đã được phát hiện và kiểm chứng thành công.

Một điều quan trọng nữa là chúng ta cần xem xét mối liên hệ giữa hiệu ứng Casimir với các hiệu ứng khác trong lý thuyết trường lượng tử có liên quan đến sự tồn tại của các dao động điểm không, chẳng hạn hiệu ứng phân cực lượng tử gây ra bởi các trường ngoài. Một tính chất quan trọng của hiệu ứng này là sự không triệt tiêu của năng lượng chân không phụ thuộc vào độ lớn của trường ngoài. Các biên của hệ có thể được xem như là các trường ngoài [11, 24]. Điều này dẫn đến kết quả là lực Casimir cũng phụ thuộc vào điều kiện biên [45].

1.1.2 Hiệu ứng Casimir

Hiệu ứng Casimir ở dạng nguyên gốc [16] được Casimir phát hiện chính là sự tương tác giữa hai tấm kim loại phẳng, trung hòa về điện, đặt song song với nhau trong trường điện từ. Nguyên nhân được giải thích là do sự biến dạng chân không của điện từ trường giữa hai bản kim loại này. Hiện tượng này không thể giải thích bằng lý thuyết cổ điển vì hai tấm kim loại không mang điện. Rõ ràng đây là một hiệu ứng thuần túy lượng tử, trạng thái cơ bản của điện từ trường trong lý thuyết điện động lực học lượng tử đã tạo ra một lực làm cho các tấm kim loại này hút nhau.

Để hiểu rõ hơn vấn đề này, chúng ta hãy khảo sát nó trên quan điểm của cơ học lượng tử bằng cách khảo sát một dao động tử điều hòa với

năng lượng của các trạng thái dừng theo phương trình (1.1) và ở trạng thái cơ bản theo phương trình (1.2). Theo quan điểm của quá trình lượng tử chính tắc, năng lượng của trạng thái cơ bản này được liên kết với sự tùy ý của toán tử sắp xếp trong việc xác định toán tử Hamilton \hat{H} bằng cách thay thế vào toán tử Hamiltonian cổ điển $H(p, q)$ và các biến động học bởi các toán tử tương ứng $\hat{H} = H(\hat{p}, \hat{q})$. Phải nhấn mạnh rằng, năng lượng trạng thái cơ bản E_0 không thể quan sát được bằng các phép đo trong hệ lượng tử, tức là trong quá trình chuyển dịch giữa các trạng thái lượng tử khác nhau, hoặc ví dụ trong các thí nghiệm tán xạ. Tuy nhiên, tần số ω của dao động tử có thể phụ thuộc vào các tham số bên ngoài hệ lượng tử. Vào đầu năm 1919, điều này đã được phát hiện bởi sự giải thích của áp suất hơi ở các đồng vị nhất định, khối lượng khác nhau tạo ra sự thay đổi cần thiết ở tham số ngoài.

Khi giải quyết bài toán này theo lý thuyết trường lượng tử, chúng ta phải giải quyết vấn đề về sự phân kỳ tử ngoại của một số đại lượng. Nguyên nhân là do năng lượng của trạng thái cơ bản được định nghĩa là tổng năng lượng của các mode trong trường lượng tử, tức là [14],

$$E_0 = \frac{\hbar}{2} \sum_n \omega_n, \quad (1.3)$$

trong đó chỉ số n là số lượng tử đặc trưng cho các mode trong trường lượng tử. Phép lấy tổng trong công thức (1.3) rõ ràng không hội tụ. Casimir là người đầu tiên đã khử được phân kỳ của năng lượng điểm không trong trường điện từ lượng tử bị giam giữ giữa hai tấm kim loại phẳng, trung hòa, đặt song song với nhau. Phần hữu hạn chính là năng lượng Casimir và tương ứng với nó là lực Casimir.

Để khử các phân kỳ sinh ra từ năng lượng chân không, ta đưa vào khái niệm N -tích sao cho trung bình chân không triệt tiêu

$$\langle 0|N(ABC\dots)|0\rangle = 0. \quad (1.4)$$

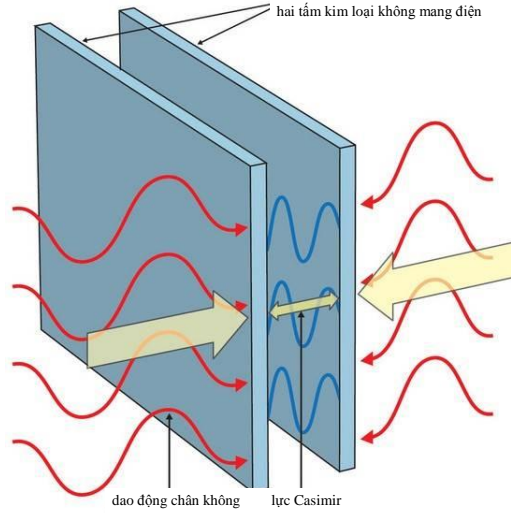
Về mặt lịch sử, sự ra đời của hiệu ứng Casimir liên quan đến việc giải thích lực tương tác giữa hai phân tử trung hòa do van der Waals đề xuất vào năm 1873. Nhưng mãi đến năm 1930, người ta mới bắt đầu hiểu được nguồn gốc của lực này khi London [72] chỉ ra bản chất lượng tử của nó, thế năng tương tác giảm mạnh theo khoảng cách R . Thế năng tương tác giữa hai lưỡng cực là

$$V \sim \frac{1}{R^6}. \quad (1.5)$$

Mãi đến năm 1948, khảo sát của Casimir và Polder cho thấy ở khoảng cách lớn, thế tương tác giảm nhanh hơn [17],

$$V \sim \frac{1}{R^7}. \quad (1.6)$$

Từ đó, hình thành khái niệm về sự tương tác phụ thuộc khoảng cách, tức là tương tác tầm xa. Với quan điểm này, hiệu ứng Casimir đơn giản là sự thể hiện vĩ mô một tổng vô số các tương tác van der Waals. Tuy nhiên, sau công trình của Casimir được công bố, Borh đã gợi ý, năng lượng chân không chính là nguồn gốc lực tương tác giữa các phân tử. Theo hướng đó, người ta khảo sát mô hình đơn giản: trong trường chân không điện từ ta đặt vuông góc với trục z hai tấm kim loại dẫn điện lý tưởng với diện tích S và cách nhau một khoảng l sao cho $l \ll \sqrt{S}$.



Hình 1.1: Lực Casimir giữa hai tấm phẳng mỏng song song [35].

Với trường vô hướng không khối lượng Φ , tenxơ năng-xung lượng có dạng

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial^\lambda \Phi \partial_\lambda \Phi, \quad (1.7)$$

thì năng lượng điểm không (1.3) được tính theo công thức

$$\frac{1}{2} \hbar \sum_n \omega_n = \int d\vec{x} \langle 0 | T^{00} | 0 \rangle. \quad (1.8)$$

Lực tác dụng lên mỗi tấm là [48],

$$f = \int_S dx dy \langle 0 | T_{zz} | 0 \rangle. \quad (1.9)$$

Đối với trường điện từ được xác định bởi vectơ cường độ điện trường \vec{E} và cường độ từ trường \vec{H} thì thành phần theo phương $0z$ của tenxơ năng-xung lượng (1.7) có dạng

$$T_{zz} = \frac{1}{2} (H_\perp^2 - H_z^2 + E_\perp^2 - E_z^2), \quad (1.10)$$

trong đó H_z, E_z và H_\perp, E_\perp lần lượt là hình chiếu của \vec{H}, \vec{E} lên các phương $0z$ và phương vuông góc với $0z$. Kết hợp (1.9) với (1.10) sẽ cho ta giá

trị phân kỳ. Để giải quyết vấn đề này, Casimir đã trừ đi phần năng lượng chân không vô hạn của trường điện từ lượng tử trong không gian Minkowski tự do. Kết quả thu được phần hữu hạn là

$$f = \int_S dx dy \langle 0 | T_{zz} - T_{zz}(\text{vô hạn}) | 0 \rangle. \quad (1.11)$$

Áp dụng điều kiện biên cổ điển

$$H_z = E_{\perp} = 0, \quad (1.12)$$

cho sóng điện từ có vectơ sóng $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = (k_{\perp}, k_z)$ và vectơ phân cực \vec{d} , sử dụng phương pháp hàm Green, Plunien và cộng sự [57] tìm được

$$\begin{aligned} \vec{E} &= i\omega_k \vec{d} e^{ik_x x} e^{ik_y y} \sin(k_z z) e^{-i\omega_k t}, \\ \vec{H} &= \vec{k} \times \vec{d} \omega_k e^{ik_x x} e^{ik_y y} \cos(k_z z) e^{-i\omega_k t}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Từ các công thức trên, lực Casimir tác dụng lên tấm kim loại được tính theo công thức [14, 57],

$$f = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 \ell^4} S, \quad (1.14)$$

trong đó c là tốc độ ánh sáng trong chân không.

Ngoài phương pháp trên, phân kỳ trong năng lượng điểm không (1.3) còn có thể khử bằng phương pháp hàm zeta Riemann $\zeta(x)$ được định nghĩa như sau

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \quad (1.15)$$

Trong (1.13), thành phần theo trục $0z$ của vectơ sóng có dạng $k_z \equiv k_n = n\pi/\ell$, do đó

$$\omega_n^2 = c^2 \left(k_{\perp}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \right). \quad (1.16)$$

Thay (1.16) vào (1.3), ta thu được năng lượng điểm không là

$$E_0 = S\hbar c \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{k_\perp^2 + \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}}. \quad (1.17)$$

Hệ số $1/2$ trong (1.17) biến mất là do ta đã tính đến hai trạng thái phân cực của sóng điện từ. Biểu thức (1.17) phân kỳ và để khử phân kỳ này ta đưa vào thừa số hiệu chỉnh ζ có dạng ω_n^s . Khi đó, (1.17) có thể viết dưới dạng

$$E_0 = S\hbar c \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(k_\perp^2 + \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} \right)^{(1-s)/2}. \quad (1.18)$$

Chuyển sang hệ tọa độ cực và chú ý đến (1.15), ta có thể đưa (1.18) về dạng

$$E_0 = -S\hbar c \frac{2}{\ell^{3-s}} \frac{\pi^{2-s}}{3-s} \sum_{n=1}^{\infty} |n|^{3-s} = -S\hbar c \frac{2}{\ell^{3-s}} \frac{\pi^{2-s}}{3-s} \zeta(s-3). \quad (1.19)$$

Để loại bỏ thừa số hiệu chỉnh đã thêm vào (1.18), ta lấy giới hạn của (1.19) khi $s \rightarrow 0$. Kết quả cho ta năng lượng Casimir

$$E = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 \ell^3} S. \quad (1.20)$$

Đạo hàm của (1.20) theo khoảng cách giữa hai bản kim loại sẽ cho ta lực Casimir (1.14).

Các nghiên cứu đã chỉ ra rằng, lực Casimir phụ thuộc vào nhiều yếu tố: bản chất hệ, cấu trúc hình học của hệ, điều kiện biên và nhiệt độ. Về mặt thực nghiệm, việc đo được chính xác lực Casimir là rất khó khăn do một mặt, lực này chỉ xuất hiện trong một vùng không gian rất nhỏ, mặt khác thì việc tạo nên một cấu trúc như tính toán ban đầu của Casimir là rất khó khả thi. Đây cũng là một trong những nguyên nhân làm cho hiệu

ứng này ít được quan tâm ngay từ khi nó mới được Casimir phát hiện ra. Đã có rất nhiều nỗ lực thực nghiệm để nghiên cứu lực Casimir nhưng kết quả chưa được như mong muốn [22]. Phải đến năm 1996, tức là 48 năm sau khi được phát hiện, Lamoreaux [42] mới đo được lực Casimir với sai số cỡ 5% so với tính toán lý thuyết.

1.2 Tình hình nghiên cứu lực Casimir trong ngưng tụ Bose-Einstein

1.2.1 Ngưng tụ Bose-Einstein

Boson là hệ các hạt có spin nguyên, chúng tuân theo thống kê Bose-Einstein. Hệ boson có thể là tập hợp các hạt boson hoặc hệ các hạt Fermi liên kết với nhau để tạo thành các hạt giả boson. Khí Bose không tương tác gọi là khí Bose lý tưởng. Trạng thái của hệ boson được mô tả bằng các hàm sóng đối xứng, số lấp đầy không bị hạn chế bởi nguyên lý Pauli mà có thể nhận giá trị tùy ý. Thế nhiệt động Ω của hệ có dạng [53],

$$\Omega_k = -k_B T \ln \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{k_B T}} \right]^{n_k}, \quad (1.21)$$

với k_B là hằng số Boltzman, T là nhiệt độ tuyệt đối, μ là thế hóa và ε_k là năng lượng của một hạt ở trạng thái có vectơ sóng \vec{k} . Tổng này chỉ hội tụ khi $e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{k_B T}} < 1$ nên ta có thể viết

$$\Omega_k = k_B T \ln \left(1 - e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{k_B T}} \right). \quad (1.22)$$

Gọi n_k là mật độ hạt ở trạng thái có vectơ sóng \vec{k} thì mật độ năng lượng của trạng thái này bằng tổng năng lượng của tất cả các hạt nằm trong

trạng thái đó. Từ đây, ta có

$$n_k = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \frac{1}{e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{k_B T}} - 1}. \quad (1.23)$$

Đối với khối khí boson gồm N nguyên tử không tương tác bị giam cầm và làm lạnh bằng một thế điều hòa ba chiều thì nhiệt độ chuyển pha (bắt đầu có ngưng tụ) thỏa mãn [53],

$$k_B T_C^0 = \frac{N^{1/\alpha}}{[C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)]^{1/\alpha}}, \quad (1.24)$$

trong đó, C_α là hằng số phụ thuộc vào các tham số đặc trưng của hệ, hàm gamma được định nghĩa dưới dạng

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}, \quad (1.25)$$

Với khí boson đồng nhất được giam trong hố thế ba chiều thì $\alpha = 3/2$ và (1.24) trở thành

$$T_C^0 \approx 3.31 \frac{\hbar^2 n_0^{2/3}}{m k_B}, \quad (1.26)$$

trong đó n_0, m lần lượt là mật độ khối của ngưng tụ và khối lượng của một hạt.

Khi nhiệt độ T của hệ nhỏ hơn nhưng rất gần với nhiệt độ tới hạn thì số hạt ngưng tụ là

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_C^0} \right)^\alpha \right]. \quad (1.27)$$

Tại nhiệt độ này, các hạt boson có cùng bước sóng de Broglie thỏa mãn

$$\lambda_{dB} = \left(\frac{2\pi \hbar^2}{m k_B T} \right)^{1/2}, \quad (1.28)$$

và nó có giá trị cùng bậc với khoảng cách trung bình giữa các hạt.

Đối với khí Bose có tương tác thì các boson trong hệ tương tác với nhau bởi lực hút hoặc lực đẩy, tương tác này được xác định qua độ dài tán xạ a của sóng s . Ở đây, chúng ta giới hạn ở trường hợp tương tác đẩy với cường độ [54],

$$g = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a > 0. \quad (1.29)$$

Để có thể áp dụng lý thuyết nhiễu loạn, ta chỉ xét trường hợp khí Bose tương tác yếu hay còn gọi là khí Bose loãng. Điều kiện này chỉ thỏa mãn khi $n_0a^3 \ll 1$ [1]. Sử dụng phương pháp khai triển N lớn, Baym và cộng sự [8] chứng minh được nhiệt độ tới hạn T_C của khí Bose tương tác yếu sai khác so với nhiệt độ tới hạn T_C^0 của khí Bose lý tưởng một số hạng dương

$$T_C = T_C^0 + pT_C^0, \quad (1.30)$$

trong đó $p = (2, 2 \pm 0, 2)an_0^{1/3}$.

Ở nhiệt độ không tuyệt đối, các thăng giáng lượng tử có vectơ sóng k xuất hiện với phổ năng lượng của hạt [53, 54],

$$\epsilon(k) = \left[\frac{gn_0}{m}k^2 + \left(\frac{k^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (1.31)$$

còn thế hóa được xác định theo công thức

$$\mu \approx gn_0 \left[1 + \frac{32}{3\sqrt{\pi}}(n_0a^3)^{1/2} \right]. \quad (1.32)$$

1.2.2 Tổng quan về nghiên cứu hiệu ứng Casimir trong BEC

Nghiên cứu về hiệu ứng Casimir phát triển mạnh mẽ vào những năm 1970 của thế kỉ trước. Tuy nhiên, nghiên cứu hiệu ứng này trong môi trường BEC chỉ thực sự bùng nổ từ những năm 2000.

Trước hết, ta điem qua các nghiên cứu về hiệu ứng Casimir trong môi trường BEC ở nhiệt độ không. Hệ nghiên cứu là môi trường ngưng tụ BEC được giam giữ giữa hai tấm phẳng (được gọi là hai tường cứng) đặt song song với nhau và cách nhau một khoảng ℓ . Diện tích hai tấm phẳng rất lớn, tức là thỏa mãn điều kiện diện tích $S \gg \ell^2$. Hệ được giữ ở nhiệt độ gần độ không tuyệt đối. Lúc này hiệu ứng Casimir bắt nguồn từ các thăng giáng lượng tử của trạng thái cơ bản.

Công trình đầu tiên có thể kể đến là nghiên cứu của A. Edery [27] với hệ BEC ba chiều. Diện tích hai tấm phẳng là $\ell_1 \times \ell_2$ và không có thể giam cầm. Trong hệ đơn vị $\hbar = c = 2m = 1$, mật độ năng lượng của hệ là

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1} E(k), \quad (1.33)$$

với

$$E(k) = k\sqrt{k^2 + \alpha\mu} - k^2 - \mu. \quad (1.34)$$

Trong không gian bị giới hạn, sử dụng điều kiện biên tuần hoàn thì vectơ sóng bị lượng tử hóa theo công thức

$$k^2 = \left(\frac{2n\pi}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{2n_1\pi}{\ell_1}\right)^2 + \left(\frac{2n_2\pi}{\ell_2}\right)^2. \quad (1.35)$$

Kết quả cho ta mật độ năng lượng Casimir là

$$E_C = -\frac{\pi^2 v}{90 \ell^3} + \frac{2\pi^4}{315v\ell^5}, \quad (1.36)$$

với v là tốc độ âm trong môi trường BEC.

Sử dụng lý thuyết trường lượng tử ở gần đúng một vòng, năm 2009 J. Schiefele và C. Henkel [66] đã nghiên cứu hiệu ứng Casimir trong môi trường BEC ở nhiệt độ không, trong không gian một chiều và sử dụng

hệ đơn vị tự nhiên. Sau khi loại bỏ phần năng lượng khối và năng lượng bề mặt, các tác giả chứng minh được rằng, năng lượng Casimir là phần hữu hạn của mật độ năng lượng tự do

$$\bar{F}_1 = \frac{1}{2\bar{L}^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \sqrt{[(\bar{L}k)^2 + n^2] [M(k)^2 + n^2]}, \quad (1.37)$$

với $\bar{L} = \ell/2\pi$ và

$$M(k) = \bar{L}\sqrt{k^2 + 1/\xi^2},$$

trong đó ξ là độ dài đặc trưng. Sử dụng công thức Abel-Plana để khử phân kì tử ngoại, năng lượng Casimir được biểu diễn qua tích phân của mật độ trạng thái

$$\mathcal{E}_C = \int_0^\infty \frac{\rho(x, \bar{L})}{e^{2\pi x} - 1} dx, \quad (1.38)$$

với

$$\begin{aligned} & \rho_j(x, \bar{L}_j) \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{8\pi\xi^4\xi_j^2} \left[\arcsin \eta - \eta(1 - 2\eta^2)\sqrt{1 - \eta^2} \right], & \text{khi } 0 \leq x < \bar{L}/\xi; \\ -\frac{1}{16\xi^4}, & \text{khi } x \geq \bar{L}_j/\xi, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.39)$$

là hàm mật độ trạng thái, trong đó $\eta = \frac{\xi x}{\bar{L}}$. Khi khoảng cách giữa các tường cứng đủ lớn $\bar{L}/\xi \gg 1$, mật độ năng lượng Casimir có dạng gần đúng

$$\mathcal{E}_C \simeq -\frac{\pi^2 v}{90 \ell^3} + \frac{2\pi^4 v \xi^2}{315 \ell^5}. \quad (1.40)$$

Kết quả này cũng cho thấy, với hệ các hạt Bose lý tưởng ở nhiệt độ không tuyệt đối, tốc độ âm bị triệt tiêu nên trong hệ không xảy ra hiệu ứng Casimir.

Vấn với hệ BEC một chiều, S. Biswas và cộng sự [13] sử dụng hình thức luận Hamilton để khảo sát các lực tương tác trong hệ BEC. Theo đó, lực tương tác trong môi trường BEC gồm hai loại:

- Lực Casimir-like: đây là loại lực gây ra do phần năng lượng mặt ngoài chênh lệch của hệ nghiên cứu so với năng lượng bề mặt của hệ vô hạn. Hàm sóng biểu diễn của hệ tìm được bằng cách giải phương trình GP. Kết quả tính toán cho thấy lực Casimir-like có độ lớn

$$F = -\frac{S2\pi\hbar^2 n_0^2 a}{m} \sec^4 \left(\sqrt{\frac{8\pi n_0 a \ell^2 - \pi^2}{8}} \right), \quad (1.41)$$

trong đó n_0 là mật độ khối, a là độ dài tán xạ sóng s , m là khối lượng nguyên tử khí Bose.

- Lực Casimir: lực này gây ra bởi các thăng giáng lượng tử lên trạng thái cơ bản của hệ. Để khử phân kỳ vùng UV, các tác giả đã khai triển vectơ sóng của lực và giữ đến số hạng gần đúng bậc 4. Kết quả cho biểu thức của lực Casimir dưới dạng

$$F_C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gn_0}{m}} \frac{2\pi S}{(2\pi\hbar)^2} \times \left[-\frac{(\pi\hbar)^3 \zeta(-3)}{\ell^4} + \frac{(\pi\hbar)^4 \zeta(-4)}{\sqrt{4mgn_0} \ell^5} - \frac{(\pi\hbar)^5 \zeta(-5)}{8\pi mgn_0 \ell^6} + \dots \right], \quad (1.42)$$

trong đó ζ là hàm zeta Rieman.

Tích phân theo xung lượng (hoặc vectơ sóng) bị phân kỳ UV, nên phải đưa vào số hạng ngắt (cut-off) Λ để ngắt tích phân. Ngoài ra, kết quả thu được phải được lấy giới hạn khi $\Lambda \rightarrow \infty$. Việc khai triển xung lượng và giới hạn đến bậc bốn như trên là điều không hợp lý. Nhằm khắc phục vấn đề này, trong [75], N. V. Thu đã sử dụng công thức Euler-Maclaurin

để khử phân kì UV. Bên cạnh đó, bài toán cũng được mở rộng ở hai khía cạnh:

- Sử dụng điều kiện biên Robin: đây là điều kiện biên tổng quát hơn điều kiện biên Dirichlet vẫn đang được sử dụng rộng rãi và quan trọng hơn là, về mặt toán học, nó có thể cho ta kết quả tương ứng với điều kiện biên Dirichlet trong trường hợp đặc biệt.

- Khảo sát các lực tương tác trong cả thống kê chính tắc và thống kê chính tắc lớn.

So với các công trình trước đây, kết quả quan trọng thu được ở [75] là:

- Lực Casimir-like có thể là lực hút hoặc lực đẩy, tùy thuộc vào thống kê được xét là chính tắc hay chính tắc lớn.

- Lực tổng hợp tác dụng trong hệ BEC cũng có thể là lực đẩy hoặc lực hút, tùy thuộc vào thông số của hệ và thống kê đang xét.

- Có thể xảy ra chuyển pha trong không gian trạng thái cơ bản của hệ và nếu có thì đây là chuyển pha loại 1.

Nghiên cứu về hiệu ứng Casimir trong môi trường BEC ở nhiệt độ hữu hạn hiện nay còn khá khiêm tốn. Các công trình hiện có chỉ dừng lại ở hệ ngưng tụ Bose lý tưởng, tức là không có tương tác giữa các phân tử boson. Công trình nghiên cứu điển hình là [12]. Trong công trình này, sử dụng thống kê Bose-Einstein cho các vùng nhiệt độ khác nhau, Biswas đã tính thế chính tắc lớn của hệ và trên cơ sở đó tìm lực tác dụng. Như vậy, trên thực tế, đây không phải là hiệu ứng Casimir mà thực chất là ảnh hưởng của sự co gọn không gian lên thế nhiệt động. Kết quả chính

mà ông thu được là:

- Trong vùng nhiệt độ thấp (rất nhỏ so với nhiệt độ ngưng tụ T_C), lực Casimir-like có dạng:

$$F_C = -N \left(\frac{T}{T_C} \right)^{3/2} \frac{\pi^2 \hbar^2}{m \ell^3}, \quad (1.43)$$

với N là số nguyên tử boson trong hệ.

- Ở miền nhiệt độ lớn hơn nhưng rất gần với nhiệt độ chuyển pha T_C thì

$$F_C = -N \frac{\pi^2 \hbar^2}{m \ell^3}. \quad (1.44)$$

- Ở vùng nhiệt độ rất lớn so với nhiệt độ chuyển pha thì

$$F_C = -\frac{8N(k_B T)^2 m \ell}{\hbar^2} \exp\left(-\frac{2m \ell^2 k_B T}{\hbar^2}\right). \quad (1.45)$$

Kết quả cho thấy, ở miền này không còn ngưng tụ và lực Casimir-like giảm dần theo quy luật hàm mũ của cả nhiệt độ và bình phương khoảng cách giữa các tường cứng.

Đối với môi trường BEC hai thành phần, nghiên cứu về hiệu ứng Casimir hiện nay còn bỏ ngỏ. Hiệu ứng Casimir-like được nghiên cứu trong [74]. Theo đó, lực Casimir-like của hệ vẫn khác không khi mà hai thành phần trộn lẫn vào nhau. Đây là một kết quả rất đặc biệt của hiệu ứng kích thước hữu hạn lên tính chất tĩnh của hệ BEC hai thành phần.

Do vậy, trong luận án này, chúng tôi sẽ tập trung nghiên cứu ảnh hưởng từ hiệu ứng kích thước hữu hạn lên các tính chất tĩnh của hệ BEC hai thành phần, tập trung vào hai đại lượng quan trọng nhất đó là lực Casimir-like và lực Casimir.

1.2.3 Lý thuyết Gross-Pitaevskii

a. Phương trình Gross-Pitaevskii

Phương trình GP thực chất là dạng phi tuyến của phương trình Schrodinger khi xét trong gần đúng trường trung bình. Để thiết lập phương trình GP, chúng ta xuất phát từ việc khảo sát hệ BEC, đó là một hệ N hạt boson đồng nhất ở nhiệt độ không tuyệt đối. Trong điều kiện này, tất cả các hạt đều nằm trong trạng thái cơ bản. Theo định nghĩa, Hamiltonian của hệ là tổng của động năng các hạt và thế năng tương tác [58],

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\vec{r}_i) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|). \quad (1.46)$$

Trong vế phải của phương trình (1.46), số hạng thứ nhất trong dấu tổng đầu tiên là động năng của hạt thứ i , số hạng thứ hai là thế năng tương tác của hạt thứ i với trường ngoài $V_{\text{ext}}(\vec{r}_i)$. Dấu tổng thứ hai là tổng thế năng tương tác giữa các cặp hạt trong hệ, \vec{r}_i là tọa độ của hạt thứ i , hệ số $1/2$ để đảm bảo tương tác giữa hạt thứ i và hạt thứ j chỉ tính một lần.

Đối với hệ hạt boson đồng nhất, chúng không bị chi phối bởi nguyên lý loại trừ Pauli và hàm sóng mô tả trạng thái của cả hệ Ψ phải là hàm đối xứng. Gọi ψ là hàm sóng của một hạt thì hàm sóng của cả hệ có thể viết dưới dạng tích tenxơ của hàm sóng một hạt $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes \dots \otimes |\psi\rangle$ [54]. Đương nhiên hàm sóng này phải thỏa mãn điều kiện chuẩn hóa

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int \Psi^* \Psi d\vec{r} = N. \quad (1.47)$$

Năng lượng của hệ được xác định theo công thức

$$E(\Psi) = \frac{\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle}. \quad (1.48)$$

Theo định nghĩa, năng lượng tự do của hệ được xác định qua biểu thức

$$F = E - \mu N. \quad (1.49)$$

Kết hợp (1.48) với (1.47) và (1.49), ta được

$$F(\Psi) = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle - \mu \langle \Psi | \Psi \rangle. \quad (1.50)$$

Bây giờ ta tìm từng số hạng trong phương trình (1.50):

- Số hạng động năng

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} | \Psi \rangle &= \sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m} \int \nabla \psi^*(\vec{r}_i) \nabla \psi(\vec{r}_i) d\vec{r}_i \\ &= N \frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla \psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} \\ &= -N \frac{\hbar^2}{2m} \int \psi^*(\vec{r}) \nabla^2 \psi(\vec{r}) d\vec{r}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

- Số hạng thế năng tương tác với trường ngoài

$$\langle \Psi | \sum_{i=1}^N V_{\text{ext}} | \Psi \rangle = N \int \psi^*(\vec{r}) V_{\text{ext}} \psi(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (1.52)$$

- Số hạng thế năng tương tác cặp

$$\begin{aligned} &\langle \Psi | \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) | \Psi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \int d\vec{r}_i \int \psi^*(\vec{r}_i) \psi^*(\vec{r}_j) V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \psi(\vec{r}_i) \psi(\vec{r}_j) d\vec{r}_j \\ &= \frac{N(N-1)}{2} \int d\vec{r} \int \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}') V(|\vec{r} - \vec{r}'|) \psi(\vec{r}) \psi(\vec{r}') d\vec{r}'. \end{aligned} \quad (1.53)$$

- Số hạng tương ứng với thế hóa của hệ

$$\mu \langle \Psi | \Psi \rangle = \mu \left(\int \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d\vec{r} \right)^N. \quad (1.54)$$

Thay (1.51) - (1.54) vào (1.50), ta thu được

$$\begin{aligned} F = & -N \frac{\hbar^2}{2m} \int \psi^*(\vec{r}) \nabla^2 \psi(\vec{r}) d\vec{r} + N \int \psi^*(\vec{r}) V_{\text{ext}} \psi(\vec{r}) d\vec{r} \\ & + \frac{N(N-1)}{2} \int d\vec{r} \int \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}') V(|\vec{r} - \vec{r}'|) \psi(\vec{r}) \psi(\vec{r}') d\vec{r}' \\ & - \mu \left(\int \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) d\vec{r} \right)^N. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Trạng thái cơ bản của hạt phải ứng với cực tiểu của năng lượng tự do (1.55), tức là

$$\frac{\delta F}{\delta \psi^*} = 0. \quad (1.56)$$

Thay (1.55) vào (1.56) ta có

$$\begin{aligned} N \int \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V_{\text{ext}}(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \right. \\ \left. + (N-1) \left(\int |\psi(\vec{r}')|^2 V(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' \right) \psi(\vec{r}) \right. \\ \left. - \mu \psi(\vec{r}) \right] \delta \psi^*(\vec{r}) d\vec{r} = 0. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Thế năng tương tác giữa các cặp hạt của hệ thông thường được chọn dưới dạng hàm delta [53],

$$V(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (1.58)$$

Thay (1.58) vào (1.57) với chú ý rằng các hàm sóng đơn hạt phải thỏa mãn điều kiện chuẩn hóa và lấy gần đúng hàm sóng của hệ thỏa mãn

$$\Psi(\vec{r}) = \sqrt{N} \psi(\vec{r}), \quad (1.59)$$

ta thấy phương trình (1.57) chỉ thỏa mãn khi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\vec{r}) + V_{\text{ext}}(\vec{r})\Psi(\vec{r}) + \frac{4\pi\hbar^2}{m}a|\Psi(\vec{r})|^2\Psi(\vec{r}) = \mu\Psi(\vec{r}). \quad (1.60)$$

Chú ý đến (1.29) thì phương trình (1.60) trở thành

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V_{\text{ext}}(\vec{r}) - \mu + g|\Psi(\vec{r})|^2\right]\Psi(\vec{r}) = 0. \quad (1.61)$$

Phương trình (1.61) được gọi là phương trình GP, nghiệm của phương trình này chính là hàm sóng mô tả trạng thái cơ bản của BEC. Khi hệ không có trường ngoài thì (1.61) trở thành

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \mu + g|\Psi(\vec{r})|^2\right]\Psi(\vec{r}) = 0. \quad (1.62)$$

Thế tương tác GP có dạng

$$V_{GP} = -\mu|\Psi|^2 + \frac{g}{2}|\Psi|^4. \quad (1.63)$$

b. Hệ phương trình Gross-Pitaevskii

Bây giờ ta đi xây dựng hệ phương trình GP cho ngưng tụ Bose-Einstein hai thành phần. Đối với hệ BEC hai thành phần, tương tác giữa các cặp hạt gồm hai thành phần khác nhau:

- Tương tác giữa các cặp hạt trong cùng một thành phần: tương tác này được đặc trưng bởi hằng số tương tác

$$g_{jj} = \frac{4\pi\hbar^2}{m_j}a_{jj},$$

với a_{jj} là độ dài tán xạ sóng s giữa các hạt trong cùng một thành phần, $j = 1, 2$.

- Tương tác giữa các cặp hạt ở hai thành phần với nhau với hằng số tương tác

$$g_{12} = g_{21} = 2\pi\hbar^2 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) a_{12},$$

với $a_{12} = a_{21}$ là độ dài tán xạ sóng s giữa các hạt của hai thành phần.

Sử dụng kết quả gần đúng (1.59) khi xây dựng phương trình GP cho BEC một thành phần ta có thể mô tả hệ BEC hai thành phần bởi hàm mật độ Lagrangian

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1,2} \left[\frac{i\hbar}{2} (\psi_j^* \partial_t \psi_j - \psi_j \partial_t \psi_j^*) + \frac{\hbar^2}{2m_j} \psi_j^* \nabla^2 \psi_j \right] - \mathcal{V}(\psi_1, \psi_2), \quad (1.64)$$

trong đó \mathcal{V} là thế tương tác, nó có dạng

$$\mathcal{V}(\psi_1, \psi_2) = \sum_{j=1,2} \left(-\mu_j |\psi_j|^2 + \frac{g_{jj}}{2} |\psi_j|^4 \right) + g_{12} |\psi_1|^2 |\psi_2|^2. \quad (1.65)$$

Trong công thức này $\psi_j = \psi_j(\vec{r}, t)$ là hàm sóng phụ thuộc thời gian của thành phần j .

Áp dụng nguyên lý tác dụng tối thiểu, ta tìm được phương trình Euler-Lagrange cho mỗi thành phần

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_j} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \psi_j)} \right) = 0. \quad (1.66)$$

Từ đó tìm được hệ phương trình GP phụ thuộc thời gian cho các tham số trật tự

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m_1} \nabla^2 + g_{11} |\psi_1|^2 + g_{12} |\psi_2|^2 \right) \psi_1, \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m_2} \nabla^2 + g_{22} |\psi_2|^2 + g_{12} |\psi_1|^2 \right) \psi_2. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Để thu được hệ phương trình GP không phụ thuộc thời gian ta viết hàm sóng dưới dạng

$$\psi_j(\vec{r}, t) = \Psi_j(\vec{r}) e^{-i\mu_j t/\hbar}. \quad (1.68)$$

Thay (1.68) vào (1.67) sẽ dẫn đến hệ phương trình GP

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2\Psi_1 - \mu_1\Psi_1 + g_{11}|\Psi_1|^2\Psi_1 + g_{12}|\Psi_2|^2\Psi_1 &= 0, \\ -\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2\Psi_2 - \mu_2\Psi_2 + g_{22}|\Psi_2|^2\Psi_2 + g_{12}|\Psi_1|^2\Psi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Như vậy thế tương tác GP của hệ có dạng

$$V_{GP} = \sum_{j=1,2} [-\mu_j|\Psi_j|^2 + g_{jj}|\Psi_j|^4] + g_{jj'}|\Psi_1|^2|\Psi_{j'}|^2. \quad (1.70)$$

Rõ ràng với hệ một thành phần, ta cho $j = 1, j' = 0$ và $g_{12} = 0$ thì các phương trình (1.69) và (1.70) trở thành các phương trình tương ứng (1.62) và (1.63).

1.2.4 Gần đúng parabol kép

Khi nghiên cứu hệ BEC một và hai thành phần, cả các tính chất tĩnh và động lực học, thì yêu cầu đầu tiên là phải giải được (hệ) phương trình GP. Như đã nói (hệ) phương trình GP là (hệ) phương trình vi phân phi tuyến. Việc tìm được nghiệm giải tích của nó chỉ có thể thực hiện trong một số trường hợp đơn giản:

- Với hệ BEC một thành phần bị giới hạn bởi một tường cứng đặt vuông góc với trục $0z$, nghiệm của (1.62) có dạng [54],

$$\Psi(z) = \tanh\left(\frac{z}{\sqrt{2}\xi}\right), \quad (1.71)$$

trong đó $\xi = \hbar/\sqrt{2mgn_0}$ được gọi là độ dài đặc trưng.

- Với hệ BEC hai thành phần, việc giải hệ phương trình GPs còn phức tạp hơn nhiều so với hệ BEC một thành phần. Nguyên nhân là do các phương trình GPs liên kết với nhau. Có ba trường hợp đặc biệt:

- Khi hệ có đối xứng, tức là $\xi_1 = \xi_2$ và $g_{12} = 3\sqrt{g_{11}g_{22}}$, A. B. Malomed và cộng sự tìm được [44],

$$\Psi_j(z) = \frac{1}{2} \left[1 + (-1)^{j+1} \tanh \frac{z}{\sqrt{2\xi_j}} \right]. \quad (1.72)$$

- Khi hệ phản đối xứng $\xi = 1/2$ và $g_{12} = \frac{3}{2}\sqrt{g_{11}g_{22}}$, J. O. Indekeu và cộng sự [36] tìm được

$$\Psi_j(z) = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + (-1)^{j+1} \tanh \frac{z}{\sqrt{2\xi_j}} \right]}. \quad (1.73)$$

- Khi hệ phân tách mạnh $K \rightarrow \infty$ thì [54],

$$\Psi_j(z) = \tanh \left[(-1)^{j+1} \frac{z}{\sqrt{2\xi_j}} \right]. \quad (1.74)$$

Các trường hợp còn lại ta không thể tìm được nghiệm giải tích mà (hệ) phương trình GP chỉ có thể giải được bằng các phương pháp gần đúng hoặc tính số. Hiện có khá nhiều phương pháp gần đúng để tìm nghiệm giải tích của (hệ) phương trình GP, trong đó phương pháp DPA được đề xuất ở [36] khá đơn giản nhưng kết quả thu được có độ chính xác cao. Chúng ta sẽ xem xét một số nét chính của phương pháp này bằng cách xét hệ BEC với thế năng GP ở (1.63). Trước hết ta đưa vào tọa độ không thứ nguyên và hàm sóng rút gọn

$$\rho = \frac{z}{\xi}, \quad \phi = \frac{\Psi}{\sqrt{n_0}}. \quad (1.75)$$

Thay (1.75) vào (1.63) ta được thế năng GP không thứ nguyên

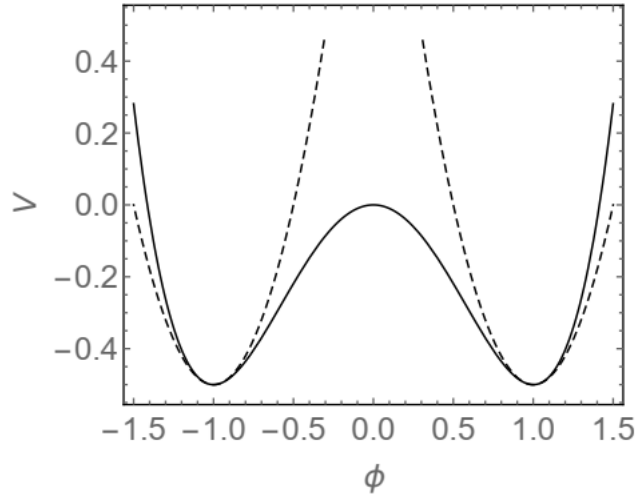
$$\mathcal{V}_{GP} \equiv \frac{V_{GP}}{gn_0^2} = -\phi^2 + \frac{\phi^4}{2}. \quad (1.76)$$

Để ý rằng ở gần tường cứng, hàm sóng rút gọn giảm dần từ giá trị khối $\phi = 1$ về 0 tại tường cứng, do đó, ta có thể khai triển ở bậc nhất

$$\phi \approx 1 + a, \quad (1.77)$$

với a là số thực, nhỏ. Thay (1.77) vào (1.76) và giữ đến gần đúng bậc hai của tham số trật tự ta thu được

$$\mathcal{V}_{DPA} \approx 2(\phi - 1)^2 - \frac{1}{2}. \quad (1.78)$$



Hình 1.2: Thế tương tác theo tham số trật tự ϕ .

Bằng việc thay thế năng GP bằng thế năng gần đúng \mathcal{V}_{DPA} như ở (1.78) thì phương trình GP (1.62) trở thành phương trình Euler-Lagrange không thứ nguyên như sau

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \alpha^2(\phi - 1) = 0, \quad (1.79)$$

với $\alpha = \sqrt{2}$.

Hình 1.2 là đồ thị biểu diễn thế tương tác theo tham số trật tự ϕ , trong đó đường liền nét ứng với thế GP không thứ nguyên, đường đứt

nét ứng với thế DPA không thứ nguyên. Như vậy, thế GP được thay thế bằng hai đường parabol nên gần đúng này được gọi là gần đúng parabol kép.

Rõ ràng trong gần đúng này, phương trình vi phân phi tuyến (1.62) đã được thay thế bằng phương trình vi phân (1.79), đó là phương trình mà ta hoàn toàn có thể tìm được nghiệm giải tích.

1.2.5 Tác dụng hiệu dụng Cornwall-Jackiw-Tombolis

Một yêu cầu khác khi nghiên cứu lý thuyết về các tính chất của hệ BEC là không làm mất đi tính chất phi tuyến của các hiệu ứng tập thể và tính liên kết của hệ ngưng tụ. Để giải quyết vấn đề này, nhóm nghiên cứu J. Golstone, A. Salam và S. Weinberge [32] đã đưa ra phương pháp tác dụng hiệu dụng vào năm 1962 dựa trên tích phân phiếm hàm. Tiếp tục phát triển phương pháp này bằng cách mở rộng tác dụng hiệu dụng cho các toán tử đa hợp, nhóm nghiên cứu Cornwall-Jackiw-Tomboulis đã thành công khi giải quyết các vấn đề của lý thuyết trường lượng tử và phương pháp này được gọi tắt là phương pháp tác dụng hiệu dụng CJT [21]. Tác dụng hiệu dụng CJT là $\Gamma[\bar{\phi}, G]$ phụ thuộc vào giá trị trung bình của trường lượng tử $\bar{\phi}(x)$ và phụ thuộc vào hàm truyền $G(x, y)$.

Để tìm hiểu về phương pháp tác dụng hiệu dụng CJT, trong mọi quá trình vật lý, chúng ta có thể coi trạng thái của hệ tại thời điểm ban đầu $t \rightarrow -\infty$ và thời điểm cuối cùng $t \rightarrow \infty$ là các trạng thái ứng với năng lượng thấp nhất, ứng với các chân không $|O^-\rangle$ và $\langle^+O|$. Do vậy khi hệ chuyển từ trạng thái chân không $|O^-\rangle$ đến chân không $\langle^+O|$ dưới ảnh

hưởng của các nguồn ngoài J, K thì biên độ xác suất có dạng [49, 60],

$$Z[J, K] \equiv \langle {}^+O|O^- \rangle_{J,K} = \mathcal{N} \int D\phi e^{i([S\phi] + \phi \cdot J + \frac{1}{2}\phi \cdot K \cdot \phi)}, \quad (1.80)$$

trong đó ta đã sử dụng các kí hiệu

$$\begin{aligned} \phi \cdot J &= \int \phi(x) J(x) d^4x, \\ \phi \cdot K \cdot \phi &= \int \phi(x) K(x, y) \phi(y) d^4x d^4y, \end{aligned}$$

là các tích chấm được thực hiện trên tất cả quá trình bên trong và không thời gian, \mathcal{N} là thừa số chuẩn hóa; $S[\phi]$ là tác dụng thông thường.

Phiếm hàm sinh $Z[J, K]$ sinh ra các hàm Green tổng quát bao gồm tất cả các giản đồ liên kết và không liên kết. Phiếm hàm $W[J, K]$ chỉ bao gồm các giản đồ liên kết, không tính đến sự khác nhau do giao hoán các đỉnh sẽ đóng góp vào $Z[J, K]$ được cho bởi

$$Z[J, K] = e^{iW[J, K]}. \quad (1.81)$$

Phiếm hàm $\Gamma[\bar{\phi}, G]$ bao gồm những giản đồ bất khả quy hai hạt cho các hàm đỉnh liên kết, nhận được bằng phép biến đổi Legendre loại hai

$$\Gamma[\bar{\phi}, G] = W[J, K] - \bar{\phi} \cdot J - \frac{1}{2}\bar{\phi} \cdot K \cdot \bar{\phi} - \frac{1}{2}\text{Tr}[G, K], \quad (1.82)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \bar{\phi} \cdot J &= \int \bar{\phi}(x) J(x) d^4x, \\ \phi \cdot K \cdot \phi &= \int \bar{\phi}(x) K(x, y) \bar{\phi}(y) d^4x d^4y, \\ \text{Tr}[G, K] &= \int G_{ij}(x, y) K^{ij}(x, y) d^4x d^4y. \end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\frac{\delta\Gamma[\bar{\phi}, G]}{\delta\bar{\phi}_i} = -J_i - (K \cdot \bar{\phi})_i, \quad (1.83a)$$

$$\frac{\delta\Gamma[\bar{\phi}, G]}{\delta G_{ij}} = -\frac{1}{2}K_{ij}. \quad (1.83b)$$

Khi các nguồn ngoài bằng không, cặp phương trình (1.83) ứng với trạng thái cơ bản của hệ trở thành phương trình khe mô tả chuyển động của trường

$$\left. \frac{\delta\Gamma[\bar{\phi}, G]}{\delta\bar{\phi}} \right|_{J=K=0} = 0, \quad (1.84)$$

và phương trình SD cho hàm truyền G

$$\left. \frac{\delta\Gamma[\bar{\phi}, G]}{\delta G} \right|_{J=K=0} = 0. \quad (1.85)$$

Vậy khi có thêm nguồn ngoài K đặc trưng cho tính hỗn hợp, tác dụng hiệu dụng $\Gamma[\bar{\phi}, G]$ không chỉ phụ thuộc vào trị trung bình của trường lượng tử mà còn phụ thuộc vào hàm truyền G - là trị trung bình của T - tích các toán tử trường. Do đó, để xác định các tính chất nhiệt động của hệ ta cần tìm tác dụng hiệu dụng $\Gamma[\bar{\phi}, G]$. Điều này rất thuận lợi cho việc nghiên cứu sự vi phạm đối xứng. Tuy nhiên, việc xác định đầy đủ $\Gamma[\bar{\phi}, G]$ là vô cùng khó khăn mà phải dùng đến phép gần đúng nhất định. Phương pháp khai triển vòng cho phép ta giải quyết vấn đề này. Xét với các hạt boson, khai triển hai vòng có dạng

$$\Gamma[\bar{\phi}, G] = S[\bar{\phi}] - \frac{i}{2}\text{Tr}[\ln GG_0^{-1} - GG_0^{-1} + 1] + \Gamma_2[\bar{\phi}, G], \quad (1.86)$$

trong đó $\Gamma_2[\bar{\phi}, G]$ bao gồm tổng tất cả các giản đồ chân không bất khả quy hai hạt có các đỉnh được xác định bởi $S_{int}[\bar{\phi}, \phi]$ và hàm truyền G .

Lấy đạo hàm theo G của (1.86) có tính đến (1.83) ta thu được phương trình SD cho hàm truyền và năng lượng riêng của hệ [39].

Trong trường hợp hệ có đối xứng tịnh tiến, trường cổ điển $\bar{\phi}(x)$ là một hằng số. Tác dụng hiệu dụng $\Gamma[\bar{\phi}, G]$ có dạng

$$\Gamma[\bar{\phi}, G] = -V_{eff}(\bar{\phi}, G) \int d^4x, \quad (1.87)$$

với $V_{eff}(\bar{\phi}, G)$ là thế hiệu dụng. Khai triển chuỗi (1.74) ta thu được thế hiệu dụng CJT trong không gian xung lượng

$$\begin{aligned} V_{eff}(\bar{\phi}, G) = & U(\bar{\phi}) + \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [\ln G(p)G_0^{-1}(p) - G_0^{-1}(\bar{\phi}, p) + 1] \\ & + V_2(\bar{\phi}, G), \end{aligned} \quad (1.88)$$

trong đó $U(\bar{\phi})$ là thế cổ điển và $V_2(\bar{\phi}, G)$ là tổng tất cả các giản đồ chân không bất khả quy hai hạt với các đỉnh và hàm truyền $G(p)$. Bây giờ, điều kiện dừng (1.84) và (1.85) mô tả trạng thái cơ bản trở thành

$$\frac{\partial V_{eff}(\bar{\phi}, G)}{\partial \bar{\phi}} = 0, \quad (1.89a)$$

$$\frac{\partial V_{eff}(\bar{\phi}, G)}{\partial G} = 0. \quad (1.89b)$$

Như vậy, thế hiệu dụng CJT là hàm của $\bar{\phi}$ và là một phiếm hàm của G . Ở trạng thái cơ bản, tác dụng hiệu dụng và thế hiệu dụng CJT có ý nghĩa như năng lượng và mật độ năng lượng [62].

Như vậy, có hai kết quả quan trọng mà tác dụng hiệu dụng mang lại là:

- Ta thu được phương trình chuyển động (1.89a) xác định sự biến đổi của trường lượng tử và phương trình SD (1.89b) cho hàm truyền;

- Khi hệ phương trình cho nghiệm $\bar{\phi}(x) \neq 0$, có nghĩa là có sự phá vỡ đối xứng. Nghĩa là cơ chế phá vỡ đối xứng đã tự động sinh ra ngay trong hình thức luận tác dụng hiệu dụng CJT. Mặt khác khi khai triển tác dụng hiệu dụng CJT quanh nghiệm dừng, các hiện tượng vật lý ở trạng thái cơ bản cũng tự động xuất hiện trong các nghiệm không nhiễu loạn ứng với sự phá vỡ đối xứng [7, 20, 33, 39, 76].

Do đó, phương pháp tác dụng hiệu dụng CJT ở gần đúng hai vòng là phương pháp mới, có tính chính xác cao. Ngoài ra nó còn có thể tự động cho ra hai kết quả quan trọng dùng để xác định nghiệm vật lý của hệ.

Tổng kết chương 1

Với mục đích trình bày các kiến thức cơ sở cho những nghiên cứu ở các chương tiếp theo, Chương 1 đã đạt được một số kết quả sau đây:

1. Trình bày sơ lược về hiệu ứng Casimir và tổng quan về tình hình nghiên cứu hiệu ứng Casimir trong vật lý, đặc biệt là trong môi trường ngưng tụ Bose-Einstein;
2. Tóm tắt hai phương pháp cơ bản được sử dụng rộng rãi để nghiên cứu hiệu ứng Casimir trong BEC một và hai thành phần là phương pháp trường trung bình với lý thuyết GP và phương pháp tác dụng hiệu dụng CJT.

Chương 2

Hiệu ứng Casimir trong ngưng tụ Bose-Einstein một thành phần

Trong chương này, chúng ta nghiên cứu hiệu ứng Casimir của hệ BEC một thành phần bị giam trong không gian giữa hai tường cứng đặt song song với nhau và cách nhau một khoảng l . Chọn trục $0z$ sao cho nó vuông góc với hai tường cứng và gốc tọa độ nằm giữa hai tường. Các nội dung nghiên cứu được tiến hành trong cả GCE và CE. Bên cạnh việc nghiên cứu hiệu ứng Casimir trong gần đúng hai vòng, một số vấn đề chưa được giải quyết triệt để trong [75] (gần đúng một vòng) sẽ được nghiên cứu trong chương này.

Nội dung chương này được công bố trong các công trình 3, 4 và 5.

2.1 Nghiên cứu lực Casimir-like

Lực Casimir-like trong hệ BEC một thành phần bị giam giữa hai tường cứng đặt vuông góc với trục $0z$ đã được nghiên cứu trong [75] với điều kiện biên Robin. Trong luận án này, chúng tôi sử dụng điều kiện

biên Dirichlet được áp dụng tại vị trí của hai tường cứng, tức là

$$\Psi\left(-\frac{\ell}{2}\right) = \Psi\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0. \quad (2.1)$$

Hệ được khảo sát ở nhiệt độ không trong cả GCE và CE.

Về mặt toán học, các kết quả ứng với điều kiện biên Dirichlet có thể dễ dàng suy ra từ kết quả tương ứng với điều kiện biên Robin. Để có thể tạo ra điều kiện biên Robin, trên lý thuyết, ta phải đưa vào các trường bề mặt ψ_α tại các vị trí tường cứng [75]. Về mặt thực nghiệm, theo hiểu biết của chúng tôi, hiện chưa thể tạo ra điều kiện biên Robin cho hàm sóng mô tả trạng thái cơ bản của hệ. Tuy nhiên, điều kiện biên Dirichlet không khó để tạo ra bằng cách sử dụng thế quang học hoặc quang tử [2, 23]. Đặc biệt, nhờ sự phát triển của công nghệ làm lạnh nguyên tử trong những năm gần đây, phương pháp thế mạng quang học (optical lattice) [25, 40] giúp tạo ra tường cứng để giam giữ các phân tử của hệ ngưng tụ BEC và tạo được điều kiện biên Dirichlet.

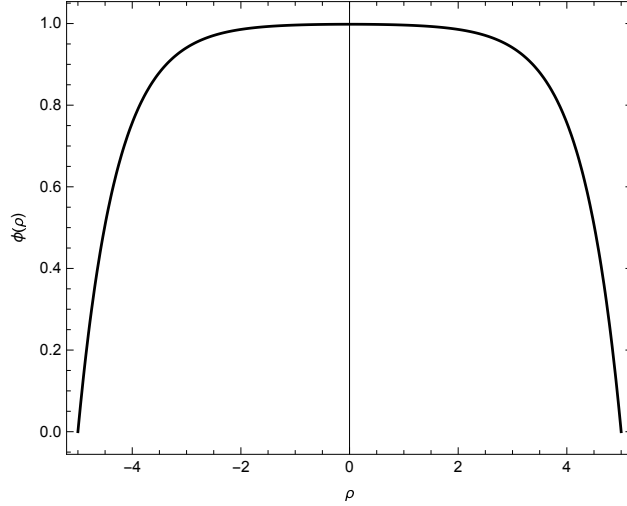
2.1.1 Trạng thái cơ bản

Trước tiên, chúng tôi tìm hàm sóng mô tả trạng thái cơ bản của hệ, tức là tìm nghiệm của phương trình GP (1.62). Sử dụng các biến số không thứ nguyên, trong DPA ta phải tìm nghiệm của phương trình (1.79) với điều kiện biên (2.1) được viết lại như sau

$$\phi\left(-\frac{L}{2}\right) = \phi\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \quad (2.2)$$

với $L = \ell/\xi$. Có thể dễ dàng giải phương trình (1.79) với điều kiện biên (2.2), ta có được hàm sóng ở trạng thái cơ bản

$$\phi(\rho) = 1 - \cosh(\alpha\rho) \sec\left(\frac{L}{\alpha}\right). \quad (2.3)$$



Hình 2.1: Sự phụ thuộc của tham số trật tự theo tọa độ.

Đồ thị biểu diễn (2.3) được vẽ trong Hình 2.1. Kết quả cho thấy, hàm sóng mô tả trạng thái cơ bản của hệ bị triệt tiêu tại các vị trí của tường cứng và nó nhanh chóng đạt giá trị của mật độ khối của ngưng tụ trong khoảng không gian giữa hai tường cứng.

2.1.2 Lực Casimir-like trong GCE

Bây giờ chúng tôi sẽ sử dụng hàm sóng (2.3) để khảo sát lực Casimir-like của hệ BEC một thành phần trong GCE. Để làm điều này, hàm thế chính tắc lớn của ngưng tụ được định nghĩa [36],

$$\Omega = \int_V d\vec{r} \psi^* \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\vec{r}^2} \right] \psi + V, \quad (2.4)$$

với thế tương tác có dạng

$$V = \int_V d\vec{r} \left[-\mu\psi^2 + \frac{g}{2}\psi^4 \right]. \quad (2.5)$$

Để thuận lợi cho các tính toán, chúng tôi đưa biểu thức về dạng không thứ nguyên và xem xét trong DPA

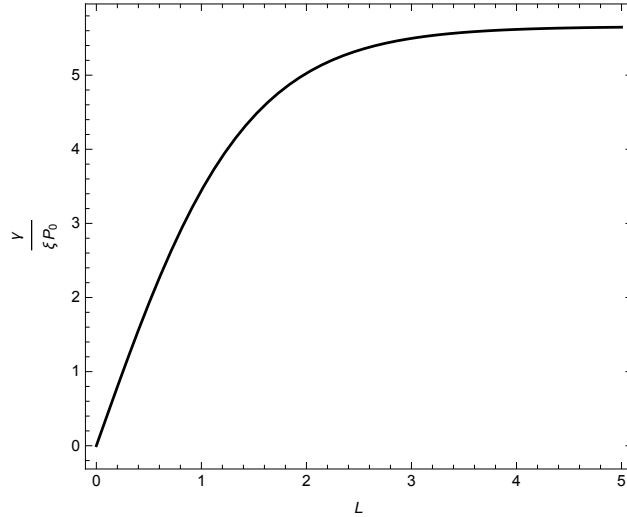
$$\Omega = 2P_0S \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} [\phi^* \partial_\rho^2 \phi + V_{DAP}] d\rho, \quad (2.6)$$

với $P_0 = gn_0^2/2$ là áp suất. Kết hợp (1.78) và (2.6), ta thu được năng lượng biến thiên trên một đơn vị diện tích bề mặt (hay sức căng mặt ngoài)

$$\gamma = \frac{\Omega - \Omega_b}{S} = 2P_0\xi \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} d\rho [\phi^* \partial_\rho^2 \phi + 2(\phi - 1)^2]. \quad (2.7)$$

Thay biểu thức (2.3) vào (2.7), chúng tôi thu được

$$\gamma = 4\alpha P_0\xi \tanh\left(\frac{L}{\alpha}\right). \quad (2.8)$$



Hình 2.2: Sự phụ thuộc của sức căng bề mặt vào L trong GCE.

Hình 2.2 biểu diễn sự phụ thuộc của sức căng bề mặt vào khoảng cách L . Chúng ta nhận thấy, tại $L = 0$ sức căng bề mặt bằng không và nó tăng lên khi L tăng. Khi khoảng cách đủ lớn, sức căng bề mặt trở thành một hằng số

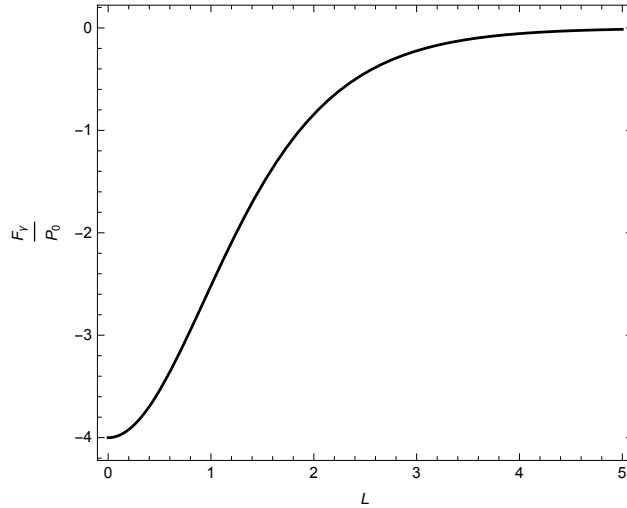
$$\lim_{L \rightarrow \infty} \gamma = 4\alpha P_0 \xi. \quad (2.9)$$

Lực tương ứng với năng lượng bề mặt dư thừa được định nghĩa là gradient của năng lượng bề mặt. Trong GCE có dạng

$$F_\gamma = -\frac{\partial \gamma}{\partial \ell} = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \gamma}{\partial L}. \quad (2.10)$$

Thay (2.8) vào (2.10), ta thu được lực Casimir-like

$$F_\gamma = -4P_0 \operatorname{sech} \left(\frac{L}{\alpha} \right)^2. \quad (2.11)$$



Hình 2.3: Sự phụ thuộc của lực Casimir-like vào L trong GCE.

Hình 2.3 biểu diễn lực Casimir-like trong GCE theo L . Rõ ràng là lực này là hút và độ lớn của nó có xu hướng bằng không khi L ở miền lớn. Lúc này, khoảng cách giữa hai tường cứng rất lớn so với độ dài đặc

trung nên hiệu ứng kích thước hữu hạn trở nên mờ nhạt. Khi $L \rightarrow 0$ thì lực Casimir-like có giá trị hữu hạn

$$\lim_{L \rightarrow 0} F_\gamma = -4P_0. \quad (2.12)$$

Về mặt vật lý, khi khoảng cách giữa các tường cứng bằng 0, các nguyên tử của hệ BEC bị đẩy xuống bể chứa, chỉ còn lớp rất mỏng dính vào tường cứng.

2.1.3 Lực Casimir-like trong CE

Bây giờ, chúng ta hãy khảo sát hệ trong CE. Số hạt của hệ được viết dưới dạng

$$N = n_0 \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \psi(z)^2 dz, \quad (2.13)$$

và có giá trị không đổi. Khi hệ BEC thỏa mãn điều kiện loãng, khi đó có thể coi tương tác giữa các phân tử là yếu, thế hóa có thể lấy gần đúng, theo (1.46), là $\mu = gn_0$. Khi đó, hàm sóng mô tả trạng thái cơ bản vẫn sẽ có dạng (2.3).

Năng lượng bề mặt trong CE được định nghĩa bởi P. Ao và T. S. Chui [3],

$$\Delta E = E - \mu N = E - N \frac{\partial E}{\partial N}. \quad (2.14)$$

Kết hợp phương trình (2.13) và (2.14), chúng ta thu được sức căng mặt ngoài là [3],

$$\sigma = \frac{\Delta E}{S} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} dz \psi \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi. \quad (2.15)$$

Số hạt bị giam giữ trong khoảng không gian giữa hai tấm trong biểu

thức (2.13) được viết lại

$$N = \int_V \psi(z)^2 dz = n_0 \xi S \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \phi^2 d\rho \equiv n_0 S I_0. \quad (2.16)$$

Ở dạng thứ nguyên, hàm sóng ở trạng thái cơ bản (2.3) được viết lại

$$\phi(z) = 1 - \cosh\left(\frac{\alpha z}{\xi}\right) + \sinh\left(\frac{\alpha z}{\xi}\right) \tanh\left(\frac{\ell}{\alpha \xi}\right). \quad (2.17)$$

Thay (2.17) vào (2.16) ta có

$$I_0 = \ell + \frac{\ell}{\cosh\left(\frac{\alpha \ell}{\xi}\right) + 1} - \frac{3\xi}{\alpha} \tanh\left(\frac{\ell}{\alpha \xi}\right). \quad (2.18)$$

Từ các biểu thức (2.15) - (2.18), chúng ta thu được sức căng mặt ngoài

$$\sigma = \sigma_0 \frac{S \hbar^2 \left[\xi \sinh\left(\frac{\alpha \ell}{\xi}\right) - \alpha \ell \right]}{m g \ell N \left\{ \alpha \ell \left[\cosh\left(\frac{\alpha \ell}{\xi}\right) + 2 \right] - 3 \xi \sinh\left(\frac{\alpha \ell}{\xi}\right) \right\}}, \quad (2.19)$$

trong đó $\sigma_0 = \frac{m g^2 N^3}{\hbar^2 S^3}$.

Lực Casimir-like được định xác định theo công thức

$$F_\sigma = -\frac{\partial \sigma}{\partial \ell}. \quad (2.20)$$

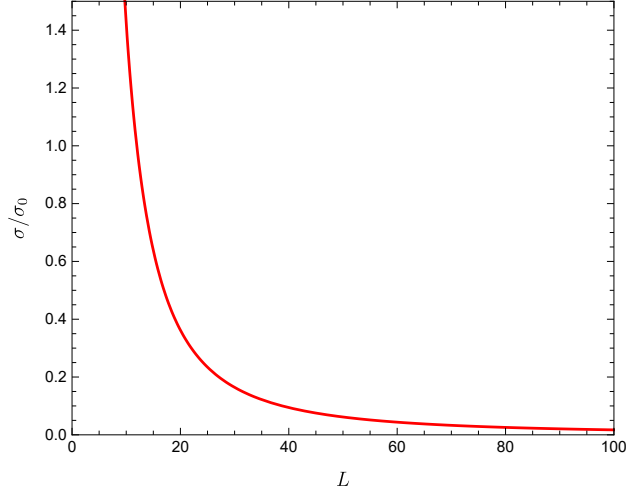
Thay biểu thức (2.19) vào biểu thức (2.20), ta có

$$\frac{F_\sigma}{F_0} = \frac{F_1}{4g^2 \ell m^2 N^2 \left[-3\alpha \xi \sinh\left(\frac{\alpha \ell}{\xi}\right) + 2\ell \cosh\left(\frac{\alpha \ell}{\xi}\right) + 4\ell \right]^2}, \quad (2.21)$$

với

$$F_1 = S \hbar^2 \left\{ 2\alpha \xi \sinh\left(\frac{\alpha \ell}{\xi}\right) \left[3S \hbar^2 \cosh\left(\frac{\alpha \ell}{\xi}\right) + 9S \hbar^2 - 4g \ell m N \right] - 4S \ell \hbar^2 \cosh\left(\frac{\alpha \ell}{\xi}\right) \right\},$$

và $F_0 = \frac{2m^2 g^3 N^4}{\hbar^4 S^4}$.

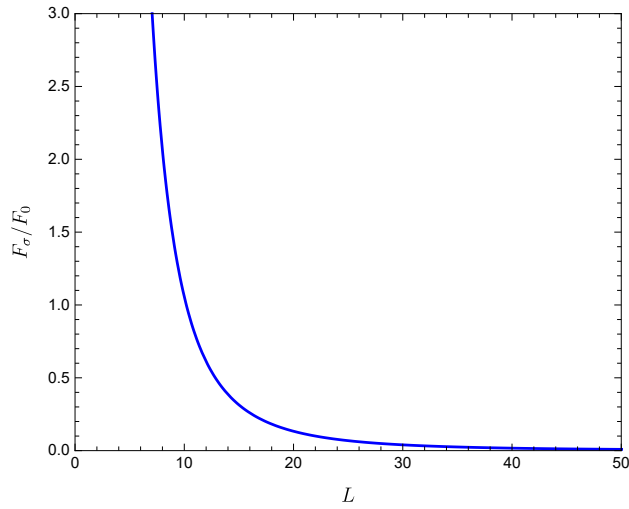


Hình 2.4: Sự phụ thuộc của sức căng bề mặt vào L trong CE.

Kết quả tính của chúng tôi và các kết quả tương ứng trong [75] cho thấy một điểm khác biệt nữa là lực Casimir-like trong CE (ở dạng không thứ nguyên), ngoài phụ thuộc vào các tham số cấu hình của hệ như trong GCE, nó còn phụ thuộc vào hằng số tương tác giữa các hạt trong hệ. Vì vậy, để đánh giá về những đặc điểm định tính của lực Casimir-like trong CE, thay vì tính số cho natri như trong [75], trong luận án này ta hãy tính số cho hệ BEC một thành phần của các nguyên tử rubidi 87 [70]. Các tham số của rubidi là $m = 86.909u$ ($1u = 1.660510^{-27}\text{kg}$), $a = 100.4a_0$, $a_0 = 0.529\text{\AA}$ là bán kính Bohr, diện tích mỗi tường cứng $S = 10^{-6}\text{m}^2$, số hạt $N = 6.10^6$, mật độ khối $n_0 = \frac{N}{S\ell} \approx 2.5 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$, điều kiện loãng $n_0 a^3 \approx 3.745 \times 10^{-7} \ll 1$ và độ dài đặc trưng $\xi = 4000\text{\AA}$.

Hình 2.4 và 2.5 biểu diễn sự phụ thuộc của sức căng bề mặt và lực Casimir-like trong CE vào khoảng cách L . Chúng ta nhận thấy rằng, giống như kết quả trong GCE, lực này sẽ bằng không khi khoảng cách đủ lớn để có thể bỏ qua hiệu ứng kích thước hữu hạn. Điểm khác biệt ở đây là lực Casimir-like trong CE là lực đẩy và tăng rất nhanh khi khoảng

cách giữa các tường cứng giảm, nó trở nên vô cùng lớn khi khoảng cách này tiến dần đến không. Đây là biểu hiện của tính chất không chịu nén của chất lỏng. Kết hợp kết quả tính số cho rubidi 87 và natri 23 trong [75], chúng ta có thể kết luận rằng, những nhận xét về lực Casimir-like trong CE đúng cho mọi hệ ngưng tụ BEC một thành phần, mặc dù tốc độ biến thiên độ lớn của lực Casimir-like theo khoảng cách giữa hai tường cứng ứng với các hệ khác nhau sẽ khác nhau.



Hình 2.5: Sự phụ thuộc của lực Casimir-like vào L trong CE.

2.2 Lực Casimir

Trong phần tiếp theo này, chúng tôi xem xét hiệu ứng Casimir trong hệ BEC một thành phần tương tác yếu trong gần đúng HF, trong đó có tính đến các thăng giáng lượng tử.

Lagrangian của hệ có dạng

$$\mathcal{L} = \psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi - \mu \psi^* \psi + \frac{g}{2} (\psi^* \psi)^2, \quad (2.22)$$

với ψ là toán tử trường và giá trị trung bình của nó đóng vai trò như tham số trật tự của mô hình.

Để tính đến các thăng giáng lượng tử, trước hết chúng tôi khai triển toán tử trường ψ theo giá trị trung bình Ψ_0 của nó và hai trường thực Ψ_1, Ψ_2 ứng với các thăng giáng này [1]. Trong gần đúng HF, ta viết toán tử trường dưới dạng [1],

$$\psi = \Psi_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1 + i\Psi_2). \quad (2.23)$$

Thay (2.23) vào (2.22), chúng tôi thu được Lagrangian tương tác trong gần đúng hai vòng

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{g}{\sqrt{2}} \Psi_0 \Psi_1 (\Psi_1^2 + \Psi_2^2) + \frac{g}{8} (\Psi_1^2 + \Psi_2^2)^2. \quad (2.24)$$

Hàm truyền nghịch đảo tương ứng trong không gian xung lượng là

$$D^{-1}(k) = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1} + 2g\Psi_1^2 & -\omega \\ \omega & \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1} \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

với \vec{k} là vectơ sóng.

Hệ thức tán sắc Bogoliubov cho ngưng tụ có thể thu được bằng cách cho định thức của hàm truyền nghịch đảo bằng không [28], tức là

$$\det D^{-1} = 0, \quad (2.26)$$

do đó

$$E(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2g\Psi_0^2 \right)}. \quad (2.27)$$

Trong giới hạn bước sóng dài, phương trình (2.27) có thể viết gần đúng dưới dạng

$$E(k) \approx k \sqrt{\frac{\hbar^2}{m} g \Psi_0^2}, \quad (2.28)$$

tương ứng với bosson Goldstone do đối xứng $U(1)$ bị phá vỡ. Những kích thích này lan truyền theo cách tương tự như photon của trường điện từ trong các tính toán ban đầu của Casimir [16], trong trường hợp này, vận tốc của các hạt bằng với "vận tốc âm".

2.2.1 Nghiên cứu trong gần đúng một vòng

Tiếp theo, chúng tôi sẽ xét hệ trong gần đúng một vòng. Trong gần đúng này, dựa vào Lagrangian tương tác (2.24), thế nhiệt động có thể viết dưới dạng [1],

$$\Omega = \frac{1}{2} \int_{\beta} \text{Tr} \ln D^{-1}(k), \quad (2.29)$$

ở đây chúng tôi sử dụng ký hiệu

$$\int_{\beta} f(k) = k_B T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f(\omega_n, k), \quad (2.30)$$

và $\omega_n = 2\pi n/\beta$ là tần số Matsubara và T là nhiệt độ, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Sử dụng công thức [67],

$$\beta \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \ln [\omega_n^2 + E^2(k)] = E(k) + 2\beta \ln [1 - e^{-\beta E(k)}], \quad (2.31)$$

ta có thể thực hiện phép lấy tổng theo ω_n . Kết quả là (2.29) có dạng

$$\frac{1}{2} \int_{\beta} \text{Tr} \ln D_j^{-1}(k) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[E_j + \frac{2}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta E_j}) \right]. \quad (2.32)$$

Với chú ý rằng, chúng tôi đang nghiên cứu về năng lượng Casimir và lực Casimir ở nhiệt độ bằng không gây ra bởi các thăng giáng lượng tử, do đó, số hạng phụ thuộc nhiệt độ trong (2.32) có thể bỏ qua. Mật độ năng lượng tự do trong gần đúng một vòng (2.29) có thể được viết lại

$$\Omega = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2g\Psi^2 \right)}. \quad (2.33)$$

Để cho đơn giản, chúng tôi cũng sử dụng các đại lượng không thứ nguyên như khi nghiên cứu lực Casimir-like. Khi đó, phương trình (2.33) có dạng

$$\Omega = \frac{gn_0}{2\xi^3} \int \frac{d^3\kappa}{(2\pi)^3} \sqrt{\kappa^2 (\kappa^2 + 2\phi^2)}, \quad (2.34)$$

trong đó chúng tôi sử dụng vectơ sóng không thứ nguyên $\kappa = k\xi$.

Do sự giam giữ dọc theo trục $0z$, vectơ sóng được lượng tử hóa như sau

$$k^2 \rightarrow k_{\perp}^2 + k_n^2, \quad (2.35)$$

trong đó k_{\perp} là thành phần vectơ sóng vuông góc với trục $0z$ và k_n là thành phần vectơ sóng song song với trục $0z$. Sử dụng điều kiện biên tuần hoàn ta có

$$k_n = \frac{2\pi n}{\ell}. \quad (2.36)$$

Trong thực nghiệm về BEC, điều kiện biên tuần hoàn được tạo ra theo một số phương pháp khác nhau. Tiêu biểu là phương pháp bẫy hình xuyên [15, 26] và phương pháp thế mạng quang học [69]. Ở dạng không thứ nguyên công thức (2.35) trở thành

$$\kappa^2 \rightarrow \kappa_{\perp}^2 + \kappa_n^2, \quad (2.37)$$

còn (2.36) có dạng

$$\kappa_n = \frac{2\pi n}{L} \equiv \frac{n}{\bar{L}}, \bar{L} = \frac{L}{2\pi}; L = \frac{\ell}{\xi}. \quad (2.38)$$

Do sự lượng tử hóa của vectơ sóng (2.37), tích phân theo vectơ sóng ba chiều sẽ biến đổi như sau

$$\int \frac{d^3\kappa}{(2\pi)^3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2\kappa_{\perp}}{(2\pi)^2}. \quad (2.39)$$

Sử dụng (2.37) và (2.39) ta có thể viết lại mật độ năng lượng (2.34) như sau

$$\Omega = \frac{gn_0}{2\xi^3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2\kappa_{\perp}}{(2\pi)^2} \sqrt{(\kappa_{\perp}^2 + \kappa_n^2)(\kappa_{\perp}^2 + \kappa_n^2 + \phi^2)}, \quad (2.40)$$

Sử dụng ký hiệu $M = \bar{L}\sqrt{\kappa_{\perp}^2 + \phi^2}$, công thức (2.40) có thể được viết dưới dạng

$$\Omega = \frac{gn_0}{2\xi^3\bar{L}^2} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^2\kappa_{\perp}}{(2\pi)^3} \sqrt{(\bar{L}^2\kappa_{\perp}^2 + n^2)(M^2 + n^2)}, \quad (2.41)$$

Tích phân theo thành phần véctơ sóng vuông góc với trục $0z$ trong (2.41) bị phân kì ở vùng tử ngoại. Hiện nay có một số phương pháp khác nhau để khử phân kỳ này như phương pháp ngắt xung lượng (cut-off), phương pháp dùng số hạng hấp thụ (counter term). Ở đây chúng ta sử dụng phương pháp ngắt xung lượng bằng cách đưa vào một giới hạn trên Λ cho xung lượng. Phương trình (2.41) được viết lại như sau

$$\Omega = \frac{gn_0}{4\pi\xi^3\bar{L}^2} \int_0^{\Lambda} \kappa_{\perp} d\kappa_{\perp} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(\bar{L}^2\kappa_{\perp}^2 + n^2)(M^2 + n^2)}. \quad (2.42)$$

Để thực hiện phép lấy tổng trong (2.42), chúng tôi sử dụng công thức Euler-Maclaurin [4],

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n F(n) - \int_0^{\infty} F(n) dn = -\frac{1}{12}F'(0) + \frac{1}{720}F'''(0) - \frac{1}{30240}F^{(5)}(0) + \dots \quad (2.43)$$

trong đó

$$\theta_n = \begin{cases} 1/2, & \text{nếu } n = 0; \\ 1, & \text{nếu } n > 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Thực hiện phép lấy tổng, sau đó lấy giới hạn $\Lambda \rightarrow \infty$, ta sẽ thu được phần hữu hạn của (2.42). Đây chính là năng lượng Casimir

$$\Omega = -\frac{gn_0}{\xi^2} \frac{\pi^2 \phi}{1440L^3}. \quad (2.45)$$

Lực Casimir được định nghĩa là trái dấu đạo hàm bậc nhất của năng lượng Casimir theo khoảng cách giữa các tường cứng

$$F_C = -\frac{\partial \Omega}{\partial \ell}. \quad (2.46)$$

a. Nghiên cứu trong GCE

Trong GCE, vì mật độ khối của ngưng tụ là không đổi nên độ dài đặc trưng ξ là hằng số. Định nghĩa (2.46) được viết lại như sau

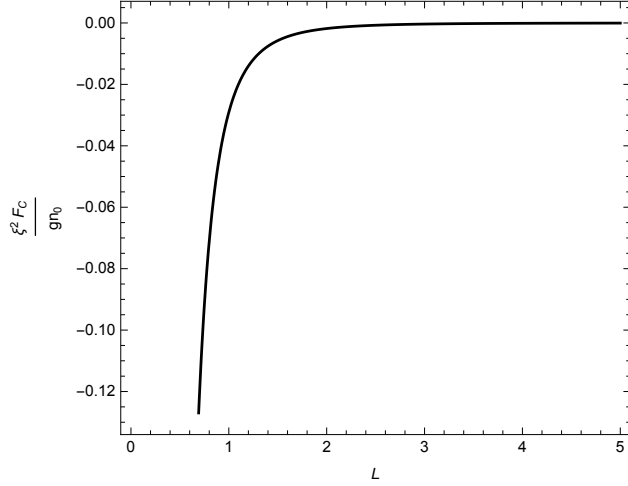
$$F_C = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \Omega}{\partial \ell}. \quad (2.47)$$

Từ (2.45) và (2.47) chúng ta thu được biểu thức của lực Casimir trong GCE

$$F_C = -\frac{gn_0}{\xi^2} \frac{\pi^2 \phi}{480L^4}. \quad (2.48)$$

Trên Hình 2.6 là đồ thị biểu diễn sự thay đổi của lực Casimir theo khoảng cách L giữa hai tường. Dựa vào phương trình (2.48) và Hình 2.6, chúng tôi đưa ra một số nhận xét:

- Lực Casimir luôn luôn là lực hút, do đó nó tăng độ lớn của lực Casimir toàn phần tác dụng lên các tấm;
- Có sự phân kỳ tại $L = 0$, đây là đặc điểm điển hình của sự biến dạng năng lượng chân không;



Hình 2.6: Sự phụ thuộc của lực Casimir vào L trong GCE.

- Độ lớn của lực Casimir giảm mạnh khi tăng khoảng cách, tuân theo quy luật L^{-4} . Điều này có nghĩa là lực Casimir chỉ đáng chú ý khi ở khoảng cách nhỏ.

Các kết quả này phù hợp với kết quả thu được trong [66] khi xét cho miền giới hạn của khoảng cách giữa hai tường cứng.

Bây giờ, chúng tôi đi xem xét lực Casimir toàn phần tác dụng lên các tấm trong GCE. Trước hết ta nhận thấy rằng, lực Casimir-like chính là thành phần trường trung bình, tức là thành phần ngưng tụ Ψ_0 trong khai triển (2.23) và được tính dựa trên lý thuyết GP. Lực Casimir gây ra bởi các thăng giáng lượng tử khỏi trạng thái cơ bản của hệ, tức là tương ứng với các trường thăng giáng Ψ_1, Ψ_1 trong khai triển (2.23) [13]. Như vậy hai lực này là độc lập với nhau nên có thể tổng hợp chúng để tính lực toàn phần.

Để so sánh với lực Casimir-like, phương trình (2.48) nên được viết lại

dưới dạng phụ thuộc vào áp suất

$$F_C = -P_0 \frac{4mg}{\hbar^2} \left[\frac{\pi^2 \phi}{480L^4} \right], \quad (2.49)$$

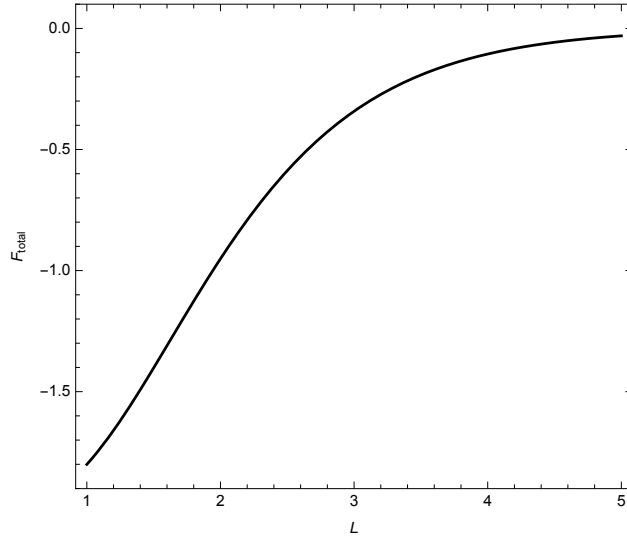
với $v_s = \sqrt{\mu/m}$ là vận tốc âm, lực Casimir trong (2.48) thu được trong giới hạn này là

$$F_C \approx -\frac{\hbar v_s}{L^4}. \quad (2.50)$$

Lực Casimir toàn phần tác động lên các tấm trong GCE có dạng

$$F_{\text{total}} = F_\gamma + F_C. \quad (2.51)$$

Vấn xét với rubidium 87 [70], chúng tôi thu được sự phụ thuộc vào khoảng cách L của lực Casimir toàn phần.



Hình 2.7: Sự phụ thuộc của lực Casimir toàn phần vào L trong GCE.

Sự phụ thuộc vào L của lực Casimir toàn phần được vẽ trong Hình 2.7. Trong vùng L nhỏ, khai triển chuỗi lũy thừa theo khoảng cách, lực Casimir toàn phần có dạng

$$F_{\text{total}} \approx -\frac{gm\pi^2}{120\hbar^2 L^4} + (2 - 2\alpha^2). \quad (2.52)$$

Biểu thức (2.52) cho thấy rằng trong vùng nhỏ L , lực Casimir là chiếm ưu thế.

Như vậy, về mặt toán học, lực Casimir và lực Casimir-like tìm được ở đây ứng với điều kiện biên Dirichlet tương tự như kết quả đã tìm được trong [75] khi độ dài suy rộng λ_W (extrapolation length) của các tường triệt tiêu.

b. Nghiên cứu trong CE

Khi nghiên cứu trong CE, mật độ khối của ngưng tụ n_0 phụ thuộc vào khoảng cách giữa các tường cứng, do đó độ dài đặc trưng cũng phụ thuộc vào ℓ . Từ biểu thức (2.16), năng lượng Casimir trong (2.45) được viết lại dưới dạng có thứ nguyên

$$\Omega = -\frac{\pi^2 \phi \hbar^2}{1440 \alpha m \xi I_0 \ell^2}. \quad (2.53)$$

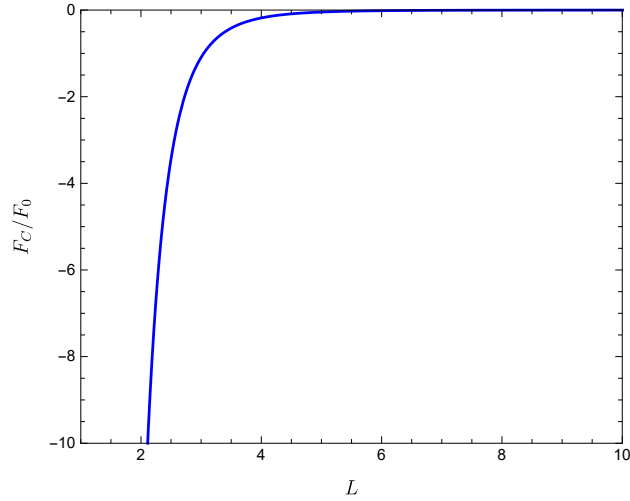
Thay biểu thức (2.53) vào phương trình (2.46), chúng tôi có được

$$\frac{F_C}{F_0} = \frac{M}{1440 \alpha m^3 g^3 N^4 \ell^3 \left[2\ell \cosh\left(\frac{\alpha \ell}{\xi}\right) + 4\ell - 3\alpha \xi \sinh\left(\frac{\alpha \ell}{\xi}\right) \right]^2}, \quad (2.54)$$

ở đây

$$M = \pi^2 S^3 \phi \hbar^4 \cosh\left(\frac{\ell}{\alpha \xi}\right) \left[\sinh\left(\frac{\ell}{\alpha \xi}\right) (9S\hbar^2 + 4gmN\ell) + 9S\hbar^2 \sinh\left(\frac{3\ell}{\alpha \xi}\right) - 29\alpha mgN\xi \cosh\left(\frac{\ell}{\alpha \xi}\right) - 7\alpha mgN \cosh\left(\frac{3\ell}{\alpha \xi}\right) \right].$$

Hình 2.8 là đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của lực Casimir vào khoảng cách L trong CE với các tham số đã chọn. Ở đây khoảng cách giữa hai tường cứng được đo theo đơn vị $\xi_0 = 4000\text{\AA}$. Kết quả cho thấy, về cơ

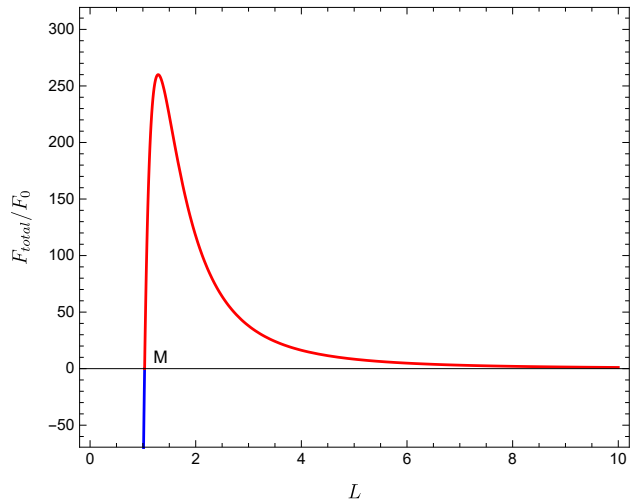


Hình 2.8: Sự phụ thuộc của lực Casimir vào L trong CE.

bản, lực Casimir trong CE và GCE chỉ khác nhau ở độ lớn và tốc độ suy giảm khi khoảng cách giữa các tường cứng tăng lên.

Với lực Casimir toàn phần tác dụng lên các tường trong CE, theo định nghĩa ta có

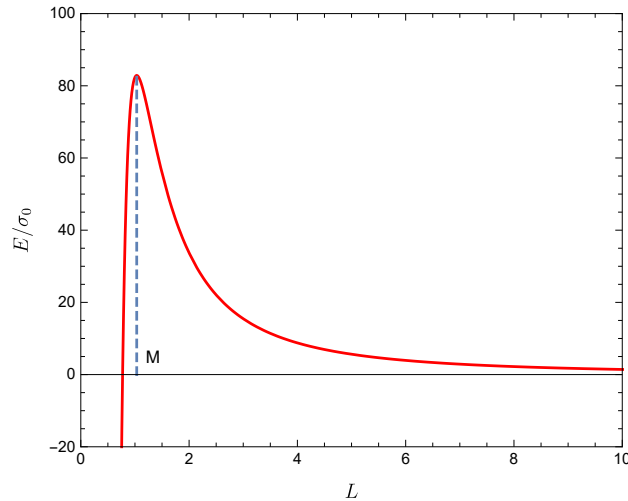
$$F_{\text{total}} = F_{\sigma} + F_C. \quad (2.55)$$



Hình 2.9: Sự phụ thuộc của lực Casimir toàn phần vào L trong CE.

Bây giờ chúng ta sẽ giải quyết một số vấn đề còn bỏ ngỏ trong công

trình [75]. Trước tiên, giống như đối với lực Casimir-like, ở đây các tính số được thực hiện cho hệ BEC một thành phần của rubidi 87, thay cho hệ natri 23. Sự phụ thuộc vào khoảng cách giữa hai tường cứng của lực Casimir toàn phần được vẽ trên Hình 2.9. Kết quả cho thấy, lực Casimir toàn phần là lực đẩy ở vùng khoảng cách lớn (đường cong màu đỏ) và là lực hút ở vùng khoảng cách nhỏ (đường màu xanh). Đối với hệ ngưng tụ rubidi 87, lực tổng hợp đổi chiều tại điểm M với $L = 1.0327$. Điểm này trùng khớp chính xác với điểm tại đó tổng năng lượng $E = \sigma + \Omega$ là cực đại như trên Hình 2.10.



Hình 2.10: Sự phụ thuộc của tổng năng lượng vào L trong CE.

Bằng cách này, ta có thể khai triển lực như một chuỗi theo vùng khoảng nhỏ. Dẫn đến phương trình (2.21) có dạng

$$F_{\sigma} \approx \frac{5S^3 \hbar^6}{2m^3 g^3 N^3 \ell^3}, \quad (2.56)$$

và biểu thức (2.54) được viết lại

$$F_C^{(CE)} \approx -\frac{11\pi^2 S^5 \phi \hbar^8}{192\alpha^4 m^4 g^4 N^5 \ell^7} \xi. \quad (2.57)$$

Do $\xi \sim \ell^{1/2}$, trong biểu thức (2.57) cho thấy lực Casimir trong CE tỉ lệ với $\ell^{-13/2}$, trong khi (2.49) cho thấy lực Casimir trong GCE tỉ lệ với ℓ^{-4} . Như vậy, thay cho quy luật suy giảm theo lũy thừa nguyên của khoảng cách giữa hai tường cứng trong GCE, trong CE lực Casimir suy giảm theo lũy thừa bán nguyên của khoảng cách giữa hai tường cứng. Đây là một kết quả chưa được khảo sát trong [75].

Tại vị trí mà lực tổng hợp triệt tiêu, lực Casimir-like và lực Casimir có cùng độ lớn nhưng ngược chiều nhau. Từ đây ta tìm được giá trị của khoảng cách giữa hai tường mà lực Casimir toàn phần triệt tiêu là

$$\ell_0 \approx \frac{1}{4} \left(\frac{121\pi^4 \hbar^6 S^5}{450m^3 g^3 N^3} \right)^{1/7}. \quad (2.58)$$

Như đã nhận xét ở trên, khi nghiên cứu trong CE, lực Casimir-like và lực Casimir không chỉ phụ thuộc vào khoảng cách giữa hai tường cứng mà còn phụ thuộc vào từng hệ cụ thể: số hạt trong hệ, khối lượng nguyên tử ngưng tụ và cường độ tương tác giữa các nguyên tử. Kết quả (2.58) cho thấy, với các hệ nguyên tử khác nhau luôn tồn tại một giá trị của khoảng cách giữa hai tường cứng mà ở đó lực Casimir toàn phần bị triệt tiêu.

2.2.2 Nghiên cứu trong gần đúng hai vòng

Sử dụng phương pháp tác dụng hiệu dụng CJT, chúng tôi đi nghiên cứu lực Casimir trong gần đúng hai vòng. Ở nhiệt độ hữu hạn, trong

gần đúng HF, thế hiệu dụng CJT có dạng [21],

$$V_{\beta}^{CJT}(\psi_0, D) = -\mu\psi_0^2 + \frac{g}{2}\psi_0^4 + \frac{1}{2} \int_{\beta} \text{Tr} [\ln D^{-1}(k) + D_0^{-1}(k, \psi_0)D(k) - \mathbb{1}] \\ + \frac{3g}{8}P_{11}^2 + \frac{3g}{8}P_{22}^2 + \frac{g}{4}P_{11}P_{22}, \quad (2.59)$$

trong đó chú ý đến (2.30), và

$$P_{11} = \int_{\beta} D_{11}(k), P_{22} = \int_{\beta} D_{22}(k),$$

được gọi là các tích phân mômen xung lượng. Trong biểu thức (2.59), $D(k)$ là hàm truyền trong gần đúng HF, các phần tử của nó thu được bằng cách cực tiểu hóa thế hiệu dụng (2.59) theo chính các phần tử của hàm truyền và kết quả là

$$D^{-1}(k) = D_0^{-1}(k) + \Sigma, \quad (2.60)$$

trong đó

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

với

$$\Sigma_1 = \frac{3g}{2}P_{11} + \frac{g}{2}P_{22}, \quad (2.62)$$

$$\Sigma_2 = \frac{g}{2}P_{11} + \frac{3g}{2}P_{22}. \quad (2.63)$$

Phương trình khe thu được bằng cách cực tiểu hóa thế hiệu dụng (2.59) theo tham số trật tự, chúng tôi thu được

$$-\mu + g\psi_0^2 + \Sigma_1 = 0. \quad (2.64)$$

Tương tự, phương trình SD có dạng

$$M = -\mu + 3g\psi_0^2 + \Sigma_2. \quad (2.65)$$

Kết hợp phương trình (2.64),(2.65) và (2.60), chúng tôi thu được hàm truyền nghịch đảo trong gần đúng HF

$$D^{-1}(k) = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu + 3g\psi_0^2 + \Sigma_1 & -\omega_n \\ \omega_n & \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu + g\psi_0^2 + \Sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

và kết hợp với (2.26) ta thu được hệ thức tán sắc

$$E = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu + 3g\psi_0^2 + \Sigma_1\right) \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu + g\psi_0^2 + \Sigma_2\right)}. \quad (2.67)$$

Trong giới hạn sóng dài, công thức (2.67) không thể đưa được về dạng (2.28), tức là boson Goldstone xuất hiện trong gần đúng cây đã biến mất. Như thế, định lý Goldstone bị vi phạm. Để khôi phục lại định lý Goldstone [31], chúng tôi áp dụng phương pháp được đề xuất bởi Y. B. Ivanov và cộng sự [38]. Theo đó chúng tôi thêm vào thế hiệu dụng số hạng

$$\Delta V = \frac{xg}{2} [2P_{ab}P_{ba} - P_{aa}P_{bb}], \quad (2.68)$$

trong đó

$$P_{ab} = \int D_{ab}, \quad (a, b = 1, 2). \quad (2.69)$$

Để cho định lý Goldstone được nghiệm đúng thì ta phải có $D_{22}^{-1} = \hbar^2 k^2 / 2m$, tức là $x = -1/2$. Thay vào (2.68) ta được

$$\Delta V = -\frac{g}{4} [P_{11}^2 + P_{22}^2 - 2P_{11}P_{22}], \quad (2.70)$$

Thay (2.70) vào (2.59), chúng tôi thu được thể hiệu dụng

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\beta^{CJT}(\psi_0, D) = & -\mu\psi_0^2 + \frac{g}{2}\psi_0^4 + \frac{1}{2} \int_\beta \text{Tr} [\ln D^{-1}(k) + D_0^{-1}(k, \psi_0)D(k) - \mathbb{1}] \\ & + \frac{g}{8}P_{11}^2 + \frac{g}{8}P_{22}^2 + \frac{3g}{4}P_{11}P_{22}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Cực tiểu hóa của thể hiệu dụng (2.71) theo các yếu tố của hàm truyền và tham số trật tự, chúng tôi thu được phương trình SD

$$M = -\mu + 3g\psi_0^2 + \Sigma_1, \quad (2.72)$$

và phương trình khe

$$-\mu + g\psi_0^2 + \Sigma_2 = 0, \quad (2.73)$$

với

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \frac{g}{2}P_{11} + \frac{3g}{2}P_{22}, \\ \Sigma_2 &= \frac{3g}{2}P_{11} + \frac{g}{2}P_{22}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Tương tự như trong gần đúng HF, sử dụng các công thức (2.71), (2.72) và (2.73), ta thu được hàm truyền nghịch đảo

$$D^{-1}(k) = \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + M & -\omega_n \\ \omega_n & \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \end{pmatrix}, \quad (2.75)$$

Kết hợp (2.75) với điều kiện (2.26), chúng ta thu được hệ thức tán sắc

$$E = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + M \right)}, \quad (2.76)$$

với M là khối lượng hiệu dụng. Như vậy, bằng cách thêm số hạng (2.70) vào thể hiệu dụng trong gần đúng HF, chúng tôi thu được thể hiệu dụng CJT mới (2.71) và boson Goldstone được phục hồi. Đây là lý do chúng tôi gọi nó là gần đúng IHF.

Sử dụng quy tắc lấy tổng [67],

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_n^2 + E^2(k)} = \frac{\beta}{2E(k)} \left[1 + \frac{2}{e^{\beta E(k)} - 1} \right], \quad (2.77)$$

chúng tôi thu được các tích phân mômen xung lượng ở nhiệt độ 0 có dạng

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2/2m}{\hbar^2 k^2/2m + M}}, \\ P_{22} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2/2m + M}{\hbar^2 k^2/2m}}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Do sự rút ngắn không gian dọc theo trục $0z$, vectơ sóng bị lượng tử hóa như ở (2.35)-(2.38). Lúc này các tích phân mômen xung lượng (2.78), sau khi chuyển về các đại lượng không thứ nguyên, có dạng

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{1}{2\xi^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^2\kappa_{\perp}}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\kappa_{\perp}^2 + k_n^2}{\kappa_{\perp}^2 + \kappa_n^2 + \mathcal{M}}}, \\ P_{22} &= \frac{1}{2\xi^3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^2\kappa_{\perp}}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\kappa_{\perp}^2 + \kappa_n^2 + \mathcal{M}}{\kappa_{\perp}^2 + \kappa_n^2}}, \end{aligned} \quad (2.79)$$

với $\mathcal{M} = \frac{M}{gn_0}$. Sử dụng công thức Euler-Maclaurin (2.43) thì (2.79) sẽ cho

$$\begin{aligned} P_{11} &= 0, \\ P_{22} &= \frac{gn_0 m \mathcal{M}^{1/2}}{12\hbar^2 \ell}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Kết hợp các phương trình (2.72), (2.73), (2.74), (2.45) và (2.46), chúng tôi thu được phương trình SD và phương trình khe ở dạng không thứ nguyên

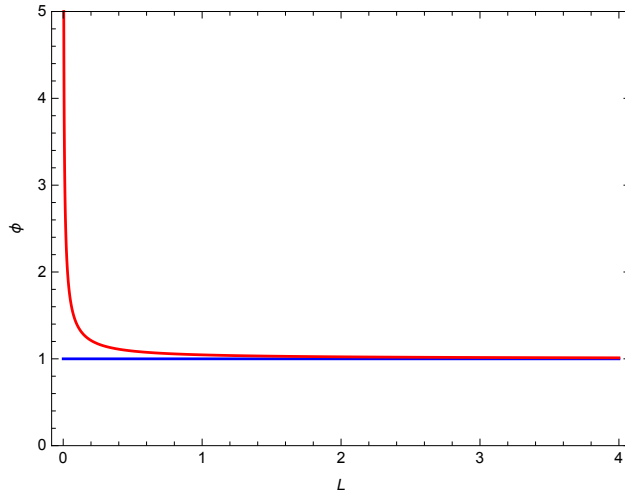
$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -1 + 3\phi^2 + \frac{3gm\mathcal{M}^{1/2}}{2 \cdot 12\hbar^2 \ell}, \\ -1 + \phi^2 + \frac{gm\mathcal{M}^{1/2}}{2 \cdot 12\hbar^2 \ell} &= 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Dễ dàng để giải hệ phương trình (2.81), chúng tôi thu được kết quả

$$\mathcal{M} = 2, \quad (2.82)$$

$$\phi = \sqrt{1 + \frac{mg\mathcal{M}^{1/2}}{24\hbar^2\ell}}. \quad (2.83)$$

Mặc dù khối lượng hiệu dụng thu được trong gần đúng IHF có cùng giá trị như trong gần đúng một vòng nhưng ở đây có sự khác biệt đối với tham số trật tự. Trong gần đúng một vòng, tham số trật tự bằng hằng số và đồng nhất. Trong biểu thức (2.83) cho thấy rằng, trong gần đúng IHF tham số trật tự phụ thuộc mạnh vào khoảng cách giữa các tường cứng, đặc biệt ở miền L nhỏ và nó bị phân kì khi khoảng cách này tiến tới không.



Hình 2.11: Sự phụ thuộc của tham số trật tự vào L trong gần đúng hai vòng.

Hình 2.11 là đồ thị biểu diễn tham số trật tự như một hàm của khoảng cách đối với ngưng tụ của rubidium 87. Khi khoảng cách L tăng thì tham số trật tự giảm nhanh và có xu hướng không đổi tiến đến giá trị của nó

trong gần đúng một vòng ở miền L lớn

$$\phi = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}(n_0 a^3)^{1/2} \mathcal{M}^{1/2}}{3L}}. \quad (2.84)$$

Đối với hệ BEC loãng $n_0 a^3 \ll 1$, khai triển gần đúng (2.84), chúng tôi có được

$$\phi = \phi_1 + \frac{\pi^{3/2}(n_0 a^3)^{1/2}}{3L}, \quad (2.85)$$

trong đó $\phi_1 = 1$ là tham số trật tự trong gần đúng một vòng.

Từ biểu thức (2.82) chúng tôi thấy rằng khối lượng hiệu dụng là một hằng số và nó không phụ thuộc vào khoảng cách giữa hai tấm song song nên không ảnh hưởng đến lực Casimir. Vì vậy biểu thức lực Casimir tương tự với trong gần đúng một vòng.

Tổng kết chương 2

Trong Chương 2, chúng tôi đã nghiên cứu tính chất của hệ BEC một thành phần bị giới hạn bởi hai tường cứng trong cả CE và GCE. Các kết quả chính thu được, ngoài những kết quả giống như đã trình bày trong [75], có thể liệt kê như sau:

1. Khi xét ở dạng không thứ nguyên, khác với các kết quả trong GCE, lực Casimir-like và lực Casimir trong CE, ngoài phụ thuộc vào khoảng cách giữa các tường cứng còn phụ thuộc vào bản chất của hệ bị giam cầm. Với hệ BEC một thành phần, các lực này phụ thuộc vào khối lượng và cường độ tương tác giữa các phân tử trong hệ. Tuy nhiên, quy luật biến thiên của các đại lượng này theo khoảng cách là như nhau với các hệ BEC có bản chất hóa học khác nhau.

2. Trong CE, lực Casimir suy giảm theo quy luật lũy thừa bán nguyên của khoảng cách giữa hai tường cứng khi khoảng cách này tăng lên.

3. Trong CE, luôn tồn tại một giá trị của khoảng cách giữa hai tường cứng mà ở đó lực Casimir toàn phần bị triệt tiêu. Giá trị này của khoảng cách l được tính theo công thức (2.58).

4. Khi tính trong gần đúng hai vòng trong lý thuyết CJT, tham số trật tự phụ thuộc mạnh vào khoảng cách giữa các tường cứng. Đây là kết quả nổi bật của gần đúng hai vòng so với kết quả tương ứng trong gần đúng một vòng.

Chương 3

Hiệu ứng Casimir trong ngưng tụ Bose-Einstein hai thành phần

Như đã trình bày ở Chương 1, đối với hệ BEC hai thành phần thì ngoài tương tác giữa các hạt trong cùng một thành phần còn có tương tác giữa các hạt ở hai thành phần khác nhau, với cường độ tương tác được xác định bởi hằng số tương tác g_{12} . Do tương tác này mà hệ BEC hai thành phần có thể ở trạng thái trộn lẫn hoặc không trộn lẫn. Khi ở trạng thái không trộn lẫn, tương tác giữa các hạt ở hai thành phần khác nhau tạo nên nhiều thay đổi trong các tính chất của hệ, đặc biệt là trạng thái phân tách mạnh. Nghiên cứu về hiệu ứng Casimir trong hệ BEC hai thành phần hi vọng sẽ mang lại nhiều kết quả thú vị.

Nội dung cơ bản của chương này được công bố trong các công trình 1 và 2.

3.1 Nghiên cứu lực Casimir-like

Xét hệ BEC hai thành phần ở trạng thái cân bằng, bị giới hạn bởi hai tường cứng đặt song song với nhau và cùng vuông góc với trục $0z$ và cách nhau một khoảng l nào đó. Để thuận tiện khi tính toán, chúng tôi giả thiết các tường cứng được đặt tại $z = 0$ và $z = l$. Theo các phương x và y hệ có tính chất đối xứng tịnh tiến. Đối với hệ này, R. Lipowsky và các cộng sự [43] đã chứng minh được rằng, để mặt phân cách vuông góc với trục $0z$ thì các phương $0x, 0y$ không thể vô hạn. Thực chất, các thành phần của BEC hai thành phần được giam trong một hình chữ nhật với kích thước theo các phương $0x, 0y, 0z$ lần lượt là $l_x, l_y, l_z = l$ thỏa mãn $l_x, l_y \gg l$.

3.1.1 Trạng thái cơ bản

Đối với hệ BEC hai thành phần, hệ phương trình GP có dạng (1.69), hệ phương trình này thu được từ việc áp dụng nguyên lý tác dụng tối thiểu Lagrangian cho mỗi thành phần (1.64) và thế tương tác GP của hệ cho bởi (1.70).

Khi các thành phần ngưng tụ được phân bố dọc theo phương $0z$ và có tính chất đối xứng tịnh tiến theo các phương $0x, 0y$ thì (1.69) được viết lại như sau

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial z^2} - \mu_1 \Psi_1 + g_{11} |\Psi_1|^2 \Psi_1 + g_{12} |\Psi_2|^2 \Psi_1 &= 0, \\ -\frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} - \mu_2 \Psi_2 + g_{22} |\Psi_2|^2 \Psi_2 + g_{12} |\Psi_1|^2 \Psi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Bây giờ chúng tôi đưa các phương trình trên về dạng không thứ nguyên

bằng cách giới thiệu một số đại lượng không thứ nguyên sau:

- Mỗi thành phần có độ dài đặc trưng riêng

$$\xi_j = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_j g_{jj} n_{j0}}}, \quad j = 1, 2.$$

- Thời gian đặc trưng của thành phần thứ j : $t_j = \hbar \mu_j$.

- Hằng số tương tác

$$K = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}. \quad (3.2)$$

Trên cơ sở đó chúng tôi đưa vào tọa độ không thứ nguyên $\rho_j = z/\xi_j$, thời gian không thứ nguyên $\tau = t/t_j$ và $\phi_j = \frac{\Psi_j}{\sqrt{n_{j0}}}$ là hàm sóng rút gọn của thành phần thứ j .

Với chú ý rằng, hệ đang xét ở trạng thái cân bằng pha, tức là áp suất của hai thành phần phải bằng nhau $P_1 = P_2$ với $P_j = \frac{g_{jj} n_{j0}^2}{2}$. Đồng thời chúng tôi cũng đang xét hệ trong GCE nghĩa là các thành phần ngưng tụ được nối với một bể hạt để chúng có thể trao đổi hạt với nhau, khi đó thế hóa của các thành phần ngưng tụ có giá trị không đổi $\mu_j = g_{jj} n_{j0}$.

Từ các nhận xét trên, hệ (3.1) được đưa về dạng không thứ nguyên như sau

$$\begin{aligned} -\partial_{\rho_1}^2 \phi_1 - \phi_1 + |\phi_1|^2 \phi_1 + K |\phi_2|^2 \phi_1 &= 0, \\ -\partial_{\rho_2}^2 \phi_2 - \phi_2 + |\phi_2|^2 \phi_2 + K |\phi_1|^2 \phi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Thế năng tương tác (1.70) được viết lại thành

$$\frac{V_{GP}}{g n_{j0}^2} = \sum_{j=1,2} \left(-|\phi_j|^2 + \frac{|\phi_j|^4}{2} \right) + K |\phi_1|^2 |\phi_2|^2. \quad (3.4)$$

Tùy thuộc vào giá trị của K mà có thể xảy ra hai khả năng khác nhau: nếu $K > 1$ thì hai thành phần không thể trộn lẫn vào nhau và ngược lại.

Để tìm lời giải tường minh cho (3.3), chúng tôi sử dụng phương pháp gần đúng DPA trong không gian bị giới hạn. Hàm sóng $\phi_j(j = 1, 2)$ tại $\rho = L/2$ được định nghĩa là trường mặt phân cách (interfacial fields), nó bao gồm trường của thành phần 1 và trường của thành phần 2 tại đó, đương nhiên là có giá trị khác 0. Khi $K \rightarrow \infty$, mặt phân cách sẽ di chuyển trên trục $0z$, vị trí của nó là điểm mà tại đó hai thành phần không chồng lấn lên nhau. P. Ao và cộng sự [3] cũng đã tìm ra cấu hình ngưng tụ dựa trên giả thiết rằng, sâu trong vùng của thành phần 1(2) thì $\phi_2 \rightarrow 0(\phi_1 \rightarrow 0)$, nghĩa là trong DPA ta có thể viết

$$|\phi_j| = 1 + \varepsilon_j, |\phi_{j'}| = \delta_{j'}, \begin{cases} \rho \geq \ell/2, (j, j') = (1, 2), \\ \rho \leq \ell/2, (j, j') = (2, 1), \end{cases} \quad (3.5)$$

với ε_j, δ_j là những đại lượng không thứ nguyên và rất nhỏ so với 1. Thay (3.5) vào (3.4) và giữ đến số hạng bậc hai của ε_j và $\delta_{j'}$, ta thu được thế DPA tương ứng với mỗi nửa không gian giới hạn bởi mặt phân cách [36, 74],

$$V_{DPA}(\phi_1, \phi_2) = \alpha^2 (|\phi_j| - 1)^2 + \beta^2 |\phi_{j'}|^2 - \frac{1}{2}, \begin{cases} \rho \geq \ell/2, (j, j') = (1, 2), \\ \rho \leq \ell/2, (j, j') = (2, 1), \end{cases} \quad (3.6)$$

trong đó $\alpha = \sqrt{2}, \beta = \sqrt{K - 1}$. Để đơn giản, chúng tôi đặt $\xi = \frac{\xi_2}{\xi_1}$.

Từ (3.6), tương tự như [36, 74], ta thu được phương trình Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\phi_1}{d\rho^2} + \alpha^2(\phi_1 - 1) &= 0, \\ -\xi^2 \frac{d^2\phi_2}{d\rho^2} + \beta^2\phi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

ở phía bên phải và

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\phi_1}{d\rho^2} + \beta^2\phi_1 &= 0, \\ -\xi^2\frac{d^2\phi_2}{d\rho^2} + \alpha^2(\phi_2 - 1) &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

ở phía bên trái.

Để tìm nghiệm của phương trình (3.7) và (3.8) ta cần xác định điều kiện biên. Đối với các tường cứng thì điều kiện biên Dirichlet là phù hợp

$$\phi_j(\rho = 0) = \phi_j(\rho = L) = 0, \text{ với } j = (1, 2). \quad (3.9)$$

Với điều kiện biên (3.9) hàm sóng ở trạng thái cơ bản của hai thành phần thỏa mãn (3.7) có dạng

$$\phi_1 = e^{-\alpha\rho} (e^{\alpha\rho} - e^{\alpha L}) (A_1(e^{\alpha L} + e^{\alpha\rho}) + 1), \quad (3.10a)$$

$$\phi_2 = -2B_1 e^{\frac{L\beta}{\xi}} \sinh\left(\frac{\beta(L - \rho)}{\xi}\right), \quad (3.10b)$$

ở bên phải mặt phân cách và thỏa mãn (3.8) là

$$\phi_1 = A_2 (e^{\beta\rho} - e^{-\beta\rho}), \quad (3.11a)$$

$$\phi_2 = B_2 \left(e^{\frac{\alpha\rho}{\xi}} - e^{\frac{-\alpha\rho}{\xi}} \right) + 1 - e^{\frac{-\alpha\rho}{\xi}}, \quad (3.11b)$$

ở bên trái mặt phân cách.

Trong (3.10) và (3.11) thì A_j, B_j là các hằng số tích phân và chúng được xác định bằng cách sử dụng điều kiện liên tục của hàm sóng cũng như đạo hàm bậc nhất của nó tại mặt phân cách. Theo các tính toán trong [74], trong trường hợp không đối xứng mặt phân cách có thể lệch khỏi vị trí giữa hai tường cứng. Tuy nhiên độ lệch này không nhiều. Trong các tính toán ở đây, chúng tôi coi như vị trí mặt phân cách giữa

hai thành phần nằm tại $\rho = L/2$. Điều kiện liên tục của hàm sóng và đạo hàm bậc nhất của nó có dạng

$$\begin{aligned}\phi_j(\rho = L/2+) &= \phi_j(\rho = L/2-), \\ \frac{\partial \phi_j}{\partial \rho} \Big|_{L/2+} &= \frac{\partial \phi_j}{\partial \rho} \Big|_{L/2-}.\end{aligned}\quad (3.12)$$

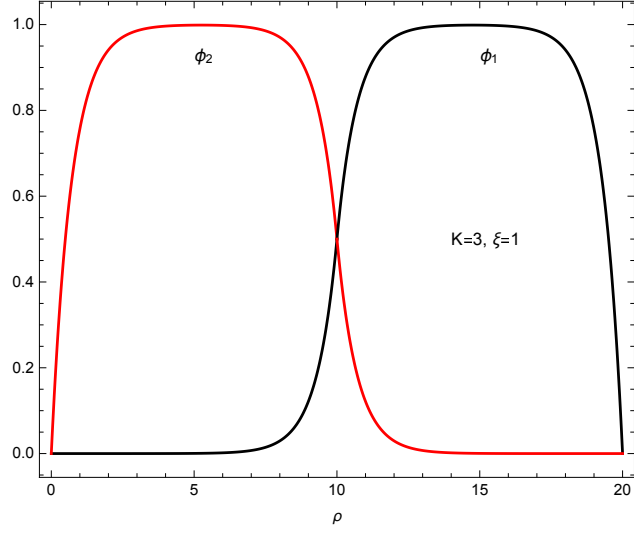
Thay (3.10) và (3.11) lần lượt vào điều kiện (3.12), chúng tôi thu được

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{(\alpha - \beta)e^{\alpha L} + \beta e^{\frac{L}{\alpha}} + \beta e^{(\alpha+2\beta)\frac{L}{2}} - (\alpha + \beta)e^{(\alpha+\beta)L}}{(\alpha - \beta)e^{(\alpha+\beta)L} + (\beta - \alpha)e^{2\alpha L} - (\alpha + \beta)e^{\alpha L} + (\alpha + \beta)e^{(2\alpha+\beta)L}}, \\ A_2 &= \frac{\alpha \sinh\left(\frac{\alpha L}{4}\right)^2}{\beta \sinh\left(\frac{L}{\alpha}\right) \cosh\left(\frac{\beta L}{2}\right) + \alpha \cosh\left(\frac{L}{\alpha}\right) \sinh\left(\frac{\beta L}{2}\right)}, \\ B_1 &= \frac{\alpha e^{-\frac{\beta L}{\xi}} \left(e^{\frac{L}{\alpha\xi}} - 1\right)^2}{2 \left[\beta \cosh\left(\frac{\beta L}{2\xi}\right) \left(e^{\frac{\alpha L}{\xi}} - 1\right) + \alpha \sinh\left(\frac{\beta L}{2\xi}\right) \left(e^{\frac{\alpha L}{\xi}} + 1\right) \right]}, \\ B_2 &= \frac{\beta \cosh\left(\frac{\beta L}{2\xi}\right) \left(e^{\frac{L}{\alpha\xi}} - 1\right) + \alpha \sinh\left(\frac{\beta L}{2\xi}\right)}{\beta \cosh\left(\frac{\beta L}{2\xi}\right) \left(e^{\frac{\alpha L}{\xi}} - 1\right) + \alpha \sinh\left(\frac{\beta L}{2\xi}\right) \left(e^{\frac{\alpha L}{\xi}} + 1\right)}.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Để minh họa cho kết quả trên, trên Hình 3.1 chúng tôi vẽ đồ thị hàm sóng của hệ ứng với $K = 3$ và $\xi = 1$. Rõ ràng là khi hệ có tính đối xứng $\xi_1 = \xi_2$ thì mặt phân cách giữa hai thành phần nằm ở giữa hai tường cứng.

Đối với trường hợp phân tách mạnh, tức là $K \rightarrow \infty$ thì (3.10), (3.11) và (3.13) có dạng:

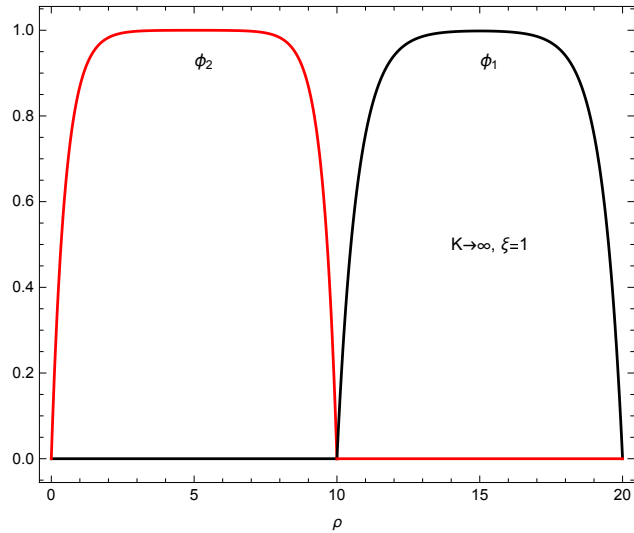
$$\phi_1 = \begin{cases} 1 - \cosh\left(\frac{3\alpha L}{4} - \alpha\rho\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\alpha L}{4}\right), & \text{nếu } \rho > L/2; \\ 0, & \text{nếu } \rho < L/2. \end{cases}\quad (3.14)$$



Hình 3.1: Hàm sóng ở trạng thái cơ bản ứng với $K = 3$ và $\xi = 1$.

$$\phi_2 = \begin{cases} 0, & \text{nếu } \rho > L/2; \\ 1 - \cosh\left(\frac{\alpha(L-4\rho)}{4\xi}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\alpha L}{4\xi}\right), & \text{nếu } \rho < L/2. \end{cases} \quad (3.15)$$

$$A_1 = -\frac{1}{e^{\alpha L} + e^{\frac{L}{\alpha}}}, \quad A_2 = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = -\frac{1}{e^{\frac{L}{\alpha}}}. \quad (3.16)$$



Hình 3.2: Hàm sóng ở trạng thái cơ bản ứng với $K \rightarrow \infty$ và $\xi = 1$.

Đồ thị biểu diễn trường hợp này ứng với $\xi = 1$ được vẽ trên Hình 3.2. Trong trường hợp này, các thành phần sẽ phân tách nhau hoàn toàn.

3.1.2 Lực Casimir-like

Tiếp theo chúng tôi nghiên cứu lực Casimir-like của hệ BEC hai thành phần. Để tìm được lực này chúng tôi xem xét sức căng bề mặt trong GCE được định nghĩa bởi J. O. Indekeu và B. Van Schaeybroeck [36, 64]. Đối với hệ bị giới hạn bởi hai tường cứng đặt tại $\rho = 0, \rho = L$, trạng thái cơ bản là nghiệm của hệ phương trình GP được đưa ra với hệ BEC hai thành phần không trộn lẫn. Hơn nữa, hệ như vậy chỉ tồn tại trong hình hộp $[\ell_x, \ell_x] \times [\ell_y, \ell_y] \times [0, \ell]$ với $\ell \ll \ell_x, \ell_y$ và ℓ_x, ℓ_y lớn nhưng hữu hạn. Chúng tôi giả thiết rằng khoảng cách giữa hai bức tường đủ lớn so với chiều dài đặc trưng ξ . Trong GCE, hệ được xem như được kết nối với bể hạt chứa mỗi thành phần.

Trong GCE, năng lượng bề mặt được định nghĩa là phần năng lượng khi tạo thành mặt phân cách giữa hai thành phần so với năng lượng khối của của hệ [36], tức là

$$\Omega_0 = 2SP\xi_1 \int_0^\ell dz [(\partial_z \phi_1)^2 + \xi^2 (\partial_z \phi_2)^2 + PV]. \quad (3.17)$$

Sử dụng các đại lượng không thứ nguyên ở trên, ta có thể đưa (3.17) về dạng sau

$$\Omega_0 = 2SP\xi_1 \int_0^L d\rho [\phi_1^* \partial_\rho^2 \phi_1 + \xi^2 \phi_2^* \partial_\rho^2 \phi_2 + V_{GP}(\phi_1, \phi_2)], \quad (3.18)$$

từ đó, ta có năng lượng bề mặt phân cách

$$\Delta\Omega = \Omega_0 - PV.$$

Để tính năng lượng bề mặt phân cách, trước hết, chúng tôi lưu ý hai điểm khác biệt của hệ đặt ra trong luận án này so với hệ được khảo sát trong [36]. Cụ thể như sau:

- Hệ chúng tôi khảo sát có kích thước hữu hạn theo cả ba chiều trong không gian, đặc biệt là dọc theo phương trục Oz . Tức là hệ được khảo sát ở đây tương tự như hệ đã khảo sát trong [74];

- Trong trường hợp tổng quát, hệ phương trình GP, như đã nói ở trên, không có lời giải giải tích. Để có thể đánh giá lực Casimir-like ở các miền khác nhau của hằng số tương tác K , các tác giả của các công trình [64] và [74] đã sử dụng "hằng số chuyển động" để đưa số hạng động năng từ đạo hàm bậc hai về đạo hàm bậc nhất của hàm sóng. Trong khuôn khổ của luận án này, sử dụng DPA chúng tôi tìm được biểu thức giải tích của hàm sóng nên có thể tính trực tiếp sức căng mặt phân cách từ biểu thức định nghĩa của nó;

- Do hàm sóng trong DPA được xác định cho hai miền khác nhau của mặt phân cách nên để tính năng lượng bề mặt, trước tiên chúng tôi cũng tính cho từng phía của mặt phân cách rồi thực hiện phép lấy tổng để thu được kết quả cho toàn hệ.

- Trong vùng $L/2 \leq \rho \leq L$,

$$\Delta\Omega_1 = 2SP\xi_1 \int_{L/2}^L [-\phi_1 \partial_\rho^2 \phi_1 - \xi^2 \phi_2 \partial_\rho^2 \phi_2 + 2(\phi_1 - 1)^2 + \beta^2 \phi_2^2] d\rho. \quad (3.19)$$

- Trong vùng $0 \leq \rho \leq L/2$,

$$\Delta\Omega_2 = 2SP\xi_1 \int_0^{L/2} [-\phi_1 \partial_\rho^2 \phi_1 - \xi^2 \phi_2 \partial_\rho^2 \phi_2 + 2(\phi_2 - 1)^2 + \beta^2 \phi_1^2] d\rho. \quad (3.20)$$

Thay các biểu thức (3.10), (3.11) với các hệ số trong (3.13), chúng tôi thu được

$$\Delta\Omega = \Delta\Omega_1 + \Delta\Omega_2.$$

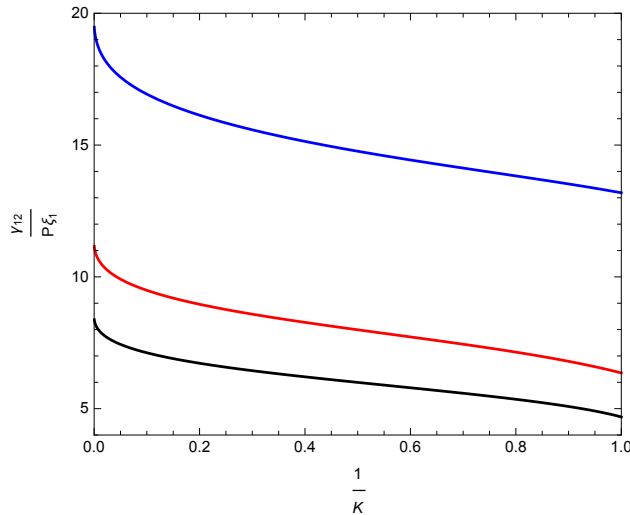
Sức căng mặt phân cách được định nghĩa là năng lượng dư thừa trên một đơn vị diện tích bề mặt

$$\gamma_{12} = \frac{\Delta\Omega}{S}. \quad (3.21)$$

Thay (3.19), (3.20) vào (3.21), chúng tôi thu được biểu thức của sức căng mặt phân cách

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = & 2P\xi_1\alpha \left\{ \left[e^{\frac{L}{\alpha}} - 1 \right] \left[1 + A_1 \left(e^{L\alpha} - e^{\frac{L}{\alpha}} \right) \right] \right. \\ & \left. + \xi \left[1 - e^{-\frac{L}{\alpha\xi}} - 4B_2 \sinh \left(\frac{L\alpha}{4\xi} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Để minh họa cho các tính toán trên, chúng tôi khảo sát sự biến thiên của $\frac{\gamma_{12}}{P\xi_1}$ theo $1/K$ tại $L = 10$ với các giá trị khác nhau của ξ .



Hình 3.3: Sự biến thiên sức căng mặt phân cách theo $1/K$ tại $L = 10$ khi $\xi = 0.5$ (đường màu đen), $\xi = 1$ (đường màu đỏ) và $\xi = 3$ (đường màu xanh).

Kết quả biểu diễn từ Hình 3.3 cho thấy, với mỗi giá trị cố định của ξ , sức căng bề mặt giảm dần khi cường độ tương tác giữa hai thành phần giảm. Điều này có thể hiểu được về mặt vật lý là khi đó diện tích mặt phân cách giảm, tuy nhiên độ dày của mặt phân cách tăng lên. Đến trạng thái demixing thì sức căng bề mặt đạt giá trị nhỏ nhất, lúc này đóng góp của thành phần thứ hai chiếm ưu thế. Tại $K = 1, \xi = 1$ và khoảng cách giữa hai tường cứng đủ lớn, gần đúng ta có

$$\frac{\gamma_{12}}{P\xi_1} \approx 4\sqrt{2} + \frac{4}{L} - \frac{2\sqrt{2}}{L^2} + \frac{2}{L^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L^4}\right). \quad (3.23)$$

Kết quả này được giải thích là hiệu ứng Casimir-like [74] và đây là điểm khác biệt rất lớn giữa hệ hữu hạn và hệ vô hạn. Trong giới hạn phân tách mạnh $K \rightarrow \infty$ (tức là $1/K \rightarrow 0$), sức căng bề mặt đạt giá trị lớn nhất do lúc này diện tích mặt phân cách lớn nhất. Kết quả này giống như kết quả tương ứng của hệ vô hạn, ở đó [36],

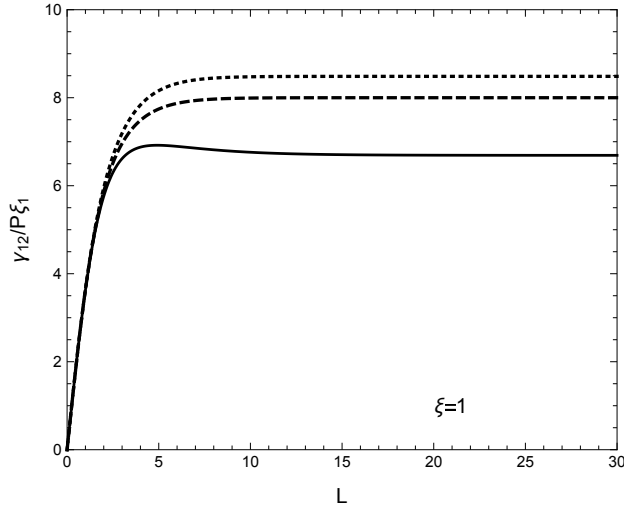
$$\gamma_{12}^{(DPA)} = 2\sqrt{2}P(\xi_1 + \xi_2), \quad (3.24)$$

trong DPA và trong lý thuyết của GP thì [64],

$$\gamma_{12}^{(GP)} = \frac{4\sqrt{2}}{3}P(\xi_1 + \xi_2). \quad (3.25)$$

Sự phụ thuộc của sức căng mặt phân cách vào khoảng cách giữa hai tường cứng được vẽ trên Hình 3.4 tại $\xi = 1$ và Hình 3.5 ứng với $\xi = 3$. Kết quả cho thấy sự tương tự giữa sức căng mặt phân cách của BEC hai thành phần và sức căng bề mặt của BEC một thành phần: khi khoảng cách giữa hai tường cứng giảm thì sức căng mặt phân cách giảm nhanh về không do hệ được kết nối với bề hạt; khi khoảng cách giữa các tường cứng đủ lớn thì sức căng này đạt giá trị không đổi. Điểm khác biệt ở đây

là vai trò của tham số $\xi = \xi_2/\xi_1$. Khi tham số này tăng lên thì biên độ bão hòa của sức căng mặt phân cách tăng lên. Một cách hình thức, kết quả này có thể giải thích được dựa trên các công thức (3.24) và (3.25).



Hình 3.4: Sự biến thiên của sức căng mặt phân cách theo L tại $\xi = 1$. Đường nét liền, nét gạch và nét chấm lượn ứng với $K = 1.1$, $K = 2$ và $K = 3$.

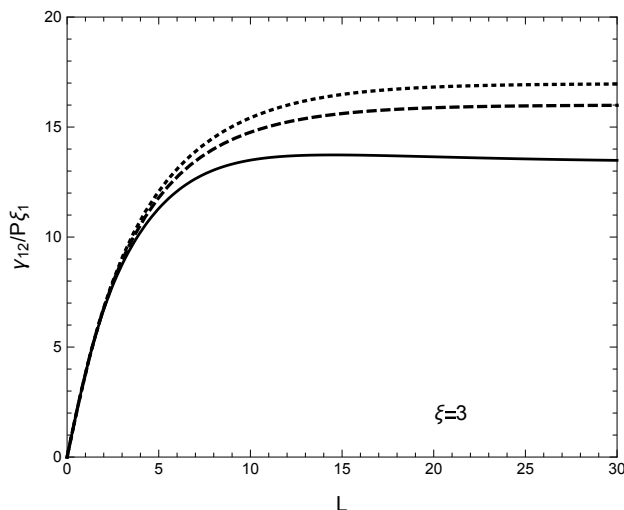
Để kết thúc mục này, chúng tôi tính lực Casimir-like. Với hệ BEC hai thành phần, định nghĩa (2.10) được viết lại như sau

$$F_{\gamma_{12}} = -\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial \ell}. \quad (3.26)$$

Thay (3.22) vào (3.26) ta thu được

$$F_{\gamma_{12}} = -\alpha^2 e^{-\frac{L}{\alpha\xi}} \left[1 + B_2 - B_2 e^{\frac{\alpha L}{\xi}} + e^{\frac{L(1+\xi)}{\alpha\xi}} \left(1 + A_1 - 4A_1 e^{\frac{L}{\alpha}} + 3A_1 e^{\alpha L} \right) \right]. \quad (3.27)$$

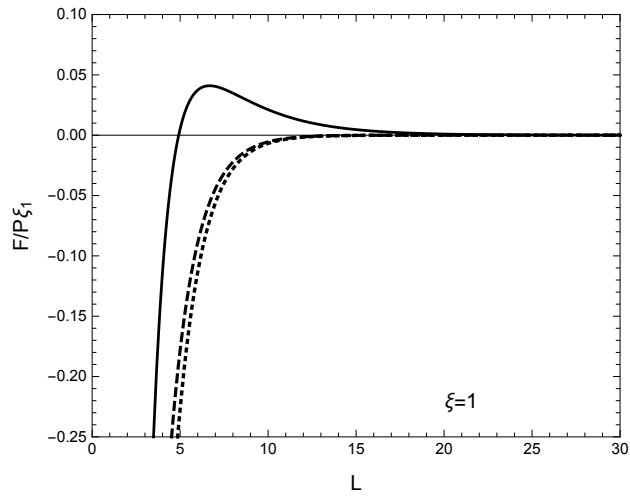
Sử dụng (3.27) và các công thức liên quan (3.13), chúng tôi thu được Hình 3.6 và 3.7, trên đó biểu diễn sự thay đổi của lực Casimir-like theo L với các giá trị khác nhau của K và ξ . Từ hình vẽ này, chúng tôi nhận



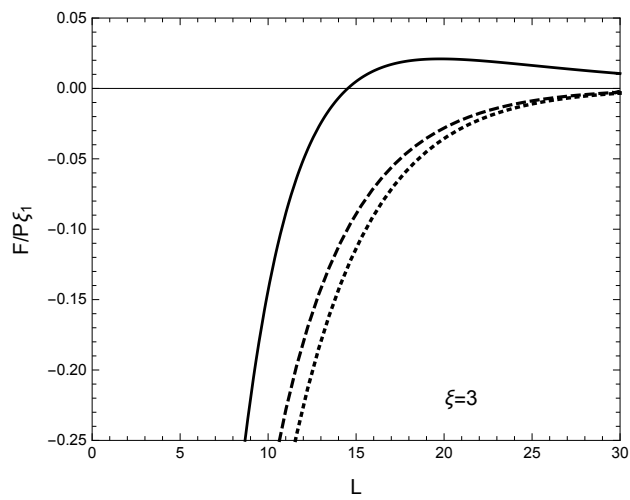
Hình 3.5: Sự biến thiên của sức căng mặt phân cách theo L tại $\xi = 3$. Đường nét liền, nét gạch và nét chấm lần lượt ứng với $K = 1.1, K = 2$ và $K = 3$.

thấy trong trường hợp hệ phân tách yếu $K < 3$, lực Casimir-like là lực hút khi hai tường cứng khá gần nhau, nó trở thành lực đẩy nếu hai tường cứng tiến ra xa nhau $L \gg \xi$. Trong trường hợp hệ phân tách mạnh $K > 3$, lực Casimir-like luôn là lực hút và triệt tiêu với mọi tham số của hệ khi $L \rightarrow +\infty$.

Tóm lại, bằng việc sử dụng gần đúng DPA, chúng ta đã nghiên cứu được các tính chất tĩnh của hệ BEC hai thành phần. Với gần đúng thô là coi như mặt phân cách giữa hai thành phần ngưng tụ nằm tại giữa hai tường cứng, biểu thức cho hàm sóng của trạng thái cơ bản của hệ (3.10) và (3.11) đơn giản hơn nhiều so với các biểu thức tương ứng trong [74]. Đặc biệt hơn, tất cả các tính chất của hệ được tìm ra trong [74] đều được tìm lại theo cách đơn giản hơn nhiều nhờ việc tính trực tiếp biểu thức giải tích của thế nhiệt động mà không sử dụng "hằng số chuyển động". Đây là lợi thế rất lớn của việc sử dụng gần đúng DPA trong nghiên cứu



Hình 3.6: Sự phụ thuộc của lực tác dụng lên một đơn vị diện tích tường cứng theo L tại $\xi = 1$. Các đường nét liền, nét gạch và nét chấm lượn ứng với $K = 1.1, K = 2$ và $K = 3$.



Hình 3.7: Sự phụ thuộc của lực tác dụng lên một đơn vị diện tích tường cứng theo L tại $\xi = 3$. Các đường nét liền, nét gạch và nét chấm lượn ứng với $K = 1.1, K = 2$ và $K = 3$.

hệ BEC nói chung và đặc biệt là hệ BEC hai thành phần nói riêng trong khuôn khổ lý thuyết trường trung bình.

3.2 Lực Casimir

Tương tự như với BEC một thành phần, bây giờ chúng tôi sử dụng lý thuyết trường lượng tử để nghiên cứu lực Casimir trong hệ BEC hai thành phần được mô tả bởi Lagrangian (1.64) với thể tương tác có dạng (1.65).

Đầu tiên, ta xét với gần đúng cây, có nghĩa là ta bỏ qua thăng giáng lượng tử. Với Ψ_{j0} là giá trị trung bình của toán tử trường ψ_j ở mức này, lấy cực tiểu của thể tương tác (1.65), ta có

$$\begin{aligned} -\mu_1 \Psi_{10} + g_{11} \Psi_{10}^3 + g_{12} \Psi_{20}^2 \Psi_{10} &= 0, \\ -\mu_2 \Psi_{20} + g_{22} \Psi_{20}^3 + g_{12} \Psi_{10}^2 \Psi_{20} &= 0, \end{aligned} \quad (3.28)$$

kết quả là trong pha phá vỡ đối xứng ta có

$$\Psi_{10}^2 = \frac{g_{22}\mu_1 - g_{12}\mu_2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \Psi_{20}^2 = \frac{g_{11}\mu_2 - g_{12}\mu_1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \quad (3.29)$$

Để khảo sát trong gần đúng bậc cao, tương tự như đối với hệ một thành phần, trước hết chúng tôi khai triển toán tử trường dưới dạng

$$\psi_j = \Psi_{j0} + \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{j1} + i\Psi_{j2}). \quad (3.30)$$

Thay (3.30) vào phương trình (1.64) và (1.65), chúng tôi thu được Lagrangian tương tác trong gần đúng hai vòng

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1,2} [g_{jj} \Psi_{j0} \Psi_{j1} + g_{12} \Psi_{j'0} \Psi_{j'1}] (\Psi_{j1}^2 + \Psi_{j2}^2) \\ &+ \frac{1}{8} \sum_{j=1,2} g_{jj} (\Psi_{j1}^2 + \Psi_{j2}^2)^2 + \frac{g_{12}}{4} (\Psi_{11}^2 + \Psi_{12}^2) (\Psi_{21}^2 + \Psi_{22}^2). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Các hàm truyền tự do nghịch đảo trong không gian xung lượng tương ứng với hai trường là

$$\begin{aligned} D_{10}^{-1}(k) &= \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1} + M_{10}^2 & -\omega_n \\ \omega_n & \frac{\hbar^2 k^2}{2m_1} \end{pmatrix}, \\ D_{20}^{-1}(k) &= \begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 k^2}{2m_2} + M_{20}^2 & -\omega_n \\ \omega_n & \frac{\hbar^2 k^2}{2m_2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

trong đó \vec{k} là véctơ sóng và

$$M_{j0}^2 = g_{jj} \Psi_{j0}^2. \quad (3.33)$$

Hệ thức tán sắc Bogoliubov cho thành phần ngưng tụ j có thể thu được bằng cách cho định thức của hàm truyền nghịch đảo bằng không [28], tức là áp dụng công thức (2.26) cho từng thành phần

$$\det D_{j0}^{-1}(k) = 0,$$

ta thu được

$$E_j(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_j} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_j} + M_{j0}^2 \right)}. \quad (3.34)$$

Trong giới hạn bước sóng dài, phương trình (3.34) có dạng gần đúng

$$E_j(k) \approx \frac{\hbar M_{j0}}{\sqrt{2m_j}} k. \quad (3.35)$$

Tương tự như biểu thức (2.28) đối với hệ BEC một thành phần, hệ thức (3.35) cho thấy rằng trong hệ BEC hai thành phần cũng xuất hiện các bosson Goldstone do đối xứng $U(1) \times U(1)$ bị phá vỡ. Những hạt này lan truyền theo cách tương tự như photon của trường điện từ trong các tính toán ban đầu của Casimir [16], trong trường hợp này, vận tốc của các hạt bằng với "vận tốc âm".

3.2.1 Nghiên cứu trong gần đúng một vòng

Trong gần đúng này, dựa vào Lagrangian tương tác (1.64), thế nhiệt động có thể viết dưới dạng [1],

$$\Omega = \mathcal{V} + \sum_{j=1,2} \frac{1}{2} \int_{\beta} \text{Tr} \ln D_j^{-1}(k). \quad (3.36)$$

Với số hạng đầu của vế phải trong biểu thức (3.36), kết hợp với (1.65) và (3.29), ta thu được

$$\mathcal{V} = \frac{g_{11}\mu_2^2 - 2g_{12}\mu_1\mu_2 + g_{22}\mu_1^2}{2(g_{12}^2 - g_{11}g_{22})}. \quad (3.37)$$

Dựa trên biểu thức (3.32) và (3.33), chúng tôi thấy rằng hàm truyền nghịch đảo không phụ thuộc trực tiếp vào thế hóa học, vì vậy sau khi chuẩn hóa, mật độ hạt $n_{j0} = \Psi_{j0}^2$ có thể tìm được từ phương trình (3.36) bằng cách lấy đạo hàm thế nhiệt động đối với thế hóa học μ_j

$$n_{j0} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_j}.$$

Các phương trình này dẫn đến

$$\mu_1 = g_{11}n_{10} + g_{12}n_{20}, \quad (3.38)$$

$$\mu_2 = g_{22}n_{20} + g_{12}n_{10}.$$

Do vậy, thay biểu thức (3.38) vào biểu thức (3.37), chúng tôi có được biểu thức mật độ năng lượng

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(g_{11}n_{10}^2 + 2g_{12}n_{10}n_{20} + g_{22}n_{20}^2). \quad (3.39)$$

Rõ ràng kết quả này trùng với kết quả trong [56] ở nhiệt độ không. Tương tự như trong Chương 2, sử dụng công thức (2.31) và thực hiện tổng trên ω_n , số hạng thứ hai bên phải của (3.36) có dạng (2.32).

Với chú ý rằng, chúng tôi đang nghiên cứu về năng lượng Casimir và lực Casimir ở nhiệt độ bằng không do thăng giáng lượng tử, do đó số hạng phụ thuộc nhiệt độ có thể bỏ qua (2.32). Năng lượng tự do trong gần đúng một vòng (3.36) có thể được viết lại như sau [1],

$$\Omega = \mathcal{V} + \Omega_1 = \mathcal{V} + \sum_{j=1,2} \Omega_{1j}, \quad (3.40)$$

với

$$\Omega_{1j} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_j} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_j} + g_{jj} \Psi_j^2 \right)} + \Delta_{1j} \Omega. \quad (3.41)$$

Như đã trình bày trong Chương 2, tích phân theo vectơ sóng bị phân kỳ tử ngoại. Trong phần này, chúng ta sử dụng phương pháp số hạng hấp thụ để khử phân kỳ, đó chính là số hạng $\Delta_{1j} \Omega$ trong (3.41) như đã được trình bày trong [1, 66].

Để cho đơn giản, chúng ta hãy đưa về dạng không thứ nguyên như đã làm ở các phần trước bằng cách đưa vào vectơ sóng không thứ nguyên $\kappa_j = k\xi_j$. Như vậy, phương trình (3.41) ở dạng không thứ nguyên

$$\Omega_{1j} = \frac{g_{jj} n_{j0}}{2\xi_j^3} \int \frac{d^3\kappa_j}{(2\pi)^3} \sqrt{\kappa_j^2 (\kappa_j^2 + \phi_j^2)}. \quad (3.42)$$

Chú ý đến (3.2), tham số trật tự trong phương trình (3.29) có thể được viết lại

$$\phi_1^2 = \phi_2^2 = \frac{1}{K+1}. \quad (3.43)$$

Bây giờ chúng tôi đi nghiên cứu năng lượng Casimir của hệ BEC hai thành phần bị giới hạn giữa hai tấm song song đặt vuông góc với trục $0z$. Do bị giới hạn theo phương $0z$, vectơ sóng của mỗi thành phần bị lượng tử hóa. Tương tự như (2.37) và (2.38), áp dụng điều kiện biên

tuần hoàn cho thành phần ngang tụ j ta có

$$\kappa_j^2 \rightarrow \kappa_{j\perp}^2 + \kappa_{jn}^2, \quad \kappa_{jn} = \frac{2\pi n}{L_j} \equiv \frac{n}{\bar{L}_j}, \quad \bar{L}_j = \frac{L_j}{2\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.44)$$

Tương ứng, tích phân theo xung lượng vuông góc với các tấm được thay thế bằng một tổng

$$\int \frac{d^3\kappa_j}{(2\pi)^3} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2\kappa_{j\perp}}{(2\pi)^2}. \quad (3.45)$$

Thay phương trình (3.45) và (3.44) vào phương trình (3.42), chúng tôi thu được

$$\Omega_{1j} = \frac{g_{jj}n_{j0}}{2\xi_j^3\bar{L}_j^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d^2\kappa_{j\perp}}{(2\pi)^2} \sqrt{(\bar{L}_j^2\kappa_j^2 + n^2)(A_{j0}^2 + n^2)}, \quad (3.46)$$

với

$$A_{j0} = \bar{L}_j \sqrt{\kappa_{j\perp}^2 + \phi_j^2}. \quad (3.47)$$

Như trong [63, 66] đã chỉ ra, trong điều kiện biên Dirichlet áp dụng cho các tấm song song, năng lượng Casimir có liên quan đến năng lượng trong gần đúng một vòng cho mỗi phần được thỏa mãn [14],

$$\bar{\Omega}_1 = L\Omega_1|_V + \sum_j \mathcal{E}_{Cj}, \quad (3.48)$$

trong đó

$$\mathcal{E}_C = \sum_{j=1,2} \mathcal{E}_{Cj}, \quad (3.49)$$

được gọi là năng lượng Casimir. Tổng trong (3.46) có thể tính bằng cách sử dụng công thức Abel-Plana I [9],

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} dx f(x) + \frac{1}{2}f(0) + i \int_0^{\infty} dx \frac{f(ix) - f(-ix)}{e^{2\pi x} - 1}. \quad (3.50)$$

Với chú ý rằng, số hạng đầu trong (3.50) bị phân kỳ nhưng bị hấp thụ bởi số hạng khử phân kỳ tử ngoại. Số hạng $f(0)$ trong (3.50) biến mất, dẫn đến

$$\mathcal{E}_{Cj} = -\frac{2g_{jj}n_{j0}}{\xi_j^2\bar{L}_j^2} \int_0^\infty \frac{d^2\kappa_{j\perp}}{(2\pi)^2} \int_{\bar{L}_j\kappa_{j\perp}}^{M_{j0}} \frac{\sqrt{(x^2 - \bar{L}_j^2\kappa_{j\perp}^2)} (M_{j0}^2 - x^2)}{e^{2\pi x} - 1} dx. \quad (3.51)$$

Bằng cách thay đổi thứ tự của tích phân trong (3.51), tích phân $\kappa_{j\perp}$ có thể được biểu diễn và biểu thức (3.51) được viết lại

$$\mathcal{E}_{Cj} = \int_0^\infty dx \frac{\rho_j(x, \bar{L}_j)}{e^{2\pi x} - 1}, \quad (3.52)$$

với $\rho_j(x, \bar{L}_j)$ là mật độ hàm trạng thái của thành phần thứ j , nó có dạng

$$\rho_j(x, \bar{L}_j) = \begin{cases} -\frac{g_{jj}n_{j0}}{8\pi\bar{L}_j^4\xi_j^2} \left[x\sqrt{\bar{L}_j^2\phi_j^2 - x^2} (2x^2 - \bar{L}_j^2\phi_j^2) + \bar{L}_j^4\phi_j^4 \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{\bar{L}_j^2\phi_j^2 - x^2}} \right) \right], & \text{khi } 0 \leq x < \bar{L}_j\phi_j; \\ -\frac{g_{jj}n_{j0}\phi_j^4}{16\xi_j^4}, & \text{khi } x \geq \bar{L}_j\phi_j. \end{cases} \quad (3.53)$$

Lực Casimir được định nghĩa bởi

$$F_C = -\frac{\partial\mathcal{E}_C}{\partial\ell} = -\frac{1}{2\pi\xi} \sum_{j=1,2} \frac{\partial\mathcal{E}_{Cj}}{\partial\bar{L}_j}. \quad (3.54)$$

Kết hợp (3.54) với (3.52) và (3.53), chúng tôi thu được

$$F_C = \sum_{j=1,2} \frac{g_{jj}n_{j0}}{2\pi^2\xi_j^2\bar{L}_j^5} \int_0^{\bar{L}_j\phi_j} \frac{x^3\sqrt{\bar{L}_j^2\phi_j^2 - x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx. \quad (3.55)$$

Từ biểu thức (3.55), chúng tôi nhận thấy rằng lực Casimir của BEC hai thành phần không đơn giản chỉ là sự chồng chất của lực Casimir gây

ra bởi từng thành phần đơn lẻ. Sự tương tác giữa hai hạt khác loại với cường độ g_{12} có mặt trong ϕ_j . Ta có thể thấy rằng lực Casimir bao gồm hiệu ứng của kích thước hữu hạn và lực đẩy giữa các hạt. Phương trình này cho thấy rằng:

- Đối với hệ Bose lý tưởng, $g_{jj} = 0$, lực Casimir bị biến mất như trong [12, 13] với BEC một thành phần.

- Trong trường hợp không có tương tác giữa các hạt ở hai thành phần khác nhau thì $g_{12} = 0$, hệ biểu hiện như trong BEC một thành phần. Trong trường hợp này các tham số trật tự không phụ thuộc vào g_{12} , điều này dẫn đến hàm truyền nghịch đảo trong biểu thức (3.32) và sau đó là thế nhiệt động (3.36) cũng không phụ thuộc vào g_{12} .

- Trong giới hạn phân tách mạnh $g_{12} \rightarrow \infty$, hai tham số trật tự chỉ giao nhau và triệt tiêu ở bề mặt phẳng song song với hai tấm giới hạn của hệ. Vì ta chỉ xem xét sự kích thích năng lượng thấp, nên từ phương trình (3.35), (3.51) và (3.55), một cách hình thức, ta có thể xem lực hút gây ra bởi thăng giáng lượng tử và lực đẩy giữa hai hạt khác loại là như nhau trong giới hạn phân tách mạnh. Về mặt vật lý, trong giới hạn phân tách mạnh, tương tác đẩy giữa các hạt ở hai thành phần khác nhau làm cho mật độ ngưng tụ ở mặt phân tách hai thành phần bằng không và tại đây không còn thăng giáng mật độ hạt nên lực Casimir bị triệt tiêu.

Bây giờ chúng tôi đi xem xét lực Casimir trong giới hạn khoảng cách lớn. Trong giới hạn này, ta có thể kiểm tra tích phân trong (3.52) bị suy giảm theo cấp số nhân và tiến tới không rất nhanh. Bằng cách đưa ra đại lượng $y = x/(\bar{L}_j\phi_j)$, vùng đầu tiên của mật độ trạng thái trong

(3.53) có thể được viết lại thành

$$\rho_j = \frac{g_{jj}n_{j0}\phi_j^4}{8\pi\xi_j^2} \left[y(2y^2 - 1)\sqrt{1 - y^2} + \arctan \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} \right], \quad (3.56)$$

với $0 \leq y \ll 1$. Khai triển (3.56) theo chuỗi lũy thừa quanh $y = 0$ dẫn tới

$$\rho_j \approx -\frac{g_{jj}n_{j0}\phi_j^4}{8\pi\xi_j^2} \left[\frac{8x^3}{3\bar{L}_j^3\phi_j^3} - \frac{4x^5}{5\bar{L}_j^5\phi_j^5} \right]. \quad (3.57)$$

Thay biểu thức (3.57) vào phương trình (3.52) và chú ý rằng chúng tôi đang xem xét ở đây là hệ tương tác yếu nên $\bar{L}_j\phi_j \gg 1$, ta có thể đánh giá tích phân trong (3.52) và thu được kết quả là

$$\mathcal{E}_{Cj} = -\frac{m_j^3 c_j^2}{360\pi\hbar^2} \left(\frac{\phi_j}{\bar{L}_j^3} - \frac{1}{7\phi_j\bar{L}_j^5} \right), \quad (3.58)$$

với $v_j = \sqrt{\mu_j/m_j}$ là vận tốc âm của thành phần j . Từ phương trình (3.54) và (3.58), lực Casimir thu được trong giới hạn này là

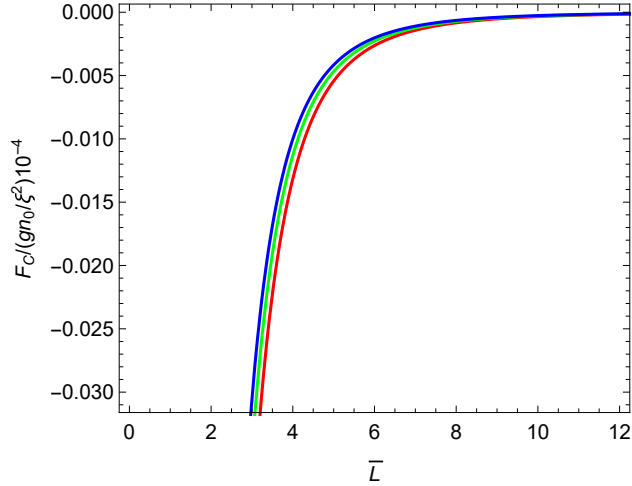
$$F_C \approx \frac{1}{720\pi^2\hbar^2} \sum_{j=1,2} m_j^3 v_j^2 \left(\frac{3\phi_j}{\bar{L}_j^4} - \frac{5}{7\phi_j\bar{L}_j^6} \right). \quad (3.59)$$

Đối với hệ BEC một thành phần, để được coi là hệ loãng thì điều kiện $n_0 a^3 \ll 1$ phải được thỏa mãn [1, 66]. Đối với hệ BEC hai thành phần loãng, ta có điều kiện $n_{j0} a_{jj}^3 \ll 1$, do vậy định nghĩa (3.2) tương đương với

$$K = \frac{m_1 + m_2}{2\sqrt{m_1 m_2}} \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11} a_{22}}}. \quad (3.60)$$

Vì m_j là cố định đối với một hệ cho trước và cả ba độ dài tán xạ có thể thay đổi một cách độc lập bằng cách sử dụng kỹ thuật cộng hưởng Feshbach [37], nên K có thể chạy từ không đến vô cùng. Để cho đơn giản, chúng tôi nghiên cứu trường hợp đối xứng $g_{11} = g_{22} \equiv g$, $\xi_1 = \xi_2 \equiv$

$\xi, n_{10} = n_{20} \equiv n_0$ và thu được đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của lực Casimir vào khoảng cách \bar{L} khi $K = 0.5, K = 1$ và $K = 1.5$



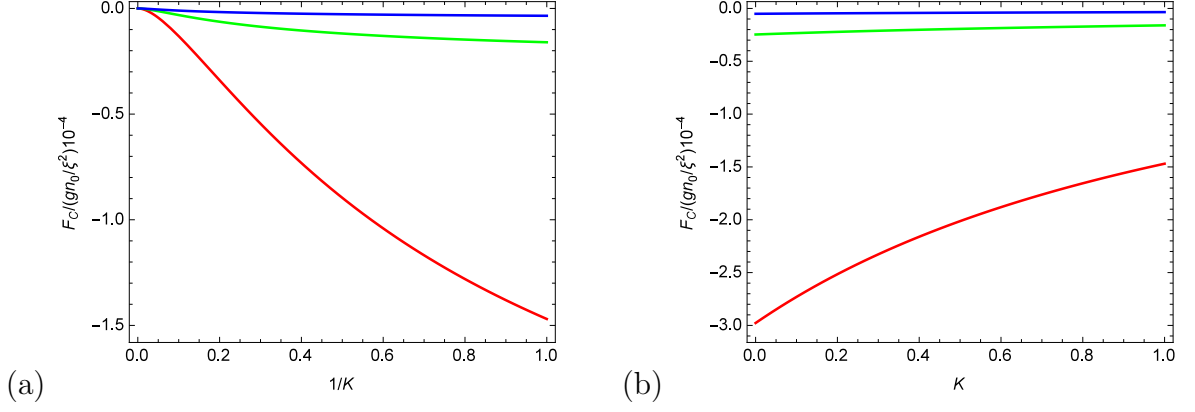
Hình 3.8: Sự phụ thuộc của lực Casimir vào khoảng cách \bar{L} tại $K = 0.5$ (đường màu đỏ), $K = 1$ (đường màu xanh lá) và $K = 1.5$ (đường màu xanh lam).

Trên hình 3.8 biểu diễn lực Casimir như một hàm của khoảng cách hiệu dụng tại các giá trị của K . Chúng tôi thấy rằng:

- Khi \bar{L} tăng thì lực Casimir tiến tới không rất nhanh và có kì dị tại $\bar{L} = 0$; đây là đặc điểm điển hình của sự biến dạng năng lượng chân không. Độ lớn giảm mạnh khi tăng khoảng cách, tuân theo quy luật L^{-4} . Điều này có nghĩa là lực Casimir chỉ đáng chú ý khi ở khoảng cách nhỏ;

- Lực này bị triệt tiêu trong trường hợp phân ly mạnh hoàn toàn $g_{12} \rightarrow 0$. Đối với trường hợp không tương tác khác loại $g_{12} = 0$ như BEC hai thành phần đơn phân biệt.

Hình 3.9 là đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của lực Casimir theo $1/K$ (hình 3.9a) với trường hợp không trộn lẫn và K với trường hợp trộn lẫn



Hình 3.9: Sự phụ thuộc của lực Casimir vào tham số tương tác tại $\bar{L} = 1$ (đường màu đỏ), $\bar{L} = 2$ (đường màu xanh lá) và $\bar{L} = 3$ (đường màu xanh lam).

(Hình 3.9b), chúng tôi thấy rằng nó phù hợp với Hình 3.8. Nó cũng cho thấy, với sự phân tách mạnh hoàn toàn $K \rightarrow \infty$ thì lực Casimir tiến tới không.

Bên cạnh đó, lực Casimir (hay năng lượng Casimir) sẽ bị triệt tiêu khi K có xu hướng tiến tới vô cùng và \bar{L} là hữu hạn. Về mặt toán học, từ phương trình (3.43) ta có thể mở rộng (3.55) bằng chuỗi lũy thừa

$$F_C \approx \sum_{j=1,2} \frac{g_{jj} n_{j0}}{2\pi^2 \xi_j^2 \bar{L}_j} \left[\frac{\phi_j^4}{32} - \frac{\bar{L}_j \phi_j^5}{15} + \mathcal{O}(\phi_j^6) \right]. \quad (3.61)$$

Phương trình này kiểm chứng kết quả trình bày trong Hình 3.9 khi $1/K \rightarrow 0$.

3.2.2 Nghiên cứu trong gần đúng hai vòng

Trong phần tiếp theo này, chúng tôi xem xét ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước hữu hạn trong hệ BEC hai thành phần tương tác yếu trong gần đúng hai vòng. Sử dụng phương pháp tác dụng hiệu dụng CJT [21], ở nhiệt độ hữu hạn trong gần đúng HF, thế hiệu dụng CJT, V_β^{CJT} , có

dạng

$$\begin{aligned}
V_\beta^{CJT} = & \sum_{j=1,2} \left(-\mu_j |\Psi_{j0}|^2 + \frac{g_{jj}}{2} |\Psi_{j0}|^4 \right) + g_{12} |\psi_{10}|^2 |\Psi_{20}|^2 \\
& + \frac{1}{2} \int_\beta \text{tr} \left\{ \sum_{j=1,2} [\ln D_j^{-1}(k) + D_{j0}^{-1}(k) D(k)] - 2.1 \right\} \\
& + \frac{3g_{11}}{8} (P_{11}^2 + P_{22}^2) + \frac{g_{11}}{4} P_{11} P_{22} + \frac{3g_{22}}{8} (Q_{11}^2 + Q_{22}^2) \\
& + \frac{g_{22}}{4} Q_{11} Q_{22} + \frac{g_{12}}{4} (P_{11} Q_{11} + P_{11} Q_{22} + P_{22} Q_{11} + P_{22} Q_{22}),
\end{aligned} \tag{3.62}$$

chú ý đến (2.30) và

$$P_{aa} = \int_\beta P_{aa}, Q_{aa} = \int_\beta Q_{aa}. \tag{3.63}$$

Sau nhiều tính toán, các tác giả của công trình [55] cho thấy rằng, trong gần đúng HF, định lý Goldstone bị vi phạm. Để giải quyết vấn đề này, tương tự như đã làm ở Chương 2 đối với BEC một thành phần, ta sử dụng phương pháp do Ivanov và cộng sự [38] đã đề xuất, tức là thêm vào thế hiệu dụng (3.51) số hạng ΔV_β^{CJT} ,

$$\begin{aligned}
\Delta V_\beta^{CJT} = & \frac{xg_{11}}{2} [2P_{ab}P_{ba} - P_{aa}P_{bb}] + \frac{yg_{22}}{2} [2Q_{ab}Q_{ba} - Q_{aa}Q_{bb}] \\
& + \frac{zg_{12}}{2} P_{aa}Q_{bb},
\end{aligned} \tag{3.64}$$

với P_{ab} được định nghĩa tương tự như (2.69) còn $Q_{ab} = \int D_{2(ab)}^{-1}$. Hoàn toàn tương tự như đã làm với hệ BEC một thành phần, để khôi phục các boson Goldstone đã xuất hiện trong gần đúng cây, ta phải có $D_{j(22)}^{-1} = \hbar^2 k^2 / 2m_j$. Yêu cầu này dẫn tới $x = y = -1/2, z = 0$. Như vậy, số hạng bổ chính (3.64) có dạng

$$\Delta V_\beta^{CJT} = -\frac{g_{11}}{4}(P_{11}^2 + P_{22}^2) - \frac{g_{22}}{4}(Q_{11}^2 + Q_{22}^2) + \frac{g_{11}}{2}P_{11}P_{22} + \frac{g_{22}}{2}Q_{11}Q_{22}, \quad (3.65)$$

thay (3.65) vào (3.62), ta có được

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\beta^{CJT} &= \sum_{j=1,2} \left(-\mu_j |\psi_{j0}|^2 + \frac{g_{jj}}{2} |\psi_{j0}|^4 \right) + g_{12} |\psi_{10}|^2 |\psi_{20}|^2 \\ &+ \frac{1}{2} \int_\beta \text{tr} \left\{ \sum_{j=1,2} [\ln D_j^{-1}(k) + D_{j0}^{-1}(k) D(k)] - 2 \cdot \mathbb{1} \right\} \\ &+ \frac{g_{11}}{8}(P_{11}^2 + P_{22}^2) + \frac{3g_{11}}{4}P_{11}P_{22} + \frac{g_{22}}{8}(Q_{11}^2 + Q_{22}^2) \\ &+ \frac{3g_{22}}{4}Q_{11}Q_{22} + \frac{g_{12}}{4}(P_{11}Q_{11} + P_{11}Q_{22} + P_{22}Q_{11} + P_{22}Q_{22}). \end{aligned} \quad (3.66)$$

- Hàm truyền nghịch đảo trong gần đúng này có dạng (3.32). Lấy cực tiểu của thế hiệu dụng, khối lượng hiệu dụng được viết

$$\begin{aligned} M_1^2 &= -\mu_1 + 3g_{11}\Psi_{10}^2 + g_{12}\Psi_{20}^2 + \Sigma_1^{(1)}, \\ M_2^2 &= -\mu_2 + 3g_{22}\Psi_{20}^2 + g_{12}\Psi_{10}^2 + \Sigma_1^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

và hệ phương trình trên được gọi là phương trình SD.

- Các phương trình khe

$$\begin{aligned} -\mu_1 + g_{11}\Psi_{10}^2 + g_{12}\Psi_{20}^2 + \Sigma_2^{(1)} &= 0, \\ -\mu_2 + g_{22}\Psi_{20}^2 + g_{12}\Psi_{10}^2 + \Sigma_2^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (3.68)$$

với

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{(1)} &= \frac{g_{11}}{2}P_{11} + \frac{3g_{11}}{2}P_{22} + \frac{g_{12}}{2}Q_{11} + \frac{g_{12}}{2}Q_{22}, \\ \Sigma_1^{(2)} &= \frac{g_{22}}{2}Q_{11} + \frac{3g_{22}}{2}Q_{22} + \frac{g_{12}}{2}P_{11} + \frac{g_{12}}{2}P_{22}, \\ \Sigma_2^{(1)} &= \frac{3g_{11}}{2}P_{11} + \frac{g_{11}}{2}P_{22} + \frac{g_{12}}{2}Q_{11} + \frac{g_{12}}{2}Q_{22}, \\ \Sigma_2^{(2)} &= \frac{3g_{22}}{2}Q_{11} + \frac{g_{22}}{2}Q_{22} + \frac{g_{12}}{2}P_{11} + \frac{g_{12}}{2}P_{22}. \end{aligned}$$

Tiếp theo chúng tôi xem xét các tích phân xung lượng (3.63). Chú ý đến (2.31) và hàm truyền (3.32), ta có thể viết các tích phân xung lượng (3.63) ở nhiệt độ không dưới dạng [55],

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2 / 2m_1}{\hbar^2 k^2 / 2m_1 + M_1^2}}, P_{22} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2 / 2m_1 + M_1^2}{\hbar^2 k^2 / 2m_1}}, \\ Q_{11} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2 / 2m_2}{\hbar^2 k^2 / 2m_2 + M_2^2}}, Q_{22} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2 / 2m_2 + M_2^2}{\hbar^2 k^2 / 2m_2}}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

và mật độ năng lượng của thành phần thứ j ở nhiệt độ không là

$$\Omega_j = \frac{1}{2} \int_{\beta} \text{tr} \ln D_j^{-1}(k) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m_j} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_j} + M_j^2 \right)}. \quad (3.70)$$

Để cho đơn giản, chúng tôi đưa về dạng không thứ nguyên và khối lượng hiệu dụng ở dạng không thứ nguyên được định nghĩa $\mathcal{M}_j^2 = M_j^2 / g_{jj} n_{j0}$. Do đó, ta có thể viết lại phương trình (3.69)

$$\begin{aligned} P_{11} &= \frac{1}{2\xi_1^3} \int \frac{d^3\kappa_1}{(2\pi)^3} \frac{\kappa_1}{\sqrt{\kappa_1^2 + \mathcal{M}_1^2}}, P_{22} = \frac{1}{2\xi_1^3} \int \frac{d^3\kappa_1}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{\kappa_1^2 + \mathcal{M}_1^2}}{\kappa_1}, \\ Q_{11} &= \frac{1}{2\xi_1^3} \int \frac{d^3\kappa_2}{(2\pi)^3} \frac{\kappa_2}{\sqrt{\kappa_2^2 + \mathcal{M}_2^2}}, Q_{22} = \frac{1}{2\xi_1^3} \int \frac{d^3\kappa_2}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{\kappa_2^2 + \mathcal{M}_2^2}}{\kappa_2}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

khi đó, (3.70) trở thành

$$\Omega_j = \frac{g_{jj} n_{j0}}{2\xi_j^3} \int \frac{d^3\kappa_j}{(2\pi)^3} \sqrt{\kappa_j^2 (\kappa_j^2 + \mathcal{M}_j^2)}. \quad (3.72)$$

Chia cho mật độ khối n_{j0} , tham số trật tự không thứ nguyên tương ứng là $\phi_j = \frac{\Psi_{j0}}{\sqrt{n_{j0}}}$ và ta xét hệ ở trạng thái cân bằng, các phương trình khe

và phương trình SD được viết ở dạng không thứ nguyên

$$\begin{aligned}
-1 + \phi_1^2 + K\phi_2^2 + \frac{1}{g_{11}n_{10}}\Sigma_2^{(1)} &= 0, \\
-1 + \phi_2^2 + K\phi_1^2 + \frac{1}{g_{22}n_{20}}\Sigma_2^{(2)} &= 0, \\
-1 + 3\phi_1^2 + K\phi_2^2 + \frac{1}{g_{11}n_{10}}\Sigma_1^{(1)} &= \mathcal{M}_1^2, \\
-1 + 3\phi_2^2 + K\phi_1^2 + \frac{1}{g_{22}n_{20}}\Sigma_1^{(2)} &= \mathcal{M}_2^2.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Tương tự như trong gần đúng một vòng, sự co gọn không gian theo phương trục $0z$ dẫn đến sự lượng tử hóa véctơ sóng của hệ. Dưới dạng không thứ nguyên nó có dạng (3.44). Kết hợp với điều kiện biên Dirichlet dẫn đến tích phân xung lượng (3.69) được viết dưới dạng

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \frac{1}{2\xi_1^3} \sum_n \int \frac{d^2\kappa_\perp}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\kappa_{1\perp}^2 + (2\pi n/L_1)^2}{\kappa_{1\perp}^2 + (2\pi n/L_1)^2 + \mathcal{M}_1^2}}, \\
P_{22} &= \frac{1}{2\xi_1^3} \sum_n \int \frac{d^2\kappa_\perp}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{\kappa_{1\perp}^2 + (2\pi n/L_1)^2 + \mathcal{M}_1^2}{\kappa_{1\perp}^2 + (2\pi n/L_1)^2}}.
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Để thực hiện phép lấy tổng trong (3.74), chúng tôi sử dụng công thức Euler-Maclaurin (2.43). Sau khi lấy tổng, chúng tôi lấy giới hạn $\Lambda \rightarrow \infty$ cho (3.74). Kết hợp (2.43) và (3.74) đưa đến

$$P_{11} = Q_{11} = 0, P_{22} = \frac{g_{11}n_{10}m_1\mathcal{M}_1}{12\hbar^2\ell}, Q_{22} = \frac{g_{22}n_{20}m_2\mathcal{M}_2}{12\hbar^2\ell}. \tag{3.75}$$

Thay (3.75) vào (3.73), chúng tôi thu được phương trình khe và phương trình SD

$$\begin{aligned}
-1 + \phi_1^2 + K\phi_2^2 + \frac{m_1g_{11}\mathcal{M}_1}{24\hbar^2\ell} + K\frac{m_2g_{22}\mathcal{M}_2}{24\hbar^2\ell} &= 0, \\
-1 + \phi_2^2 + K\phi_1^2 + \frac{m_2g_{22}\mathcal{M}_2}{24\hbar^2\ell} + K\frac{m_1g_{11}\mathcal{M}_1}{24\hbar^2\ell} &= 0, \\
-1 + 3\phi_1^2 + K\phi_2^2 + 3\frac{m_1g_{11}\mathcal{M}_1}{24\hbar^2\ell} + K\frac{m_2g_{22}\mathcal{M}_2}{24\hbar^2\ell} &= \mathcal{M}_1^2, \\
-1 + 3\phi_2^2 + K\phi_1^2 + 3\frac{m_2g_{22}\mathcal{M}_2}{24\hbar^2\ell} + K\frac{m_1g_{11}\mathcal{M}_1}{24\hbar^2\ell} &= \mathcal{M}_2^2.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Rất dễ dàng để giải hệ phương trình (3.76), chúng tôi thu được các tham số trật tự và khối lượng hiệu dụng ở dạng không thứ nguyên

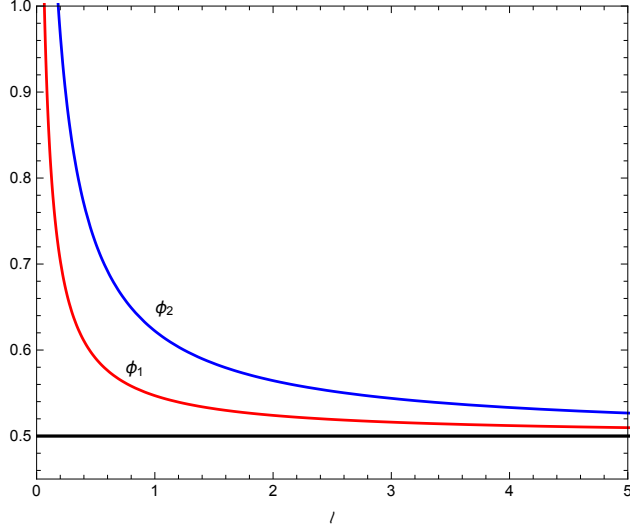
$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1^2 &= \mathcal{M}_2^2 = \frac{2}{K+1}, \\ \phi_1^2 &= \frac{1}{K+1} + \frac{g_{11}m_1}{12\hbar^2\ell\sqrt{2(K+1)}}, \\ \phi_2^2 &= \frac{1}{K+1} + \frac{g_{22}m_2}{12\hbar^2\ell\sqrt{2(K+1)}}.\end{aligned}\tag{3.77}$$

So sánh với kết quả trong gần đúng một vòng trong (3.43), chúng tôi thấy rằng, sự co lại của không gian có ảnh hưởng đáng kể đến các tham số trật tự, đặc biệt trong vùng khoảng cách là nhỏ, trong khi với gần đúng một vòng thì tham số trật tự là độc lập với khoảng cách. Chú ý đến (3.43) thì rõ ràng là $\phi_j^2 = \phi_{j1}^2 + \Delta\phi_j^2$ với số hạng bổ chính

$$\Delta\phi_j^2 = \frac{m_j g_{jj}}{12\hbar^2\ell\sqrt{2(K+1)}}.\tag{3.78}$$

Từ biểu thức (3.78) ta thấy rằng số hạng bổ chính sẽ biến mất khi ℓ đủ lớn hoặc với hệ BEC lý tưởng.

Hình 3.10 là đồ thị biểu diễn tham số trật tự như một hàm của khoảng cách cho các hỗn hợp BEC hai thành phần gồm rubidium 87 và caesium 133 [46] với các thông số $m_1 = 86.909\text{u}$, $a_{11} = 100.4a_0$, $m_2 = 132.905\text{u}$, $a_{22} = 280a_0$ với $\text{u} = 1.665 \times 10^{-27}\text{kg}$, $a_0 = 0.529\text{nm}$. Các đường màu đỏ và màu xanh tương ứng với rubidium và caesium; đường màu đen biểu thị giá trị $1/(K+1)$ là giá trị trong gần đúng một vòng. Con số này xác nhận các tính toán trên, đồng thời cũng cho thấy sự khác biệt kết quả giữa gần đúng hai vòng và gần đúng một vòng.



Hình 3.10: Sự phụ thuộc của các tham số trật tự không thứ nguyên và khoảng cách ℓ cho rubidium (đường màu đỏ) và caesium (đường màu xanh).

Bây giờ chúng tôi đi xem xét lực Casimir. Theo phần trên, năng lượng chân không được viết dưới dạng (3.49) cho thành phần thứ j , phương trình (3.72) trở thành

$$\mathcal{E}_{Cj} = \frac{g_{jj}n_{j0}}{2\xi_j^3} \sum_n \int \frac{d^3\kappa_j}{(2\pi)^2} \sqrt{\left[\kappa_{j\perp}^2 + (2\pi n/L_j)^2\right] \left[\kappa_{j\perp}^2 + (2\pi n/L_j)^2 + \mathcal{M}_j^2\right]}. \quad (3.79)$$

Với chú ý đến (2.43), chúng tôi thu được năng lượng Casimir trên một đơn vị thể tích ở dạng không thứ nguyên

$$\mathcal{E}_{Cj} = -\frac{g_{jj}n_{j0}\xi_j\pi^2\mathcal{M}_j}{1440\ell}. \quad (3.80)$$

Từ kết quả trong (3.77), chúng tôi thấy rằng, khối lượng hiệu dụng không thứ nguyên không phụ thuộc vào khoảng cách. Thay (3.77) vào (3.80) và chú ý đến định nghĩa trong (3.54), chúng tôi thu được

$$F_C = -\frac{\hbar\pi^2}{480\ell^4\sqrt{K+1}} \sum_{j=1,2} v_j. \quad (3.81)$$

Biểu thức (3.81) khẳng định kết quả lực Casimir trong gần đúng một vòng ở phần trên. Nó cho thấy rằng lực Casimir của BEC hai thành phần không đơn giản chỉ là sự chồng chất của một trong hai thành phần vì sự có mặt của hằng số tương tác g_{12} trong tham số K . Bên cạnh đó, kết quả trên cũng cho thấy lực Casimir bị triệt tiêu trong giới hạn của sự phân tách mạnh $K \rightarrow \infty$, điều này trùng với kết quả tương ứng trong gần đúng một vòng.

Tổng kết chương 3

Trong Chương 3, chúng tôi đã nghiên cứu tính chất của hệ BEC hai thành phần bị giới hạn bởi hai tường cứng và đã thu được một số kết quả sau:

1. Sử dụng phương pháp DPA với điều kiện biên Dirichlet và gần đúng thô cho vị trí của mặt phân cách giữa hai thành phần ngưng tụ, chúng tôi đã tìm được biểu thức giải tích hàm sóng ở trạng thái cơ bản. Trên cơ sở đó, thay vì sử dụng hằng số chuyển động như trong [74], chúng tôi tiến hành tính lực Casimir-like trực tiếp từ định nghĩa và thu được những kết quả tương tự. Đây là một cải tiến tốt về quy trình tính giải tích so với [74].
2. Nghiên cứu lực Casimir trong gần đúng một vòng và gần đúng hai vòng chúng tôi thu được các kết quả quan trọng
 - Lực Casimir trong hệ BEC hai thành phần không đơn thuần là tổng hợp lực Casimir do từng thành phần ngưng tụ riêng biệt gây ra. Tương tác giữa các hạt ở hai thành phần ngưng tụ khác nhau ảnh hưởng rất lớn đến mật độ ngưng tụ, và do đó ảnh hưởng đến lực Casimir;
 - Trong giới hạn phân tách mạnh ($K \rightarrow \infty$), lực Casimir bị triệt tiêu.
3. Kết quả nghiên cứu trong gần đúng hai vòng cho thấy tham số trật tự phụ thuộc mạnh vào khoảng cách giữa hai tường cứng, điều này không có được nếu dừng lại ở gần đúng một vòng. Điều này

cho thấy, khi nghiên cứu hiệu ứng Casimir trong hệ BEC hai thành phần, ta không thể bỏ qua đóng góp của các giản đồ bậc cao.

Kết luận

Trong luận án này, trên cơ sở sử dụng lý thuyết GP trong gần đúng DPA, phương pháp tác dụng hiệu dụng CJT trong gần đúng một vòng và hai vòng, chúng tôi nghiên cứu hiệu ứng Casimir trong hệ BEC một thành phần và hai thành phần. Nhiều kết quả quan trọng đã thu được trong khuôn khổ luận án này. Sau đây, chúng tôi điểm lại những kết quả quan trọng nhất.

1. Với BEC một thành phần, khi nghiên cứu trong CE ta thấy:
 - Khi khoảng cách giữa các tường cứng tăng lên, độ lớn lực Casimir giảm dần theo quy luật lũy thừa bán nguyên của khoảng cách giữa hai tường cứng;
 - Luôn tồn tại một giá trị của khoảng cách giữa hai tường cứng mà ở đó lực Casimir toàn phần bị triệt tiêu. Điều này xảy ra khi khoảng cách giữa hai tường cứng thỏa mãn công thức (2.58). Đây là một kết quả quan trọng, về mặt khoa học, nó định hướng cho các nghiên cứu thực về hiệu ứng Casimir trong hệ BEC một thành phần. Trong công nghệ, khi muốn giảm thiểu ảnh hưởng của lực tương tác giữa các biên giới hạn của một linh kiện điện tử cũng như ảnh hưởng giữa các linh kiện trong cùng một thiết bị thì các nhà

thiết kế, chế tạo có thể chọn khoảng cách này. Kết quả này cũng rất quan trọng trong lĩnh vực vật liệu nano khi BEC được đưa vào ứng dụng như những vật liệu khác [18, 68].

2. Với BEC hai thành phần, lực Casimir bị triệt tiêu trong trường hợp phân tách hoàn toàn. Kết quả này có ý nghĩa lớn trong việc nghiên cứu và đưa BEC vào ứng dụng như đã trình bày ở trên.
3. Khi nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước hữu hạn trong hệ BEC một và hai thành phần, ta không nên bỏ qua đóng góp của các giản đồ bậc cao trong Lagrange tương tác.

Các kết quả nghiên cứu của luận án là đáng tin cậy, đã được công bố trên ba tạp chí quốc tế uy tín *Journal of Statistical Physics*, *International Journal of Modern Physics B* và *Journal of Experimental and Theoretical Physics*.

Danh sách các công trình công bố kết quả nghiên cứu của luận án

1. N. V. Thu, L. T. Theu (2017), "Casimir Force of Two-Component Bose–Einstein Condensates Confined by a Parallel Plate Geometry", *Journal of Statistical Physics* **168**, 1.
2. N. V. Thu, L. T. Theu (2019), "Finite-size effect on Bose–Einstein condensate mixtures in improved Hartree–Fock approximation", *International Journal of Modern Physics B* **33**, 1950114.
3. N. V. Thu, L. T. Theu (2018), "Influence of the Finite Size Effect on Properties of a Weakly Interacting Bose Gas in Improved Hartree-fock Approximation", *VNU Journal Of Science: Mathematics - Physics* **34**, 3.
4. L. T. Theu, N. V. Thu (2018), "Casimir force on a single interacting Bose-Einstein condensate in the Double-Paraola Approximation", *HNUE JOURNAL OF SCIENCE: Natural Sciences* **6**, 66.
5. N. V. Thu, L.T. Theu, D. T. Hai (2020), "Casimir and surface forces on a single Bose-Einstein condensate in canonical ensemble", *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **130**, 321.

Tài liệu tham khảo

- [1] Andersen J. O. (2004), "Theory of the weakly interacting Bose gas", *Reviews of Modern Physics* **76**, 599.
- [2] Anderson M. H., Ensher J. R., Matthews M. R., Wieman C. E., and Cornell E. A. (1995), "Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor", *Science* **269**, 198.
- [3] Ao P., Chui S. T. (1998), "Binary Bose–Einstein condensate mixtures in weakly and strongly segregated phases", *Physical Review A* **58**, 4836.
- [4] Arfken G. B., Weber H. J. (2005), "Mathematical methods for physicists", sixth ed., Academic, San Diego.
- [5] Babb J. F. (2010), "Casimir effects in atomic, molecular, and optical physics", *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*. **59**, 1.
- [6] Bachmann S., Kempf A.(2008), "On the Casimir effect with general dispersion relation", *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **41**, 164021.

- [7] Barducci A., et al (1988), "Dynamical chiral-symmetry breaking and determination of the quark masses", *Physical Review D* **38**, 238.
- [8] Baym G., Blaizot J. -P., Zinn - J.J (2000), "The transition temperature of the dilute interacting Bose gas for N internal states", *Europhysics Letters* **49**, 150.
- [9] Bellucci S., Saharian A. A. (2009), "Fermionic Casimir effect for parallel plates in the presence of compact dimensions with applications to nanotubes", *Physical Review D* **80**, 105003.
- [10] Bimonte G. (2008), "Casimir effect in a superconducting cavity and the thermal controversy", *Physical Review A* **78**, 062101.
- [11] Binder K., in: Domb C., Lebowitz J. (Eds.) (1983), "Phase transitions and critical phenomena", *Academic Press London UK* bf 8.
- [12] Biswas S. (2007), "Bose–Einstein condensation and the Casimir effect for an ideal Bose gas confined between two slabs", *J. Phys. A* **40**, 9969.
- [13] Biswas S., Bhattacharjee J. K., Majumder D., Saha K., Chakravarty N. (2010), "Casimir force on an interacting Bose–Einstein condensate", *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **43**, 085305.
- [14] Bordag M., Mohideen U., Mostepanenko V. M. (2001), "New developments in the Casimir effect", *Physics Reports.* **353**, 1.

- [15] Brand J., Reinhardt W. P. (2001), "Generating ring currents, solitons and vortices by stirring a Bose-Einstein condensate in a toroidal trap", *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **34**, L113.
- [16] Casimir H. B. G. (1948), "On the attraction between two perfectly conducting plates", *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51**, 793.
- [17] Casimir H. B. G., Polder D. (1948), "The influence of retardation on the London-van der Waals forces", *Physical Review* **73**, 360.
- [18] Chan H. B., Aksyuk V. A., Kleiman R. N., Bishop D. J., Capasso F. (2001), "Quantum Mechanical Actuation of Microelectromechanical Systems by the Casimir Force", *Science* **291**, 1941.
- [19] Chen F., Klimchitskaya G. L., Mostepanenko V. M., and Mohideen U. (2007), "Control of the Casimir force by the modification of dielectric properties with light", *Physical Review B* **76**, 035338.
- [20] Coleman S., Weinberg E. (1973), "Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking", *Physical Review D* **7**, 1888.
- [21] Cornwall J. M., Jackiw R., Tomboulis E. (1974), "Effective action for composite operators", *Physical Review D* **10**, 2428.
- [22] Dalvit D., Milonni P., Roberts D., Da Rosa F. (2011), "Casimir Physics", *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*.

- [23] Davis K. B., Mewes M.-O., Andrews M. R., Druten N. J., Durfee D. S., Kurn D. M., and Ketterle W. (1995), "Bose-Einstein condensation in a gas of Sodium atoms", *Physical Review Letters* **75**,3969.
- [24] De Gennes P. G. (1966), "Superconductivity of Metals and Alloys", *Benjamin New York*.
- [25] Denschlag J. H., Simsarian J. E., Häffner H., McKenzie C., Browaeys A., Cho D., Helmerson K., Rolston S. I and Phillips W. D. (2002), "A Bose-Einstein condensate in an optical lattice", *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **35**, 3095.
- [26] Drummond P. D., Eleftheriou A., Huang K., Kheruntsyan K. V. (2001), "Theory of a mode-locked atom laser with toroidal geometry", *Physical Review A* **63**, 053602.
- [27] Edery A. (2005), "Multidimensional cut-off technique, odd-dimensional Epstein zeta functions and Casimir energy of massless scalar fields", *Journal of Physics A: Mathematical and General* **39**, 685.
- [28] Floerchinger S., Wetterich C. (2009), "Superfluid Bose gas in two dimensions", *Physical Review A* **79**, 013601.
- [29] Fukuto M., Yano Y. F., Pershan P. S. (2005), "Critical Casimir effect in three-dimensional Ising systems: measurements on binary wetting films", *Physical Review Letters* **94**, 135702.

- [30] Ganshin A., Scheidemantel. S., Garcia. R., Chan. M. H. W. (2006), "Critical Casimir force in *He4* Films: Confirmation of Finite-Size Scaling", *Physical Review Letters* **97**, 075301.
- [31] Goldstone J. (1961), "Field Theories with "Superconductor" Solutions", *IL Nuovo Cimento* **19**, 154.
- [32] Goldstone J., Salam A., Weinberg S. (1962), "Broken symmetries", *Physical Review* **127**, 965.
- [33] Hayashi S., Tsubota M., Takeuchi H. (2013), "Instability crossover of helical shear flow in segregated Bose-Einstein condensates", *Physical Review A* **87**, 063628.
- [34] Harber D. M., Obrecht J. M., McGuirk. J. M., Cornell. E. A. (2005), "Measurement of the Casimir–Polder force through center-of-mass oscillations of a Bose–Einstein condensate", *Physical Review A* **72**, 033610.
- [35] https://www.nanotech-now.com/news.cgi?story_id=31907.
- [36] Indekeu J. O., Lin C. -Y., Thu N. V., Schaeybroeck V. B., Phat T. H. (2015), "Static interfacial properties of Bose–Einstein-condensate mixtures", *Physical Review A* **91**, 033615.
- [37] Inouye S., Andrews M. R., Stenger J., Miesner H. -J., Stamper-Kurn D. M., Ketterle W. (1998), "Observation of Feshbach resonances in a Bose–Einstein condensate", *Nature (London)* **392**, 151.

- [38] Ivanov Y. B., Riek F., Knoll. J. (2005), "Gapless Hartree-Fock resummation scheme for the $O(N)$ model", *Physical Review D* **71**, 105016.
- [39] Jackiw R., Johnson K. (1973), "Dynamical model of spontaneously broken gauge symmetries", *Physical Review D* **8**, 2386.
- [40] Jessen P. S., and Deutsch I. H. (1996), "Optical lattices", *In Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics* **37**, 95.
- [41] Klimchitskaya G. L., Mostepanenko V. M. (2008), "Conductivity of dielectric and thermal atom-wall interaction", *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **41**, 312002.
- [42] Lamoreaux S. K. (1997), "Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μm range", *Physical Review Letters* **78**, 5.
- [43] Lipowsky R., et al (1988), "Random Fluctuations and Pattern Growth", *NATO ASI Series E* **157**, 227.
- [44] Malomed A. B., Nepomnyashchy A. A., Tribelsky I. M. (1990), "Domain boundaries in convection patterns", *Physical Review A* **42**, 7244.
- [45] Martin P. A., Zagrebnov V. A. (2005), "The Casimir effect for the Bose-gas in slabs", *Europhysics Letters*. **73**, 15.
- [46] McCarron D. J., et al. (2011), "Dual-species Bose-Einstein condensate of Rb 87 and Cs 133", *Physical Review A* **84**, 011603.

- [47] Milonni P. (1994), "The quantum vacuum: An introduction to quantum electrodynamics", *Academic Press, Inc., San Diego, USA*.
- [48] Milton K. A. (2008), "The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy", arXiv:hep-th/9901011.
- [49] Moshe G. (2014), "Phase transitions: Modern applications", *World Scientific, Singapore*.
- [50] Mostepanenko V. M. (1998), "in: A.M. Prokhorov (Ed.)", *Physical Encyclopaedia*, **5**, Large Russian Encyclopaedia, Moscow, p.664 (in Russian).
- [51] Mulliken R. S. (1924), "The band spectrum of boron monoxide", *Nature* **114**, 349.
- [52] Obrecht J. M., Wild R. J., Antezza M., Pitaevskii L. P., Stringari S., Cornell E. A. (2007), "Measurement of the temperature dependence of the Casimir-Polder force", *Physical Review Letters*. **98**, 063201.
- [53] Pethick C.J., Smith H. (2008), "Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases". Cambridge University Press, Cambridge.
- [54] Pitaevskii L., Stringari S. (2003), "Bose–Einstein Condensation", Oxford University Press, Oxford
- [55] Phat T. H, Hoa L. V, Anh N. T, Long N. V. (2009), "Bose-Einstein condensation in binary mixture of Bose gases", *Annals of Physics* **324**, 2074.

- [56] Phat T. H., Thu N. V. (2014), "Finite-size effects of linear sigma model in compactified space-time", *International Journal of Modern Physics A* **29**, 1450078.
- [57] Plunien G., Muller B., Greiner W. (1986), "The Casimir effect", *Physics Report* **134**, 87.
- [58] Proukakis N. P., Jackson B. (2008), "Finite-temperature models of Bose–Einstein condensation", *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **41**, 203002.
- [59] Quach J. Q. (2015), "Gravitational casimir effect", *Physical Review Letters* **114**, 081104.
- [60] Quiros M. (1998), "Finite temperature field theory and phase transitions", *Proceedings Summer school in high-energy physics and cosmology: Trieste, Italy* **1999**, 187.
- [61] Roberts D. C., Pomeau Y. (2005), "Casimir-like force arising from quantum fluctuations in a slowly moving dilute Bose-Einstein condensate", *Physical Review Letters*. **95**, 145303.
- [62] Roy A., Angom D. (2015), "Thermal suppression of phase separation in condensate mixtures", *Physical Review A* **92**, 011601.
- [63] Saharian A. A. (2007), "The generalized Abel–Plana formula with applications to Bessel functions and Casimir effect", arXiv preprint arXiv:0708.1187.

- [64] Schaeybroeck B. V. (2008), "Interface tension of Bose-Einstein condensates", *Physical Review A* **78**, 023624.
- [65] Schaeybroeck B. V., Indekeu J. O. (2015), "Critical wetting first-order wetting and prewetting phase transitions in binary mixtures of Bose-Einstein condensate." *Physical Review A* **91**, 013626.
- [66] Schiefele J., Henkel C. (2008), "Casimir energy of a BEC: from moderate interactions to the ideal gas", *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42**, 045401.
- [67] Schmitt A. (2010), "Dense matter in compact stars: A pedagogical introduction", *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, **811**.
- [68] Serry F. M., Walliser D., Maclay G. J. (1998), "The role of the casimir effect in the static deflection and stiction of membrane strips in microelectromechanical systems (MEMS)", *Journal of Applied Physics* **84**, 2501.
- [69] Shams A. A., and Glyde H. R. (2009), "Superfluidity and Bose-Einstein condensation in optical lattices and porous media: A path integral Monte Carlo study", *Physical Review B* **79**, 214508.
- [70] Steck A., Daniel. (2001), Rubidium 87 D line data.
- [71] Stenger J., Inouye S., Stamper-Kurn D. M., Miesner H.-J., Chikkatur A.P., Ketterle W. (1998), "Spin domains in ground-state Bose-Einstein condensates", *Nature* **396**, 345.

- [72] Steven K. L. (2004), "The Casimir force: background, experiments, and applications", *Reports on Progress in Physics* **68**, 201.
- [73] Tarasov S. V., Kocharovsky VI. V., Kocharovsky V. V. (2015), "Grand canonical versus canonical ensemble: Universal structure of statics and thermodynamics in a critical region of Bose-Einstein condensation of an ideal gas in arbitrary trap", *Journal of Statistical Physics* **161**, 942.
- [74] Thu N. V., Phat T. H., Song P. T. (2017), "Finite-size effects of surface tension in two segregated BECs confined by two hard walls", *Journal of Low Temperature Physics*. **186**, 127.
- [75] Thu N. V. (2018), "The forces on a single interacting Bose–Einstein condensate." *Physics Letters A* **382**, 1078.
- [76] Yue H. (1996), "Effective potential for composite operators", *Physical Review D* **54**, 1614.