

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

LƯƠNG THỊ THÊU

NGHIÊN CỨU HIỆU ỨNG CASIMIR
TRONG HỆ NGỪNG TỤ BOSE-EINSTEIN

Chuyên ngành: Vật lý lý thuyết và vật lý toán

Mã số: 9 44 01 03

Người hướng dẫn: PGS. TS. Nguyễn Văn Thụ

PGS. TS. Lưu Thị Kim Thanh

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ VẬT LÝ

HÀ NỘI - 2020

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài

Đã hơn 50 năm, kể từ khi H.B.G. Casimir xuất bản bài báo nổi tiếng của mình⁽¹⁶⁾, trong bài báo này, ông đưa ra giải thích đơn giản nhưng sâu sắc cho tương tác van der Waals chậm (tương tác này được mô tả bởi ông cùng với D. Polder chỉ một thời gian ngắn trước đó) như là sự biểu thị của năng lượng điểm không của trường lượng tử. Trong một thời gian dài, bài báo vẫn chưa được biết đến một cách rõ ràng. Phải đến những năm 1970 trở về sau, các nhà vật lý mới bắt đầu chú ý đến hiệu ứng Casimir và nghiên cứu nó trong các hệ vật lý khác nhau. Các thí nghiệm chính xác cao chứng minh lực Casimir đã được thực hiện và nhiều thí nghiệm khác cũng đang được tiến hành. Trong sự phát triển lý thuyết, sự tiến bộ đáng kể đã được thực hiện để khảo sát cấu trúc phân kỳ nói chung, nền không phẳng và tính toán hiệu ứng cho nhiều hình dạng và các điều kiện biên phức tạp hơn, bao gồm cả cấu trúc thực của ranh giới. Hiệu ứng Casimir là một vấn đề liên ngành, phạm vi áp dụng của nó rất rộng, từ vũ trụ học cho đến vật lý các môi trường đông đặc, đặc biệt là vật lý nano và công nghệ chế tạo vật liệu nano.

Mặc dù được dự đoán từ năm 1925 nhưng các nghiên cứu về ngưng tụ Bose-Einstein (BEC) chỉ thực sự bùng nổ từ những năm 1995 cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm, đặc biệt là sau khi thực nghiệm tạo ra được hệ BEC hai thành phần. Tuy nhiên, sau những thành công của thực nghiệm đo lực Casimir tới hạn trong chất lỏng lượng tử và lực Casimir-Polder trong môi trường BEC thì các nghiên cứu về hiệu ứng kích thước hữu hạn trong hệ BEC mới thực sự bùng nổ. Do môi trường BEC có thể coi là một chất lỏng lượng tử nên tồn tại năng lượng bề mặt mà tương ứng với nó là sự xuất hiện lực Casimir-like, nó được xem là thành phần trường trung bình của lực Casimir. Vì lí do này mà ảnh hưởng của sự co gọn không gian trong môi trường BEC thường được nghiên cứu ở hai khía cạnh: thứ nhất là lực căng bề mặt gây ra khi hệ BEC bị giam trong không gian giới hạn bởi các tường cứng, và đây được gọi là hiệu ứng Casimir-like (tương ứng với nó là lực Casimir-like); thứ hai là hiệu ứng gây ra bởi các thăng giáng lượng tử lên trạng thái cơ bản của hệ, và nguyên nhân

⁽¹⁶⁾Casimir H. B. G. (1948), "On the attraction between two perfectly conducting plates", *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51**, 793.

là do các kích thích phonon trên bề mặt của hệ, còn được gọi là thành phần thăng giáng lượng tử của lực Casimir.

Đầu tiên phải kể đến hiệu ứng Casimir-like. Đối với hệ các hạt Bose lý tưởng, dựa trên thống kê Bose-Einstein, S. Biswas⁽¹²⁾ đã tính lực Casimir-like cho các miền khác nhau của nhiệt độ, kể cả miền nhiệt độ lớn hơn nhiều so với nhiệt độ tới hạn. Đối với hệ Bose loãng, việc tính toán lực Casimir-like đã được thực hiện bởi các nhóm nghiên cứu của S. Biswas và nhóm nghiên cứu D. Roberts. Lực Casimir-like cũng được tác giả N.V. Thu và cộng sự⁽⁷⁴⁾ khảo sát đối với hệ BEC hai thành phần trong gần đúng parabol kép (DPA) ở trạng thái tới hạn demixing.

Đối với thành phần lực Casimir gây ra bởi các thăng giáng lượng tử, các nghiên cứu hiện có tương đối phong phú. Tuy nhiên, một số điểm hạn chế của các nghiên cứu này là:

- Các tính toán mới chỉ thực hiện được trong gần đúng một vòng;
- Chỉ khảo sát với hệ BEC một thành phần. Đối với hệ BEC hai thành phần, do xuất hiện thêm tương tác giữa các hạt ở hai thành phần khác nhau nên sẽ dẫn đến nhiều kết quả quan trọng. Mặc dù vậy, theo hiểu biết của chúng tôi, đây vẫn còn là lĩnh vực chưa được quan tâm;
- Chỉ khảo sát trong thống kê chính tắc lớn (GCE).

Rõ ràng là còn nhiều vấn đề liên quan đến ảnh hưởng của sự co gọn không gian lên các tính chất của hệ BEC cần được mở rộng nghiên cứu thêm. Nhằm đóng góp định hướng cho các nghiên cứu thực nghiệm về hiệu ứng Casimir trong môi trường BEC, chúng tôi chọn **“Nghiên cứu hiệu ứng Casimir trong hệ ngưng tụ Bose-Einstein”** là đề tài nghiên cứu trong luận án này.

2. Mục đích, đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Với mục đích khảo sát ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước hữu hạn lên các tính chất của hệ BEC. Nghĩa là, các hệ BEC này bị giam giữ giữa hai tường cứng đặt song song với nhau và kết nối (không kết nối) với bề hạt ngoài ứng với tập hợp thống kê chính tắc lớn (thống kê chính tắc (CE)). Do vậy, hiệu ứng Casimir phụ thuộc vào điều kiện biên, tương tác giữa các hạt trong hệ, nhiệt độ và trường ngoài. Trong luận án này, chúng tôi tập trung nghiên cứu hệ BEC ở nhiệt độ gần nhiệt độ không tuyệt đối và không có trường ngoài, cụ thể như sau:

a. Hệ BEC một thành phần:

⁽¹²⁾Biswas S. (2007), "Bose-Einstein condensation and the Casimir effect for an ideal Bose gas confined between two slabs", *J. Phys. A* **40**, 9969.

⁽⁷⁴⁾Thu N. V., Phat T. H., Song P. T. (2017), "Finite-size effects of surface tension in two segregated BECs confined by two hard walls", *Journal of Low Temperature Physics*. **186**, 127.

- Khảo sát hàm sóng mô tả trạng thái cơ bản dựa trên phương trình Gross-Pitaevskii (GP). Từ đó, chúng tôi tìm năng lượng mặt ngoài và lực Casimir-like.

- Nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước hữu hạn lên mật độ ngưng tụ, năng lượng Casimir và lực Casimir trong gần đúng một vòng và gần đúng hai vòng.

- Nghiên cứu lực Casimir toàn phần, là tổng hợp của lực Casimir lưỡng tử và lực Casimir trường trung bình.

Những khảo sát ở trên được thực hiện trong cả thống kê chính tắc và thống kê chính tắc lớn.

b. Hệ BEC hai thành phần:

Với hệ BEC hai thành phần, do tính phức tạp của các tính toán toán học, nên chúng tôi chỉ khảo sát trong thống kê chính tắc lớn và chủ yếu tập trung vào:

- Sử dụng phương pháp DPA để nghiên cứu năng lượng mặt ngoài và lực Casimir-like.

- Nghiên cứu hiệu ứng Casimir trong gần đúng một vòng và gần đúng hai vòng.

3. Phương pháp nghiên cứu

Để thực hiện được các nghiên cứu ở trên, chúng tôi lựa chọn phương pháp nghiên cứu như sau:

- Khi nghiên cứu lực căng mặt ngoài, chúng tôi sử dụng phương pháp gần đúng trường trung bình mà đối với hệ BEC ở nhiệt độ không nó được mô tả bởi (hệ) phương trình GP. Để giải (hệ) phương trình này, chúng tôi sử dụng DPA.

- Để nghiên cứu lực Casimir, chúng tôi sử dụng phương pháp tác dụng hiệu dụng Cornwall-Jackiw-Tombolis (CJT).

4. Cấu trúc của luận án

Bên cạnh phần mở đầu, kết luận và tài liệu trích dẫn, nội dung chính của luận án được trình bày trong ba chương:

Chương 1. Hệ thống lý thuyết nghiên cứu về lực Casimir

Chương 2. Lực Casimir trong ngưng tụ Bose-Einstein một thành phần

Chương 3. Lực Casimir trong ngưng tụ Bose-Einstein hai thành phần

Chương 1

Hệ thống lý thuyết nghiên cứu về lực Casimir

Trong chương này, chúng tôi cố gắng hệ thống lại nội dung liên quan đến hiệu ứng Casimir trong vật lý, đặc biệt là trong môi trường ngưng tụ Bose-Einstein. Đồng thời trình bày hai phương pháp cơ bản được sử dụng rộng rãi để nghiên cứu hiệu ứng Casimir trong BEC một và hai thành phần.

1.1. Tổng quan về lực Casimir

1.1.1. Dao động điểm không và biểu hiện của chúng

Năng lượng điểm không là mức năng lượng thấp nhất của một hệ lượng tử. Năng lượng chuyển động của nguyên tử, phân tử tỉ lệ với nhiệt độ tuyệt đối nên ở nhiệt độ không tuyệt đối thì các nguyên tử, phân tử sẽ đứng yên. Tuy nhiên, hệ lượng tử bị chi phối bởi nguyên lý bất định Heisenberg nên các nguyên tử, phân tử vẫn dao động ngay cả khi ở nhiệt độ không tuyệt đối. Năng lượng của hệ lúc này gọi là năng lượng điểm không.

Để đơn giản, ta hãy xét một dao động tử điều hòa một chiều có tần số góc ω . Ở trạng thái dừng thứ n , năng lượng của nó là

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (1.1)$$

với \hbar là hằng số Planck rút gọn và $n = 0, 1, \dots$. Như vậy, trạng thái cơ bản của dao động tử điều hòa này có năng lượng là

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \neq 0. \quad (1.2)$$

Đây được gọi là năng lượng điểm không. Bằng chứng thực nghiệm đầu tiên về sự tồn tại của năng lượng điểm không được quan sát bởi Mulliken vào năm 1924. Như vậy, ngay tại nhiệt độ không tuyệt đối thì các nguyên tử, phân tử vẫn luôn dao động, điều này tạo nên các thăng giáng lượng tử.

1.1.2. Hiệu ứng Casimir

Vào năm 1948, H.B.G. Casimir đã phát hiện ra sự tương tác giữa hai tấm kim loại phẳng, trung hòa về điện, đặt song song với nhau trong trường điện từ. Lực này chính là lực Casimir, nó có dạng

$$f = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 \ell^4} S, \quad (1.20)$$

ở đây \hbar và c lần lượt là hằng số Planck và vận tốc ánh sáng trong chân không, ℓ là khoảng cách giữa hai tấm, S là diện tích tấm phẳng và thỏa mãn điều kiện $\ell^2 \ll S$.

Để dẫn ra kết quả này, có nhiều phương pháp khác nhau để khử phân kỳ trong năng lượng điểm không, nhưng có hai phương pháp phổ biến là: phương pháp sử dụng tenxơ-năng xung lượng và phương pháp hàm zeta Riemann.

Các nghiên cứu đã chỉ ra rằng lực Casimir phụ thuộc vào nhiều yếu tố: bản chất hệ, cấu trúc hình học của hệ, điều kiện biên và nhiệt độ. Trong thực nghiệm, việc đo được chính xác lực Casimir là rất khó khăn do: thứ nhất, lực này chỉ xuất hiện trong một vùng không gian rất nhỏ, thứ hai, là việc tạo nên một cấu trúc như tính toán ban đầu của Casimir là rất khó khả thi. Đã có rất nhiều nỗ lực thực nghiệm để nghiên cứu lực Casimir nhưng kết quả chưa được như mong muốn. Phải đến năm 1996, tức là 48 năm sau khi được phát hiện, Lamoreaux mới đo được lực Casimir với sai số cỡ 5% so với tính toán lý thuyết.

1.2. Tình hình nghiên cứu lực Casimir trong ngưng tụ Bose-Einstein

1.2.1. Ngưng tụ Bose-Einstein

Boson là hệ các hạt có spin nguyên và tuân theo thống kê Bose-Einstein. Khi nhiệt độ T của hệ nhỏ hơn nhưng rất gần với nhiệt độ tới hạn T_C^0 thì số hạt ngưng tụ là

$$N_0 = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_C^0} \right)^\alpha \right]. \quad (1.18)$$

1.2.2. Tổng quan về nghiên cứu hiệu ứng Casimir trong BEC

Nghiên cứu hiệu ứng kích thước hữu hạn trong hệ BEC được thực hiện bởi Harber và cộng sự vào năm 2005 nhằm xác định lực Casimir-Polder bằng thực nghiệm.

Về mặt lý thuyết, công trình đầu tiên có thể kể đến là nghiên cứu của A. Edery với hệ BEC ba chiều. Sử dụng phương pháp lý thuyết trường lượng tử

trong gần đúng một vòng, áp dụng cho hệ BEC, J. Schiefele và C. Henkel đã dựa trên các tính toán của Andersen bằng phương pháp nhiễu loạn để tính lực Casimir ở nhiệt độ không và nhiệt độ hữu hạn. Kết quả cho thấy ở nhiệt độ không, lực Casimir là lực hút và nó giảm theo kích thước của chiều bị giới hạn theo quy luật L^{-4} với L là kích thước của hệ theo chiều bị giới hạn. Tuy nhiên, kết quả tính toán chưa thể đưa ra được cái nhìn tổng thể về vấn đề do chỉ xét được ở những miền không gian đủ lớn hoặc đủ nhỏ. Bên cạnh đó, các tác giả cũng chỉ giới hạn khảo sát hệ trong GCE.

Một nhóm nghiên cứu khác là S. Biswas và cộng sự sử dụng hình thức luận Hamilton để khảo sát các lực tương tác trong hệ BEC. Kết quả của công trình này là tìm được biểu thức giải tích của lực căng mặt ngoài gây ra bởi phần dư năng lượng mặt ngoài trong lý thuyết trường trung bình và lực Casimir. Trên cơ sở này, các tác giả đã đánh giá được tương quan giữa lực Casimir và lực căng mặt ngoài. Tích phân theo xung lượng (hoặc véctơ sóng) bị phân kì tử ngoại, nên phải đưa vào số hạng ngắt (cut-off) Λ để ngắt tích phân. Ngoài ra, kết quả thu được phải được lấy giới hạn khi $\Lambda \rightarrow \infty$. Việc khai triển xung lượng và giới hạn đến bậc bốn như trên là điều không hợp lý. Khắc phục vấn đề này, tác giả N.V. Thu sử dụng công thức Euler-Maclaurin để khử phân kì tử ngoại. Đồng thời, mở rộng nghiên cứu ở khía cạnh điều kiện biên và xem xét hệ trong GCE và CE. Tuy nhiên, các nghiên cứu chỉ dừng lại với gần đúng một vòng và chưa xem xét hệ BEC một cách triệt để.

Đối với môi trường BEC hai thành phần, hiệu ứng Casimir-like (tương ứng là lực Casimir-like) đã được tác giả N.V. Thu và cộng sự nghiên cứu ở trạng thái tới hạn demixing. Theo đó, lực Casimir-like của hệ vẫn khác không khi mà hai thành phần trộn lẫn vào nhau. Đây là một kết quả rất đặc biệt của hiệu ứng kích thước hữu hạn lên tính chất tĩnh của hệ BEC hai thành phần. Với nghiên cứu về lực Casimir trong hệ này, hiện nay còn bỏ ngỏ. Do vậy, công việc chính trong luận án này sẽ tập trung nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước hữu hạn lên các tính chất tĩnh của hệ BEC hai thành phần, tập trung vào hai đại lượng quan trọng nhất đó là lực Casimir-like và lực Casimir.

1.2.3. Lý thuyết Gross-Pitaevskii

a. Phương trình Gross-Pitaevskii

Phương trình GP thực chất là dạng phi tuyến của phương trình Schrodinger khi xét trong gần đúng trường trung bình. Xét hệ BEC một thành phần, khi không có trường ngoài, thì phương trình GP có dạng

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \mu + g|\Psi(\vec{r})|^2 \right] \Psi(\vec{r}) = 0. \quad (1.62)$$

- Thế tương tác GP có dạng

$$V_{GP} = -\mu|\Psi|^2 + \frac{g}{2}|\Psi|^4. \quad (1.63)$$

b. Hệ phương trình Gross-Pitaevskii

Đối với hệ BEC hai thành phần, tương tác giữa các cặp hạt gồm hai thành phần khác nhau: thứ nhất là tương tác giữa các cặp hạt trong cùng một thành phần, tương tác này được đặc trưng bởi hằng số tương tác g_{jj} ; thứ hai là tương tác giữa các cặp hạt ở hai thành phần với nhau với hằng số tương tác g_{12} .

- Áp dụng nguyên lý tác dụng tối thiểu, ta tìm được hệ phương trình GP không phụ thuộc thời gian

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m_1}\nabla^2\Psi_1 - \mu_1\Psi_1 + g_{11}|\Psi_1|^2\Psi_1 + g_{12}|\Psi_2|^2\Psi_1 &= 0, \\ -\frac{\hbar^2}{2m_2}\nabla^2\Psi_2 - \mu_2\Psi_2 + g_{22}|\Psi_2|^2\Psi_2 + g_{12}|\Psi_1|^2\Psi_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.69)$$

- Thế tương tác GP của hệ có dạng

$$V_{GP} = \sum_{j=1,2} [-\mu_j|\Psi_j|^2 + g_{jj}|\Psi_j|^4] + g_{12}|\Psi_1|^2|\Psi_2|^2. \quad (1.70)$$

1.2.4. Gần đúng parabol kép

Để tìm hiểu các tính chất của hệ BEC một và hai thành phần, thì yêu cầu đầu tiên là phải giải được (hệ) phương trình GP. Do (hệ) phương trình GP là (hệ) phương trình vi phân phi tuyến, để tìm nghiệm giải tích chúng tôi sử dụng phương pháp DPA được Joseph và cộng sự đề xuất vào năm 2015. Bằng cách khai triển từ giá trị khối của hàm sóng rút gọn ở trạng thái cơ bản và giữ đến gần đúng bậc hai, chúng tôi thu được thế năng tương tác trong DPA ở dạng không thứ nguyên

$$\mathcal{V}_{DPA} \approx 2(\phi - 1)^2 - \frac{1}{2}. \quad (1.78)$$

Kết quả, chúng tôi thu được phương trình Euler-Lagrange không thứ nguyên có thể giải bằng giải tích

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \alpha^2(\phi - 1) = 0, \quad (1.79)$$

với $\alpha = \sqrt{2}$.

1.2.5. Tác dụng hiệu dụng Cornwall-Jackiw-Tombolis

Để nghiên cứu lực Casimir, chúng tôi sử dụng phương pháp tác dụng hiệu dụng CJT. Theo đó, trạng thái của hệ được xác định qua:

- Phương trình khe

$$\frac{\partial V_{eff}(\bar{\phi}, G)}{\partial \bar{\phi}} = 0. \quad (1.89a)$$

- Phương trình Schwinger-Dyson (SD)

$$\frac{\partial V_{eff}(\bar{\phi}, G)}{\partial G} = 0. \quad (1.89b)$$

Khi hệ phương trình (1.89) cho nghiệm $\bar{\phi}(x) \neq 0$, nghĩa là có sự phá vỡ đối xứng. Như vậy, cơ chế phá vỡ đối xứng đã tự động sinh ra ngay trong hình thức luận tác dụng hiệu dụng CJT.

Chương 2

Hiệu ứng Casimir trong ngưng tụ Bose-Einstein một thành phần

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu hiệu ứng Casimir của hệ BEC một thành phần bị giam trong không gian giữa hai tường cứng đặt song song với nhau và cách nhau một khoảng l . Chọn trục Oz sao cho nó vuông góc với hai tường cứng và gốc tọa độ nằm giữa hai tường. Chúng tôi khảo sát hệ trong cả GCE và CE. Bên cạnh việc nghiên cứu lực Casimir trong gần đúng hai vòng, một số vấn đề chưa được giải quyết triệt để trong công trình của tác giả N.V. Thu⁽⁷⁵⁾ sẽ được khảo sát trong chương này. Nội dung của chương được công bố trong công trình 3, 4 và 5 trong danh mục các bài báo liên quan đến luận án.

2.1. Nghiên cứu lực Casimir-like

Để nghiên cứu lực Casimir-like trong hệ BEC một thành phần, chúng tôi sử dụng điều kiện biên Dirichlet vẫn đang được sử dụng rộng rãi và có thể tạo ra trong các thực nghiệm bằng cách sử dụng thể quang học hoặc quang tử.

2.1.1. Trạng thái cơ bản

Trước hết, chúng tôi tìm hàm sóng mô tả trạng thái cơ bản của hệ, tức là tìm nghiệm của phương trình GP trong gần đúng DPA. Điều kiện biên Dirichlet không thứ nguyên được viết dưới dạng

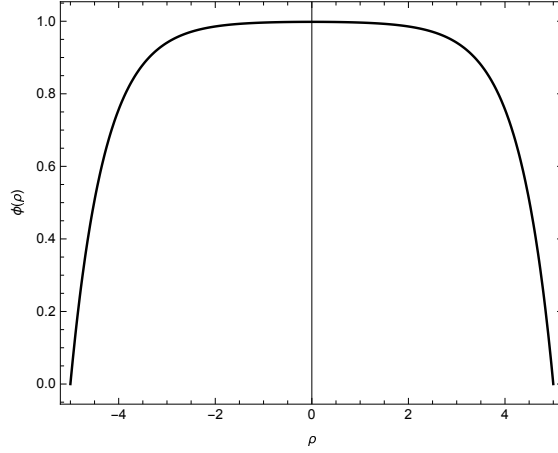
$$\phi\left(-\frac{L}{2}\right) = \phi\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \quad (2.2)$$

với $L = l/\xi$. Kết hợp với phương trình Euler-Lagrange ở dạng không thứ nguyên, chúng tôi thu được tham số trật tự mô tả hàm sóng ở trạng thái cơ

⁽⁷⁵⁾Thu N. V. (2018), "The forces on a single interacting Bose-Einstein condensate." *Physics Letters A* **382**, 1078.

bản của hệ

$$\phi(\rho) = 1 - \cosh(\alpha\rho) \operatorname{sech}\left(\frac{L}{\alpha}\right). \quad (2.3)$$



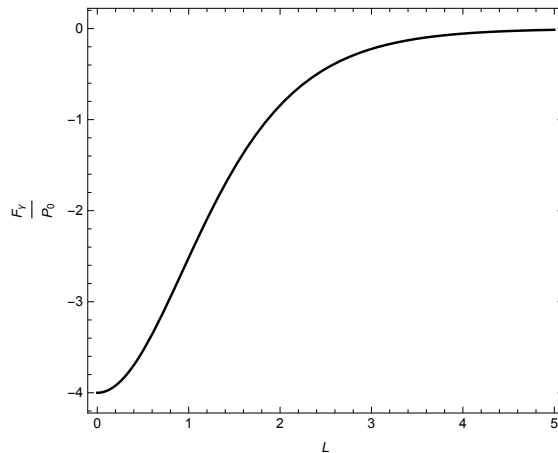
Hình 2.1: Sự phụ thuộc của tham số trật tự theo tọa độ.

Kết quả cho thấy, hàm sóng mô tả trạng thái cơ bản của hệ bị triệt tiêu tại các vị trí của tường cứng và nhanh chóng đạt giá trị của mật độ khối của ngưng tụ trong khoảng không gian giới hạn giữa hai tường cứng.

2.1.2. Lực Casimir-like trong GCE

Bây giờ, chúng tôi sử dụng hàm sóng để khảo sát năng lượng mặt ngoài, từ đó tìm lực Casimir-like tương ứng trong GCE và kết quả thu được biểu diễn trên Hình 2.3

$$F_\gamma = -4P_0 \operatorname{sech}\left(\frac{L}{\alpha}\right)^2. \quad (2.11)$$



Hình 2.3: Sự phụ thuộc của lực Casimir-like vào L trong GCE.

Kết quả cho thấy, lực Casimir-like là lực hút và độ lớn của nó có xu hướng bằng không khi khoảng cách giữa các tường cứng là lớn, hiệu ứng kích thước hữu

hạn trở nên mờ nhạt. Khi khoảng cách tiến tới 0 thì lực Casimir-like có giá trị hữu hạn bằng $-4P_0$.

2.1.3. Lực Casimir-like trong CE

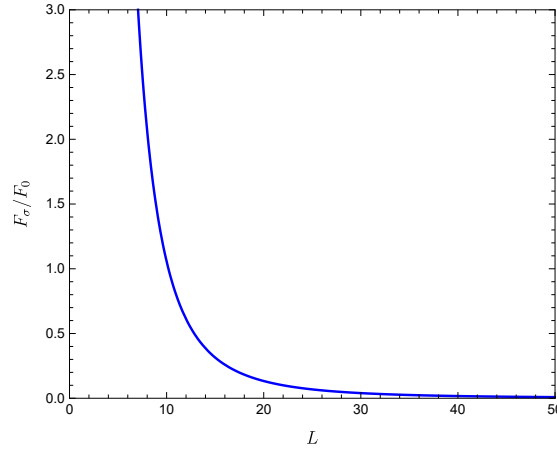
Đối với hệ BEC một thành phần trong CE, nghĩa là hệ không được kết nối với bề hạt, do vậy, số hạt trong hệ N là không đổi. Dựa vào biểu thức hàm sóng ở trạng thái cơ bản, chúng tôi tìm được biểu thức giải tích của lực Casimir-like trong CE

$$\frac{F_\sigma}{F_0} = \frac{F_1}{4g^2\ell m^2 N^2 \left[-3\alpha\xi \sinh\left(\frac{\alpha\ell}{\xi}\right) + 2\ell \cosh\left(\frac{\alpha\ell}{\xi}\right) + 4\ell \right]^2}, \quad (2.21)$$

với

$$F_1 = S\hbar^2 \left\{ 2\alpha\xi \sinh\left(\frac{\alpha\ell}{\xi}\right) \left[3S\hbar^2 \cosh\left(\frac{\alpha\ell}{\xi}\right) + 9S\hbar^2 - 4g\ell m N \right] - 4S\ell\hbar^2 \cosh\left(\frac{\alpha\ell}{\xi}\right) \right\},$$

và $F_0 = \frac{2m^2g^3N^4}{\hbar^4S^4}$.



Hình 2.5: Sự phụ thuộc của lực căng bề mặt vào L trong CE.

Hình 2.5 biểu diễn sự phụ thuộc của lực Casimir-like trong CE theo khoảng cách L . Chúng tôi nhận thấy rằng, giống như kết quả trong GCE, lực này sẽ bằng không khi khoảng cách đủ lớn để có thể bỏ qua hiệu ứng kích thước hữu hạn. Điểm khác biệt ở đây là lực Casimir-like trong CE là lực đẩy, tăng rất nhanh khi khoảng cách giữa các tường cứng giảm và vô cùng lớn khi khoảng cách tiến dần đến không. Đây là biểu hiện tính chất không chịu nén của chất lỏng.

2.2. Lực Casimir

Trong phần này, chúng tôi khảo sát ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước hữu hạn lên năng lượng Casimir và lực Casimir trong hệ BEC tương tác yếu trong gần đúng Hartree-Fock (HF), trong đó có tính đến các thăng giáng lượng tử. Dựa vào phương pháp tác dụng hiệu dụng CJT, chúng tôi nghiên cứu ảnh hưởng của kích thước hữu hạn lên hệ BEC một thành phần trong gần đúng hai vòng. Đồng thời, nghiên cứu lực Casimir toàn phần tác động lên các tường cứng do lực Casimir-like và lực Casimir là độc lập với nhau trong GCE và CE.

2.2.1. Nghiên cứu trong gần đúng một vòng

Khi nghiên cứu hệ trong gần đúng một vòng, chúng tôi sử dụng phương pháp ngắt xung lượng (cut-off) bằng cách đưa vào một giới hạn trên Λ cho xung lượng để khử phân kỳ UV. Kết quả, là năng lượng Casimir thu được dưới dạng

$$\Omega = -\frac{gn_0}{\xi^2} \frac{\pi^2 \phi}{1440L^3}. \quad (2.45)$$

Lực Casimir được định nghĩa là trái dấu đạo hàm bậc nhất của năng lượng Casimir theo khoảng cách giữa các tường cứng

$$F_C = -\frac{\partial \Omega}{\partial \ell}. \quad (2.46)$$

a. Nghiên cứu trong GCE

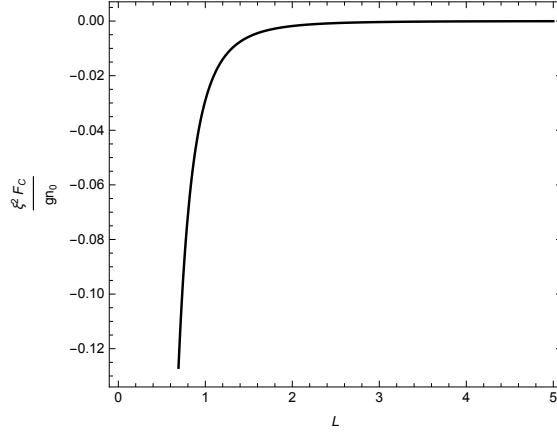
Trong GCE, vì mật độ khối của ngưng tụ là không đổi nên độ dài đặc trưng ξ là hằng số. Lực Casimir trong GCE có dạng

$$F_C = -\frac{gn_0}{\xi^2} \frac{\pi^2 \phi}{480L^4}. \quad (2.48)$$

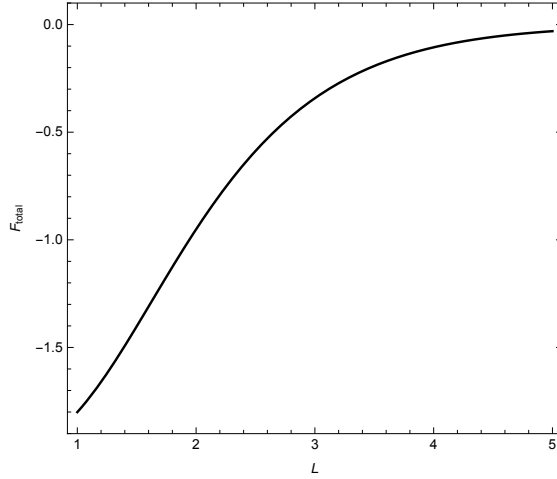
Lực Casimir toàn phần tác động lên các tấm là

$$F_{\text{total}} = F_\gamma + F_C. \quad (2.51)$$

Từ phương trình (2.48), Hình 2.6 và Hình 2.7, chúng tôi có các nhận xét sau: thứ nhất là lực Casimir luôn là lực hút, do đó nó tăng cường độ lớn của lực Casimir toàn phần tác dụng lên các tấm; thứ hai là có sự phân kì khi khoảng cách bằng 0, một đặc điểm điển hình của biến dạng chân không; thứ ba là độ lớn của lực Casimir giảm mạnh khi tăng khoảng cách, điều này cho thấy lực Casimir chỉ đáng chú ý khi ở khoảng cách nhỏ.



Hình 2.6: Sự phụ thuộc của lực Casimir vào L trong GCE.



Hình 2.7: Sự phụ thuộc của lực Casimir toàn phần vào L trong GCE.

b. Nghiên cứu trong CE

Khi nghiên cứu trong CE, mật độ khối của ngưng tụ n_0 phụ thuộc vào khoảng cách giữa các tường cứng, do đó độ dài đặc trưng cũng phụ thuộc vào ℓ . Do đó, năng lượng Casimir trong (2.45) được viết lại dưới dạng có thứ nguyên

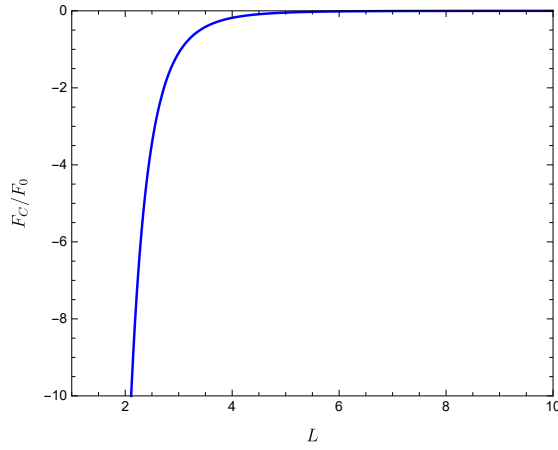
$$\Omega = -\frac{\pi^2 \phi \hbar^2}{1440 \alpha m \xi I_0 \ell^2}. \quad (2.53)$$

Kết quả là biểu thức của lực Casimir trong CE có dạng

$$\frac{F_C}{F_0} = \frac{M}{1440 \alpha m^3 g^3 N^4 \ell^3 \left[2\ell \cosh\left(\frac{\alpha \ell}{\xi}\right) + 4\ell - 3\alpha \xi \sinh\left(\frac{\alpha \ell}{\xi}\right) \right]^2}, \quad (2.54)$$

ở đây

$$M = \pi^2 S^3 \phi \hbar^4 \cosh\left(\frac{\ell}{\alpha \xi}\right) \left[\sinh\left(\frac{\ell}{\alpha \xi}\right) (9S\hbar^2 + 4gmN\ell) + 9S\hbar^2 \sinh\left(\frac{3\ell}{\alpha \xi}\right) - 29\alpha mgN\xi \cosh\left(\frac{\ell}{\alpha \xi}\right) - 7\alpha mgN \cosh\left(\frac{3\ell}{\alpha \xi}\right) \right].$$

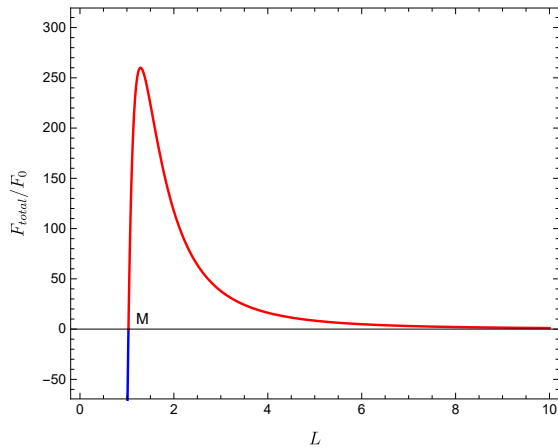


Hình 2.8: Sự phụ thuộc của lực Casimir vào L trong CE.

Lực Casimir toàn phần tác dụng lên các tấm trong CE

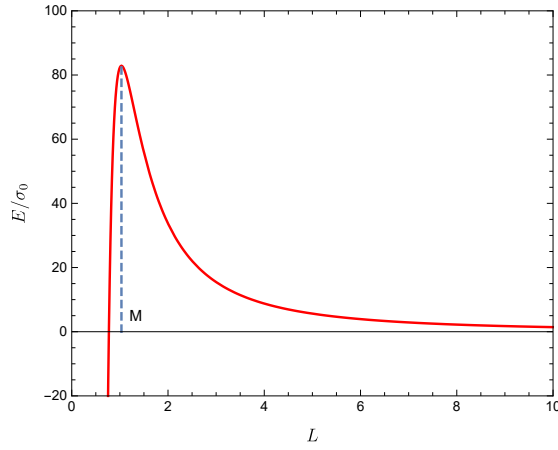
$$F_{\text{total}} = F_{\sigma} + F_C. \quad (2.55)$$

Bây giờ, chúng ta sẽ giải quyết một số vấn đề còn bỏ ngỏ trong công trình của tác giả N.V. Thu. Trước tiên, giống như đối với lực Casimir-like, ở đây các tính số được thực hiện cho hệ BEC một thành phần của rubidi 87, thay cho hệ natri 23. Sự phụ thuộc vào khoảng cách giữa hai tường cứng của lực Casimir toàn phần được vẽ trên Hình 2.9. Kết quả cho thấy, lực Casimir toàn phần là lực đẩy ở vùng khoảng cách lớn (đường cong màu đỏ) và là lực hút ở vùng khoảng cách nhỏ (đường màu xanh). Đối với hệ ngưng tụ rubidi 87, lực tổng hợp đổi chiều tại điểm M với $L = 1.0327$. Điểm này trùng khớp chính xác với điểm tại đó tổng năng lượng $E = \sigma + \Omega$ là cực đại như trên Hình 2.10.



Hình 2.9: Sự phụ thuộc của lực Casimir toàn phần vào L trong CE.

Kết quả cho thấy rằng, lực Casimir trong CE và GCE chỉ khác nhau ở độ lớn và tốc độ suy giảm khi khoảng cách giữa các tường cứng tăng lên. Một kết quả chưa được khảo sát trong công trình của tác giả N.V. Thu là thay cho quy luật suy giảm theo lũy thừa nguyên của khoảng cách giữa hai tường cứng trong



Hình 2.10: Sự phụ thuộc của tổng năng lượng vào L trong CE.

GCE, trong CE lực Casimir suy giảm theo lũy thừa bán nguyên của khoảng cách giữa hai tường cứng. Hơn nữa, khi xem xét hệ trong CE, lực Casimir-like và lực Casimir (ở dạng không thứ nguyên) không chỉ phụ thuộc vào khoảng cách giữa hai tường cứng mà còn phụ thuộc vào từng hệ cụ thể: số hạt trong hệ, khối lượng nguyên tử ngưng tụ và cường độ tương tác giữa các nguyên tử.

Tại vị trí mà lực tổng hợp triệt tiêu, lực Casimir-like và lực Casimir có cùng độ lớn nhưng ngược chiều nhau. Do đó, chúng tôi tìm được giá trị của khoảng cách giữa hai tường mà lực Casimir toàn phần triệt tiêu là

$$\ell_0 \approx \frac{1}{4} \left(\frac{121\pi^4 \hbar^6 S^5}{450m^3 g^3 N^3} \right)^{1/7}. \quad (2.58)$$

Như vậy, với các hệ nguyên tử khác nhau luôn tồn tại một giá trị của khoảng cách giữa hai tường cứng mà ở đó lực Casimir toàn phần bị triệt tiêu.

2.2.2. Nghiên cứu trong gần đúng hai vòng

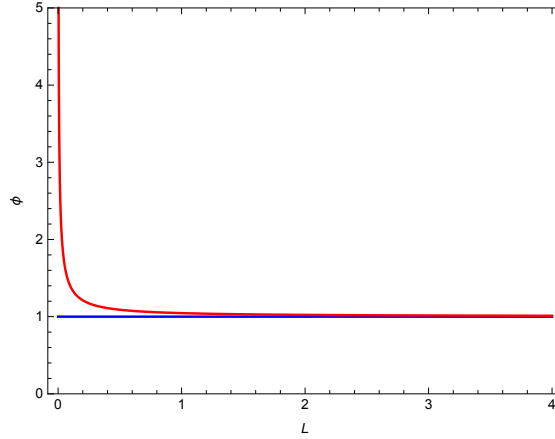
Các nghiên cứu về lực Casimir trước đó mới chỉ dừng lại ở gần đúng bậc thấp (gần đúng một vòng). Để khảo sát ảnh hưởng của sự co gọn một chiều không gian lên tính chất tĩnh của hệ BEC một thành phần, chúng tôi mở rộng nghiên cứu khi xét tới gần đúng bậc cao (gần đúng hai vòng). Sử dụng phương pháp tác dụng hiệu dụng CJT và bằng cách thêm số hạng vào thế hiệu dụng trong gần đúng HF để khôi phục định lý Goldstone, chúng tôi thu được phương trình SD và phương trình khe mô tả trạng thái của hệ BEC một thành phần ở dạng không thứ nguyên

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -1 + 3\phi^2 + \frac{3g m \mathcal{M}^{1/2}}{2 \cdot 12\hbar^2 \ell}, \\ -1 + \phi^2 + \frac{g m \mathcal{M}^{1/2}}{2 \cdot 12\hbar^2 \ell} &= 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Kết quả chúng tôi thu được cho khối lượng hiệu dụng và tham số trật tự có dạng

$$\mathcal{M} = 2, \quad (2.82)$$

$$\phi = \sqrt{1 + \frac{mg\mathcal{M}^{1/2}}{24\hbar^2 L\xi}}. \quad (2.83)$$



Hình 2.11: Sự phụ thuộc của tham số trật tự vào L trong gần đúng hai vòng.

Từ kết quả thu được chúng tôi nhận thấy, có sự khác biệt đối với tham số trật tự trong gần đúng một vòng. Trong gần đúng một vòng, tham số trật tự bằng hằng số và đồng nhất. Biểu thức (2.83) cho thấy rằng, trong gần đúng HF cải tiến (IHF), tham số trật tự phụ thuộc mạnh vào khoảng cách giữa các tường cứng, đặc biệt ở miền L nhỏ và nó bị phân kì khi khoảng cách này tiến tới không. Do khối lượng hiệu dụng là hằng số và không phụ thuộc vào khoảng cách giữa hai tấm song song nên không ảnh hưởng đến lực Casimir. Vì vậy, biểu thức lực Casimir tương tự như trong gần đúng một vòng.

Chương 3

Hiệu ứng Casimir trong ngưng tụ Bose-Einstein hai thành phần

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu hiệu ứng Casimir của hệ BEC hai thành phần, do vậy ngoài tương tác giữa các hạt trong cùng một thành phần còn có tương tác giữa các hạt ở hai thành phần khác nhau, với cường độ tương tác được xác định bởi hằng số tương tác g_{12} . Do tương tác này mà hệ BEC hai thành phần có thể ở trạng thái trộn lẫn hoặc không trộn lẫn. Khi ở trạng thái không trộn lẫn, tương tác giữa các hạt ở hai thành phần khác nhau tạo nên nhiều thay đổi trong các tính chất của hệ, đặc biệt là trạng thái phân tách mạnh. Nội dung cơ bản của chương này được công bố trong các công trình 1 và 2 trong danh mục các bài báo liên quan đến luận án.

3.1. Nghiên cứu lực Casimir-like

Xét hệ BEC hai thành phần ở trạng thái cân bằng, bị giới hạn bởi hai tường cứng đặt song song với nhau, vuông góc với trục $0z$ và cách nhau một khoảng l . Chúng tôi giả thiết các tường cứng được đặt tại $z = 0$ và $z = l$, mặt phân cách giữa hai thành phần nằm tại $z = l/2$. Thực chất, các thành phần của BEC hai thành phần được giam trong một hình chữ nhật với kích thước theo các phương $0x, 0y, 0z$ lần lượt là $l_x, l_y, l_z = l$ thỏa mãn $l_x, l_y \gg l$. Với điều kiện biên Dirichlet, chúng tôi sẽ nghiên cứu lực Casimi-like của hệ BEC bằng phương pháp DPA trong GCE

3.1.1. Trạng thái cơ bản

- Điều kiện biên Dirichlet ở dạng không thứ nguyên

$$\phi_j(\rho = 0) = \phi_j(\rho = L) = 0, \text{ với } j = (1, 2). \quad (3.9)$$

- Sử dụng phương pháp DPA và điều kiện biên (3.9), chúng tôi thu được

hàm sóng ngưng tụ mô tả trạng thái cơ bản của hệ

$$\phi_1 = e^{-\alpha\rho} (e^{\alpha\rho} - e^{\alpha L}) (A_1(e^{\alpha L} + e^{\alpha\rho}) + 1), \quad (3.10a)$$

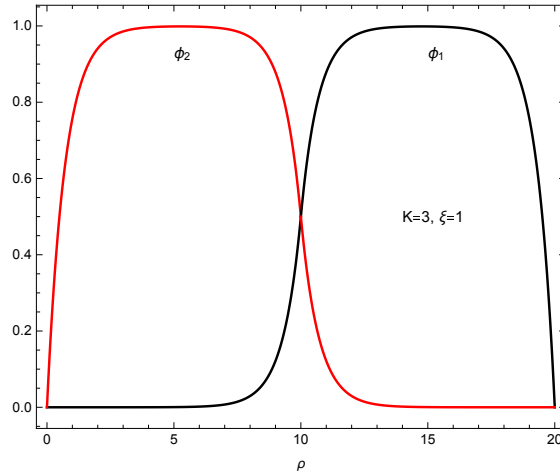
$$\phi_2 = -2B_1 e^{\frac{L\beta}{\xi}} \sinh\left(\frac{\beta(L-\rho)}{\xi}\right), \quad (3.10b)$$

ở bên phải mặt phân cách,

$$\phi_1 = A_2 (e^{\beta\rho} - e^{-\beta\rho}), \quad (3.11a)$$

$$\phi_2 = B_2 \left(e^{\frac{\alpha\rho}{\xi}} - e^{-\frac{\alpha\rho}{\xi}} \right) + 1 - e^{-\frac{\alpha\rho}{\xi}}, \quad (3.11b)$$

ở bên trái mặt phân cách.



Hình 3.1: Hàm sóng ở trạng thái cơ bản ứng với $K = 3$ và $\xi = 1$.

- Đối với trường hợp phân tách mạnh, tức là $K \rightarrow \infty$

$$\phi_1 = \begin{cases} 1 - \cosh\left(\frac{3\alpha L}{4} - \alpha\rho\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\alpha L}{4}\right), & \text{nếu } \rho > L/2; \\ 0, & \text{nếu } \rho < L/2. \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\phi_2 = \begin{cases} 0, & \text{nếu } \rho > L/2; \\ 1 - \cosh\left(\frac{\alpha(L-4\rho)}{4\xi}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\alpha L}{4\xi}\right), & \text{nếu } \rho < L/2. \end{cases} \quad (3.15)$$

Trong trường hợp này, các thành phần sẽ phân tách hoàn toàn.

3.1.2. Lực Casimir -like

Để tính năng lượng bề mặt phân cách, hệ chúng tôi khảo sát có khác biệt so với hệ khảo sát trong các công trình của Joseph⁽³⁶⁾ và của Schaeysbroeck⁽⁶⁴⁾ như sau:

⁽³⁶⁾Indekeu J. O., Lin C. -Y., Thu N. V., Schaeysbroeck V. B., Phat T. H. (2015), "Static interfacial properties of Bose-Einstein-condensate mixtures", *Physical Review A* **91**, 033615.

⁽⁶⁴⁾Schaeysbroeck B. V. (2008), "Interface tension of Bose-Einstein condensates", *Physical Review A* **78**, 023624.

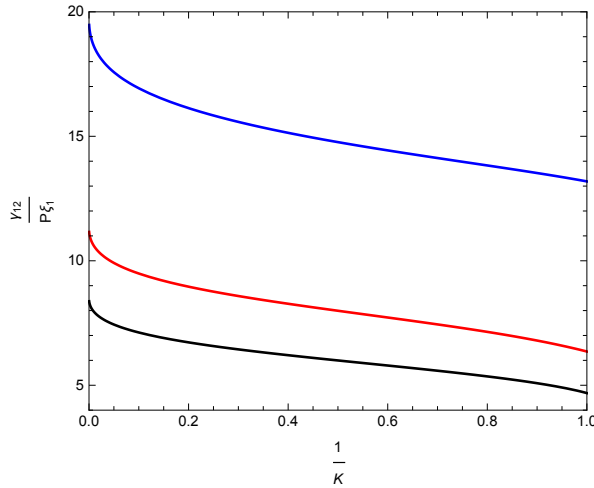
- Chúng tôi khảo sát hệ có kích thước hữu hạn theo cả ba chiều trong không gian, đặc biệt là dọc theo phương trục $0z$. Tức là hệ được khảo sát ở đây tương tự như hệ được khảo sát trong công trình của N. V. Thu và cộng sự ⁽⁷⁴⁾;

- Trong trường hợp tổng quát, hệ phương trình GP, như đã nói ở trên, không có lời giải giải tích. Để có thể đánh giá lực Casimir-like ở các miền khác nhau của hằng số tương tác K , các tác giả Schaeeybroeck và N. V. Thu đã sử dụng "hằng số chuyển động" để đưa số hạng động năng từ đạo hàm bậc hai về đạo hàm bậc nhất của hàm sóng. Trong khuôn khổ của luận án này, sử dụng DPA, chúng tôi tìm được biểu thức giải tích của hàm sóng nên có thể tính trực tiếp sức căng mặt phân cách từ biểu thức định nghĩa của nó;

- Do hàm sóng trong DPA được xác định cho hai miền khác nhau của mặt phân cách, nên để tính năng lượng bề mặt, trước tiên chúng tôi cũng tính cho từng phía của mặt phân cách rồi thực hiện phép lấy tổng để thu được kết quả cho toàn hệ.

Kết quả là sức căng mặt phân cách có dạng

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = & 2P\xi_1\alpha \left\{ \left[e^{\frac{L}{\alpha}} - 1 \right] \left[1 + A_1 \left(e^{L\alpha} - e^{\frac{L}{\alpha}} \right) \right] \right. \\ & \left. + \xi \left[1 - e^{-\frac{L}{\alpha\xi}} - 4B_2 \sinh \left(\frac{L\alpha}{4\xi} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$



Hình 3.2: Sự biến thiên sức căng mặt phân cách theo $1/K$ tại $L = 10$ khi $\xi = 0.5$ (đường màu đen), $\xi = 1$ (đường màu đỏ) và $\xi = 3$ (đường màu xanh).

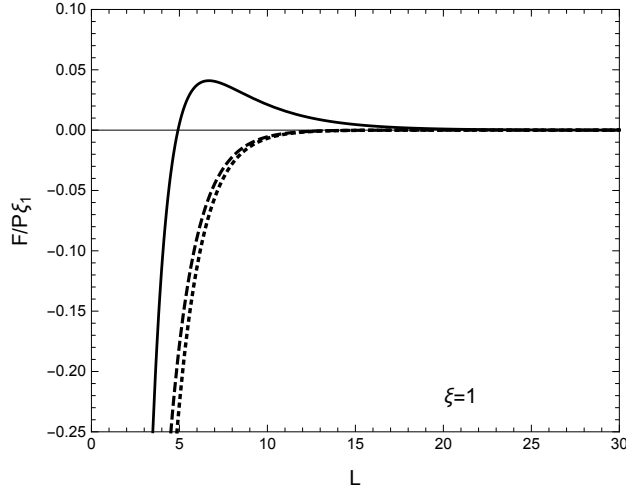
Kết quả cho thấy sự tương tự giữa sức căng mặt phân cách của BEC hai thành phần và sức căng bề mặt của BEC một thành phần: khi khoảng cách giữa hai tường cứng giảm thì sức căng mặt phân cách giảm nhanh về không do hệ được kết nối với bể hạt; khi khoảng cách giữa các tường cứng đủ lớn thì sức căng này đạt giá trị không đổi. Điểm khác biệt ở đây là vai trò của tham số $\xi = \xi_2/\xi_1$.

⁽⁷⁴⁾Thu N. V., Phat T. H., Song P. T. (2017), "Finite-size effects of surface tension in two segregated BECs confined by two hard walls", *Journal of Low Temperature Physics*. **186**, 127.

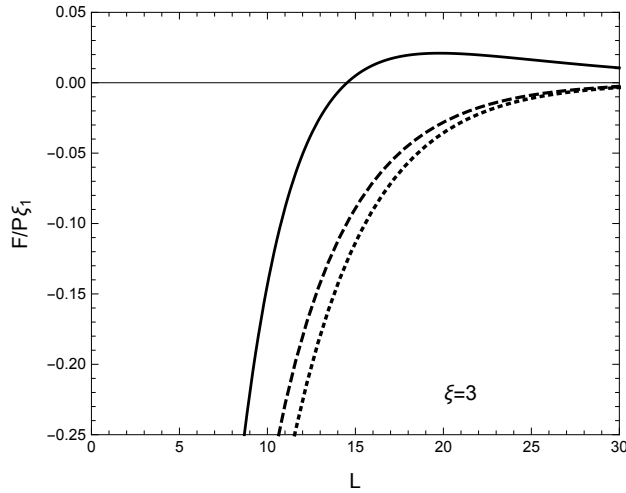
Khi tham số này tăng lên thì biên độ bão hòa của sức căng mặt phân cách tăng lên.

Dựa vào sức căng mặt phân cách, chúng tôi tìm được biểu thức giải tích cho lực Casimir-like trong GEC

$$F_{\gamma_{12}} = -\alpha^2 e^{-\frac{L}{\alpha\xi}} \left[1 + B_2 - B_2 e^{\frac{\alpha L}{\xi}} + e^{\frac{L(1+\xi)}{\alpha\xi}} \left(1 + A_1 - 4A_1 e^{\frac{L}{\alpha}} + 3A_1 e^{\alpha L} \right) \right]. \quad (3.27)$$



Hình 3.6: Sự phụ thuộc của lực tác dụng lên một đơn vị diện tích tường cứng theo L tại $\xi = 1$. Các đường nét liền, nét gạch và nét chấm lượn ứng với $K = 1.1, K = 2$ và $K = 3$.



Hình 3.7: Sự phụ thuộc của lực tác dụng lên một đơn vị diện tích tường cứng theo L tại $\xi = 3$. Các đường nét liền, nét gạch và nét chấm lượn ứng với $K = 1.1, K = 2$ và $K = 3$.

Từ kết quả giải tích, đồ thị minh họa Hình 3.6 và Hình 3.7, chúng tôi nhận thấy trong trường hợp hệ phân tách yếu $K < 3$, lực Casimir-like là lực hút khi hai tường cứng khá gần nhau, nó trở thành lực đẩy nếu hai tường cứng tiến ra xa nhau $L \gg \xi$. Trong trường hợp hệ phân tách mạnh $K > 3$, lực Casimir-like luôn là lực hút và triệt tiêu với mọi tham số của hệ khi $L \rightarrow +\infty$.

3.2. Lực Casimir

Tương tự như với BEC một thành phần, bây giờ chúng tôi sử dụng lý thuyết trường lượng tử để nghiên cứu lực Casimir trong hệ BEC và xem xét hệ trong gần đúng một vòng và hai vòng.

3.2.1. Nghiên cứu trong gần đúng một vòng

Trong phần này, sử dụng phương pháp số hạng hấp thụ Δ_{1j} Ω để khử phân kỳ và xem xét ở dạng không thứ nguyên, chúng tôi thu được biểu thức năng lượng Casimir

$$\mathcal{E}_{Cj} = \int_0^\infty dx \frac{\rho_j(x, \bar{L}_j)}{e^{2\pi x} - 1}, \quad (3.52)$$

với $\rho_j(x, \bar{L}_j)$ là mật độ hàm trạng thái của thành phần thứ j , nó có dạng

$$\rho_j(x, \bar{L}_j) = \begin{cases} -\frac{g_{jj}n_{j0}}{8\pi\bar{L}_j^4\xi_j^2} \left[x\sqrt{\bar{L}_j^2\phi_j^2 - x^2} (2x^2 - \bar{L}_j^2\phi_j^2) + \bar{L}_j^4\phi_j^4 \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{\bar{L}_j^2\phi_j^2 - x^2}} \right) \right], & \text{khi } 0 \leq x < \bar{L}_j\phi_j; \\ -\frac{g_{jj}n_{j0}\phi_j^4}{16\xi_j^4}, & \text{khi } x \geq \bar{L}_j\phi_j. \end{cases} \quad (3.53)$$

Do đó, biểu thức lực Casimir thu được

$$F_C = \sum_{j=1,2} \frac{g_{jj}n_{j0}}{2\pi^2\xi_j^2\bar{L}_j^5} \int_0^{\bar{L}_j\phi_j} \frac{x^3 \sqrt{\bar{L}_j^2\phi_j^2 - x^2}}{e^{2\pi x} - 1} dx. \quad (3.55)$$

Từ biểu thức (3.55), chúng tôi nhận thấy rằng, lực Casimir của BEC hai thành phần không đơn giản chỉ là sự chồng chất của lực Casimir gây ra bởi từng thành phần đơn lẻ. Sự tương tác giữa hai hạt khác loại với cường độ g_{12} có mặt trong ϕ_j . Ta có thể thấy rằng, lực Casimir bao gồm hiệu ứng của kích thước hữu hạn và lực đẩy giữa các hạt. Phương trình này cho thấy rằng:

- Đối với hệ Bose lý tưởng $g_{jj} = 0$, lực Casimir bị biến mất như trong các nghiên cứu của S. Biswas với BEC một thành phần.

- Trong trường hợp không có tương tác khác loại thì $g_{12} = 0$, hệ biểu hiện như trong BEC một thành phần. Trong trường hợp này các tham số trật tự không phụ thuộc vào g_{12} , điều này dẫn đến hàm truyền nghịch đảo và thế nhiệt động cũng không phụ thuộc vào g_{12} .

- Trong giới hạn phân tách mạnh $g_{12} \rightarrow \infty$, hai tham số trật tự chỉ giao nhau và triệt tiêu ở bề mặt phẳng song song với hai tấm giới hạn của hệ. Vì ta

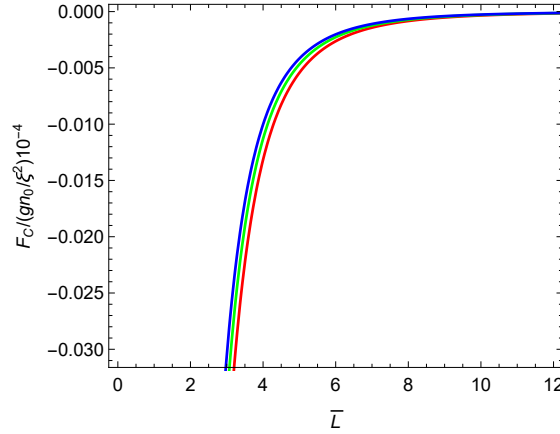
chỉ xem xét sự kích thích năng lượng thấp, nên ta có thể xem lực hút gây ra bởi thăng giáng lượng tử và lực đẩy giữa hai hạt khác loại là như nhau trong giới hạn phân tách mạnh. Về mặt vật lý, trong giới hạn phân tách mạnh, tương tác đẩy giữa các hạt ở hai thành phần khác nhau làm cho mật độ ngưng tụ ở mặt phân tách hai thành phần bằng không và tại đây không còn thăng giáng mật độ hạt nên lực Casimir bị triệt tiêu.

Bây giờ ta đi xem xét lực Casimir trong giới hạn khoảng cách lớn. Ta có năng lượng Casimir được viết lại

$$\mathcal{E}_{Cj} = -\frac{m_j^3 c_j^2}{360\pi\hbar^2} \left(\frac{\phi_j}{\bar{L}_j^3} - \frac{1}{7\phi_j \bar{L}_j^5} \right). \quad (3.58)$$

Lực Casimir thu được trong giới hạn này là

$$F_C \approx \frac{1}{720\pi^2\hbar^2} \sum_{j=1,2} m_j^3 c_j^2 \left(\frac{3\phi_j}{\bar{L}_j^4} - \frac{5}{7\phi_j \bar{L}_j^6} \right). \quad (3.59)$$

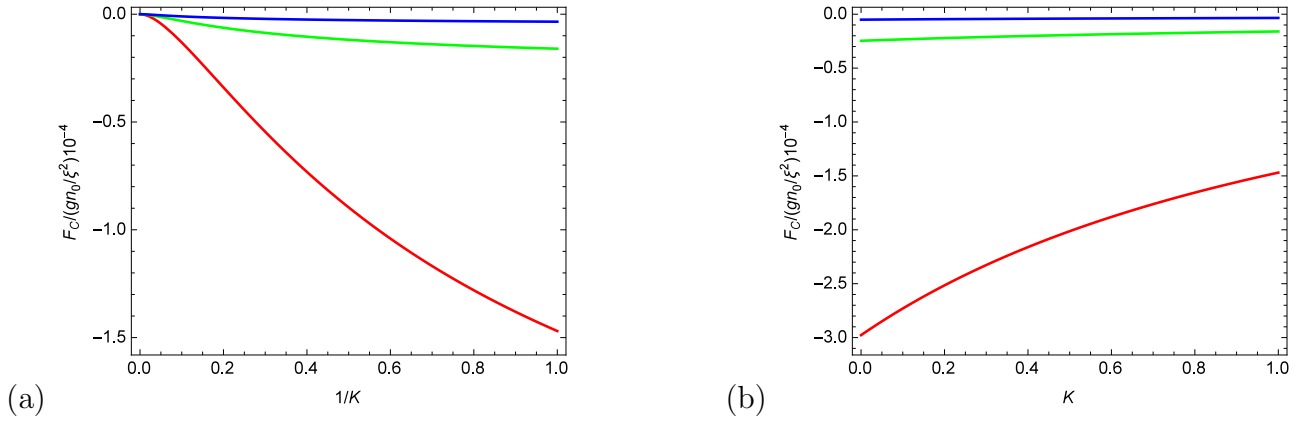


Hình 3.8: Sự phụ thuộc của lực Casimir vào khoảng cách \bar{L} tại $K = 0.5$ (đường màu đỏ), $K = 1$ (đường màu xanh lá) và $K = 1.5$ (đường màu xanh lam).

Từ đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của lực Casimir theo khoảng cách, chúng tôi thấy rằng, về cơ bản có sự tương tự với lực Casimir trong hệ BEC một thành phần. Điểm khác biệt nổi bật là lực này bị triệt tiêu trong trường hợp hệ bị phân tách mạnh hoàn toàn, một kết quả chưa từng có trong các nghiên cứu trước đây. Kết quả này được kiểm chứng trong Hình 3.9 là đồ thị biểu diễn sự phụ thuộc của lực Casimir theo $1/K$ (Hình 3.9a) với trường hợp không trộn lẫn và K với trường hợp trộn lẫn (Hình 3.9b). Nó cũng cho thấy, với sự phân tách mạnh hoàn toàn $K \rightarrow \infty$ thì lực Casimir tiến tới không.

3.2.2. Nghiên cứu trong gần đúng hai vòng

Với mục đích khảo sát hiệu ứng kích thước hữu hạn của hệ BEC hai thành phần và kiểm chứng các kết quả thu được trong gần đúng một vòng. Chúng tôi



Hình 3.9: Sự phụ thuộc của lực Casimir vào tham số tương tác tại $L = 1$ (đường màu đỏ), $L = 2$ (đường màu xanh lá) và $L = 3$ (đường màu xanh lam).

tiếp tục nghiên cứu hệ BEC hai thành phần trong gần đúng bậc cao hơn (gần đúng hai vòng) bằng cách sử dụng phương pháp tác dụng hiệu dụng CJT.

Bằng hình thức tương tự như trong Chương 2, chúng tôi thu được các phương trình khe và phương trình SD mô tả trạng thái của hệ BEC hai thành phần ở dạng không thứ nguyên

$$\begin{aligned}
-1 + \phi_1^2 + K\phi_2^2 + \frac{m_1 g_{11} \mathcal{M}_1}{24\hbar^2 \ell} + K \frac{m_2 g_{22} \mathcal{M}_2}{24\hbar^2 \ell} &= 0, \\
-1 + \phi_2^2 + K\phi_1^2 + \frac{m_2 g_{22} \mathcal{M}_2}{24\hbar^2 \ell} + K \frac{m_1 g_{11} \mathcal{M}_1}{24\hbar^2 \ell} &= 0, \\
-1 + 3\phi_1^2 + K\phi_2^2 + 3 \frac{m_1 g_{11} \mathcal{M}_1}{24\hbar^2 \ell} + K \frac{m_2 g_{22} \mathcal{M}_2}{24\hbar^2 \ell} &= \mathcal{M}_1^2, \\
-1 + 3\phi_2^2 + K\phi_1^2 + 3 \frac{m_2 g_{22} \mathcal{M}_2}{24\hbar^2 \ell} + K \frac{m_1 g_{11} \mathcal{M}_1}{24\hbar^2 \ell} &= \mathcal{M}_2^2.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

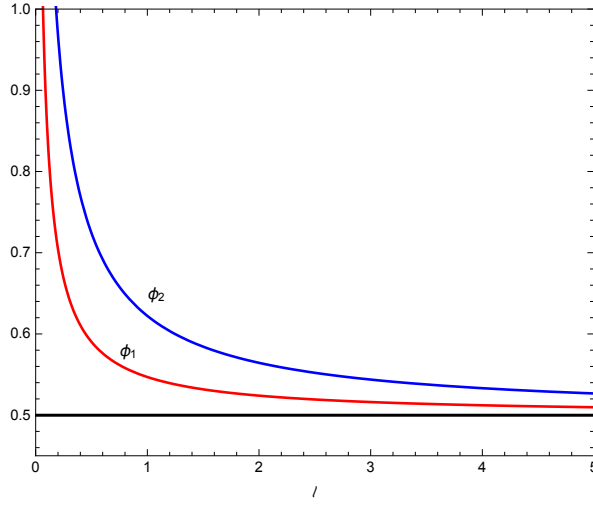
Kết quả là, chúng tôi thu được các tham số trật tự và khối lượng hiệu dụng ở dạng không thứ nguyên

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1^2 = \mathcal{M}_2^2 &= \frac{2}{K+1}, \\
\phi_1^2 &= \frac{1}{K+1} + \frac{g_{11} m_1}{12\hbar^2 \ell \sqrt{2(K+1)}}, \\
\phi_2^2 &= \frac{1}{K+1} + \frac{g_{22} m_2}{12\hbar^2 \ell \sqrt{2(K+1)}}.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

So sánh với kết quả tham số trật tự trong gần đúng một vòng, chúng tôi thấy rằng sự co lại của không gian có ảnh hưởng đáng kể đến các tham số trật tự, đặc biệt trong vùng khoảng cách là nhỏ, trong khi với gần đúng một vòng thì tham số trật tự là độc lập với khoảng cách. Ta có thể viết lại tham số trật tự dưới dạng $\phi_j^2 = \phi_{j1}^2 + \Delta\phi_j^2$ với số hạng bổ chính

$$\Delta\phi_j^2 = \frac{m_j g_{jj}}{12\hbar^2 \ell \sqrt{2(K+1)}}. \tag{3.78}$$

Từ biểu thức (3.78), ta thấy rằng số hạng bổ chính sẽ biến mất khi l đủ lớn hoặc với hệ BEC lý tưởng.



Hình 3.10: Sự phụ thuộc của các tham số trật tự không thứ nguyên và khoảng cách l cho Rubidium (đường màu đỏ) và Caesium (đường màu xanh).

Trên Hình 3.10 là đồ thị biểu diễn tham số trật tự như một hàm của khoảng cách cho các hỗn hợp BEC hai thành phần gồm rubidium 87 và caesium 133. Các đường màu đỏ và màu xanh tương ứng với rubidium và caesium; đường màu đen biểu thị giá trị $1/(K + 1)$ là giá trị trong gần đúng một vòng. Con số này xác nhận các tính toán trên, đồng thời cũng cho thấy sự khác biệt kết quả giữa gần đúng hai vòng và gần đúng một vòng.

Khi đó, năng lượng Casimir trên một đơn vị thể tích ở dạng không thứ nguyên có dạng

$$\mathcal{E}_{Cj} = -\frac{g_{jj}n_{j0}\xi_j\pi^2\mathcal{M}_j}{1440l}. \quad (3.79)$$

Từ kết quả trong (3.76), chúng tôi thấy rằng, khối lượng hiệu dụng không thứ nguyên không phụ thuộc vào khoảng cách. Lực Casimir được viết lại dưới dạng

$$F_C = -\frac{\hbar\pi^2}{480l^4\sqrt{K+1}} \sum_{j=1,2} v_j. \quad (3.80)$$

Biểu thức (3.80) khẳng định kết quả lực Casimir trong gần đúng một vòng ở phần trên. Nó cho thấy rằng lực Casimir của BEC hai thành phần không đơn giản chỉ là sự chồng chất của một trong hai thành phần vì sự có mặt của hằng số tương tác g_{12} trong tham số K . Bên cạnh đó, kết quả trên cũng cho thấy lực Casimir bị triệt tiêu trong giới hạn của sự phân tách mạnh $K \rightarrow \infty$, điều này trùng với kết quả thu được trong gần đúng một vòng.

Kết luận

Trong luận án này, trên cơ sở sử dụng lý thuyết GP trong gần đúng DPA, phương pháp tác dụng hiệu dụng CJT trong gần đúng một vòng và hai vòng, chúng tôi nghiên cứu hiệu ứng Casimir trong hệ BEC một thành phần và hai thành phần. Nhiều kết quả quan trọng đã thu được trong khuôn khổ luận án này. Sau đây, chúng tôi điểm lại những kết quả quan trọng nhất.

1. Với BEC một thành phần, khi nghiên cứu trong CE ta thấy:
 - Khi khoảng cách giữa các tường cứng tăng lên, độ lớn lực Casimir giảm dần theo quy luật lũy thừa bán nguyên của khoảng cách giữa hai tường cứng;
 - Luôn tồn tại một giá trị của khoảng cách giữa hai tường cứng mà ở đó lực Casimir toàn phần bị triệt tiêu. Điều này xảy ra khi khoảng cách giữa hai tường cứng thỏa mãn công thức (2.58). Đây là một kết quả quan trọng, về mặt khoa học, nó định hướng cho các nghiên cứu thực về hiệu ứng Casimir trong hệ BEC một thành phần. Trong công nghệ, khi muốn giảm thiểu ảnh hưởng của lực tương tác giữa các biên giới hạn của một linh kiện điện tử cũng như ảnh hưởng giữa các linh kiện trong cùng một thiết bị thì các nhà thiết kế, chế tạo có thể chọn khoảng cách này. Kết quả này cũng rất quan trọng trong lĩnh vực vật liệu nano khi BEC được đưa vào ứng dụng như những vật liệu khác trong các công trình nghiên cứu vào năm 2001 của H. Chan và F. Serry năm 1998.
2. Với BEC hai thành phần, lực Casimir bị triệt tiêu trong trường hợp phân tách hoàn toàn. Kết quả này có ý nghĩa lớn trong việc nghiên cứu và đưa BEC vào ứng dụng như đã trình bày ở trên.
3. Khi nghiên cứu ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước hữu hạn trong hệ BEC một và hai thành phần ta không nên bỏ qua đóng góp của các giản đồ bậc cao trong Lagrange tương tác.

Các kết quả nghiên cứu của luận án là đáng tin cậy, đã được công bố trên ba tạp chí quốc tế uy tín *Journal of Statistical Physics*, *International Journal of Modern Physics B* và *Journal of Experimental and Theoretical Physics*.

Danh sách các công trình công bố kết quả nghiên cứu của luận án

1. N. V. Thu, L. T. Theu (2017), "Casimir Force of Two-Component Bose–Einstein Condensates Confined by a Parallel Plate Geometry", *Journal of Statistical Physics* **168**, 1.
2. N. V. Thu, L. T. Theu (2019), "Finite-size effect on Bose–Einstein condensate mixtures in improved Hartree–Fock approximation", *International Journal of Modern Physics B* **33**, 1950114.
3. N. V. Thu, L. T. Theu (2018), "Influence of the Finite Size Effect on Properties of a Weakly Interacting Bose Gas in Improved Hatree-fock Approximation", *VNU Journal Of Science: Mathematics - Physics* **34**, 3.
4. L. T. Theu, N. V. Thu (2018), "Casimir force on a single interacting Bose-Einstein condensate in the Double-Parabola Approximation", *HNUE JOURNAL OF SCIENCE: Natural Sciences* **6**, 66.
5. N. V. Thu, L.T. Theu, D. T. Hai (2020), "Casimir and surface forces on a single Bose-Einstein condensate in canonical ensemble", *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **130**, 321.