

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

PHẠM THANH TUẤN

TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ TÍNH CHÍNH QUY NGHIỆM
CHO PHƯƠNG TRÌNH KIỂU RAYLEIGH-STOKES
NỬA TUYẾN TÍNH

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số: 9 46 01 02

Người hướng dẫn khoa học : PGS.TS Trần Đình Kế
TS Trần Văn Bằng

Vĩnh Phúc, 2025

MỞ ĐẦU

1. Tổng quan về vấn đề nghiên cứu và lí do chọn đề tài

Xét phương trình tiến hoá sau:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial}{\partial t} \Delta u - \Delta u = f. \quad (1)$$

Phương trình (1) là mô hình của nhiều bài toán thực tế. Tùy theo từng bài toán, ta gọi nó là phương trình giả parabolic, phương trình khuếch tán dạng không cổ điển, phương trình tiến hoá kiểu Sobolev, ... Phương trình này được dùng để mô hình hoá nhiều bài toán trong vật lý, ví dụ để mô tả và nghiên cứu các dòng bậc hai (xem Coleman (1960)). Phương trình này cũng là phương trình năng lượng trong lý thuyết hai nhiệt lượng (xem Chen (1968)) và mô tả quá trình lan truyền sóng dài phân tán (xem Benjamin (1972)).

Trong phương trình (1), nếu thay $\frac{\partial}{\partial t} \Delta u$ bởi $\partial_{t,\alpha} \Delta u$, ta có phương trình sau:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \partial_{t,\alpha} \Delta u - \Delta u = f, \quad (2)$$

với $\partial_{t,\alpha}$ là toán tử đạo hàm phân thứ kiểu Riemann-Liouville có biểu thức như sau:

$$\partial_{t,\alpha} v(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{1}{(t-\zeta)^\alpha \Gamma(1-\alpha)} v(\zeta) d\zeta, \alpha \in (0, 1),$$

khi đó (2) được gọi là phương trình Rayleigh-Stokes. Trong giai đoạn gần đây, các mô hình bài toán gắn với phương trình Rayleigh-Stokes thu hút nhiều sự chú ý khi được dùng để mô tả một số loại chất lỏng phi Newton (chất lỏng không tuân theo các định luật Newton), trong đó thành phần đạo hàm $\partial_{t,\alpha}$ mô tả tính nhớt-dàn hồi của chất lỏng (xem Bazhlekova (2015), Fetecau (2009)). Một cách tổng quát, với $k \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^+)$ là một hàm không âm ta có phương trình sau gọi là phương trình Rayleigh-Stokes suy rộng:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \mathfrak{D}_{t,\{k\}} \Delta u - \Delta u = f, \quad (3)$$

trong đó $\mathfrak{D}_{t,\{k\}}$ là toán tử đạo hàm dạng không địa phương kiểu Riemann-Liouville có biểu thức như sau:

$$\mathfrak{D}_{t,\{k\}} u(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t k(t-\zeta) u(\zeta) d\zeta,$$

ở đây hàm k còn được gọi là hàm nhân. Phương trình (3) là mô hình tổng quát cho nhiều bài toán. Thật vậy, trong trường hợp k là hằng số, (3) là phương trình mô tả hiện tượng khuếch tán cổ điển. Nếu k đủ chính quy, ví dụ như $k \in C^1(\mathbb{R}^+)$ thì ta có

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \Delta u - \int_0^t b(t-\zeta) \Delta u(\zeta) d\zeta = f,$$

với $a = 1 + m(0)$ và $b(t) = m'(t)$, đây cũng là phương trình mô tả hiện tượng khuếch tán nhưng ở dạng không cổ điển. Dễ thấy rằng khi $k(t) = \frac{\gamma t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ thì ta được phương trình (2).

Khi khảo sát bài toán đối với phương trình Rayleigh-Stokes tuyến tính, nghiên cứu về nghiệm tường minh (*exact solution*) có thể được tìm thấy trong bài báo Fetecau (2009), trong đó các tác giả xét một loại chất lỏng

vừa có tính chất nhớt, vừa có tính chất đàn hồi được gọi là chất lỏng Oldroyd-B suy rộng. Bằng công cụ biến đổi Fourier và biến đổi Laplace, nghiệm tường minh u của bài toán đã được tìm ra. Một số kết quả khác liên quan tới việc tìm nghiệm tường minh cho phương trình Rayleigh-Stokes có thể được tìm thấy trong Shen (2006), Zierep (2007), Xue (2009) và Khan (2009).

Do tính phức tạp của biểu diễn nghiệm tường minh, vấn đề tìm lược đồ giải số cho các bài toán gắn với phương trình Rayleigh-Stokes được đặt ra. Trong bài báo Bazhlekova (2015), mô hình chất lỏng bậc hai được xét trong $\mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) có dạng:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \gamma \partial_{t,\alpha} \Delta u &= f \text{ trong miền } \Sigma \subset \mathbb{R}^d \text{ khi } 0 < t \leq T; \\ u &= 0 \text{ trên biên } \partial \Sigma \text{ khi } 0 < t \leq T; \\ u(\cdot, 0) &= v \text{ trong miền } \Sigma,\end{aligned}$$

trong đó $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ là đa diện lồi, $\gamma > 0$ là hằng số, v là điều kiện ban đầu, ∂_t^α là đạo hàm phân thứ kiểu Riemann-Liouville đã đề cập ở trên. Trong bài báo này, với trường hợp $f \equiv 0$, nghiệm của bài toán được biểu diễn qua toán tử giải thức $S(t)$ và tính chính quy của nghiệm được khảo sát. Thêm vào đó, bài báo cũng bao gồm việc xây dựng một phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin (*Galerkin FEM*) nửa rời rạc (chỉ rời rạc hoá theo biến không gian) và các đánh giá sai số tối ưu ứng với tính chính quy của dữ liệu ban đầu (xét cả trường hợp dữ liệu ban đầu trơn hoặc không trơn). Ngoài ra, hai lược đồ hoàn toàn rời rạc dựa trên phương pháp Euler ngược và phương pháp sai phân ngược bậc hai cũng được phát triển cùng với đánh giá sai số tối ưu cho cả trường hợp dữ kiện đầu trơn và không trơn. Kết quả giải số cho trường hợp một chiều và hai chiều được đưa ra để minh hoạ cho tính hiệu quả và kiểm chứng sự hội tụ của các phương pháp đó. Đã có nhiều công trình giải số các bài toán đặt ra với phương trình Rayleigh-Stokes, có thể tham khảo thêm trong Bi (2018), Chen (2013), Chen (2008), Salehi (2018), Zaky (2018).

Khi xét bài toán với dữ liệu ban đầu được cho trước đối với phương trình Rayleigh-Stokes dạng phi tuyến, vấn đề tìm nghiệm tích phân (*mild solution*) cùng mức độ chính quy và sự ổn định của nghiệm tích phân đã được khảo sát trong Lan (2022), với mô hình sau:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \gamma \partial_{t,\alpha} \Delta u &= f(u) \text{ trong miền } \Sigma \text{ khi } t > 0, \\ u &= 0 \text{ trên biên } \partial \Sigma \text{ khi } t \geq 0, \\ u(0) &= \xi \text{ trong miền } \Sigma,\end{aligned}$$

trong đó $0 < \alpha < 1$, $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$. Trong bài báo này, về tính giải được, tác giả đã chứng minh được định lý về sự tồn tại nghiệm tích phân. Về tính chính quy của nghiệm, tác giả đã chứng minh rằng khi đáp ứng được các điều kiện phù hợp, nghiệm tích phân trở thành nghiệm mạnh. Ngoài ra việc khi nào nghiệm ổn định tiệm cận hay hội tụ đến điểm cân bằng cũng được khảo sát. Cuối cùng tác giả xét trường hợp $\alpha = 1$ (*limiting case*) để đối sánh với các kết quả ở trên, trong trường hợp này toán tử giải thức không có hiệu ứng trơn (*smoothing effect*) như trong trường hợp $\alpha \in (0, 1)$. Các kết quả định tính về nghiệm tích phân cho bài toán dữ kiện ban đầu với phương trình Rayleigh-Stokes dạng phi tuyến có thể được tham khảo thêm trong Zhou (2021) và Luc (2021). Bài toán dữ kiện ban đầu cũng có thể được xét với phương trình Rayleigh-Stokes dạng tổng quát như trong bài báo Ke (2022):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(k * (-\Delta)^\sigma u) - \Delta u &= f(u) \text{ trong miền } \Sigma \text{ khi } t > 0, \\ u &= 0 \text{ trên biên } \partial \Sigma \text{ khi } t \geq 0, \\ u(\cdot, 0) &= \xi \text{ trong miền } \Sigma,\end{aligned}$$

trong đó $(k * v)(t) = \int_0^t k(t - \zeta)v(\zeta)d\zeta$, $(-\Delta)^\sigma$ là ký hiệu của toán tử Laplace lũy thừa phân thứ, $\sigma \in [0, 1]$, $\xi \in L^2(\Sigma)$. Trong trường hợp $\sigma = 1$ và $k(t) = \frac{m_0 t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}$, $m_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$, ta được phương trình Rayleigh-Stokes. Bài báo nghiên cứu sự tồn tại nghiệm tích phân và mức độ chính quy của nghiệm, đồng thời chỉ ra điều

kiện thích hợp để nghiệm tích phân trở thành nghiệm mạnh. Các tác giả cũng khảo sát các vấn đề liên quan đến tính ổn định của nghiệm như tính ổn định tiệm cận, tính tiêu hao, và sự hội tụ đến điểm cân bằng.

Trong phương trình đạo hàm riêng không địa phương, bài toán ngược là một vấn đề thú vị được các nhà toán học dành sự quan tâm lớn. Khi xét bài toán ngược cho phương trình Rayleigh-Stokes chúng tôi quan tâm đến bài toán xác định tham số và bài toán giá trị cuối. Trong bài toán xác định tham số, tình huống đặt ra là xuất hiện tham số trong phương trình chưa được xác định, do vậy để tìm tham số đó và nghiệm tương ứng của hệ ta cần có thêm những điều kiện đo bổ sung. Trong trường hợp xét phương trình Rayleigh-Stokes tuyến tính, bài báo Triet (2018) quan tâm tới mô hình:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \gamma \partial_{t,\alpha} \Delta u &= F(x, t), \text{ với } (x, t) \in \Sigma \times (0, T), \\ u(x, t) &= 0 \text{ khi } x \in \partial \Sigma, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \text{ khi } x \in \Sigma,\end{aligned}$$

trong đó thành phần $F(x, t)$ chưa xác định được, bởi vậy cần thêm điều kiện quan sát liên quan đến nhiễu âm (*noise*). Bài báo giới thiệu một vài khái niệm trên mô hình ngẫu nhiên Gauss (*Gaussian random model*) và sử dụng phương pháp lọc tổng quát để xây dựng nghiệm chính quy hoá cùng các đánh giá về mức độ hội tụ của phương pháp đó.

Trong bài toán giá trị cuối, điều kiện ban đầu không quan sát được, thay vào đó là điều kiện ở thời điểm cuối, và dựa trên quan sát ở thời điểm cuối ta cần tìm các trạng thái trước thời điểm đó của hệ. Bài toán giá trị cuối cho lớp phương trình (2) đã được xét đến trong bài báo Luc (2019):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \gamma \partial_{t,\alpha} \Delta u &= F(x, t), (x, t) \in \Sigma \times (0, T), \\ u(x, t) &= 0, x \in \partial \Sigma, \\ u(x, T) &= f(x), x \in \Sigma,\end{aligned}$$

trong đó $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$. Kết quả chính của bài báo này là xây dựng công thức biểu diễn nghiệm của bài toán giá trị cuối và chỉ ra được nghiệm là chính quy Hölder qua các đánh giá. Một số kết quả đạt được khi về phải của phương trình Rayleigh-Stokes chứa hàm trạng thái u (ví dụ như $G(x, t, u)$) có thể được tham khảo thêm trong Ngoc (2021), Tuan (2019).

Vấn đề được luận án đặt ra đầu tiên là tìm các giả thiết phù hợp để nghiệm tích phân tồn tại và khảo sát sự ổn định, mức độ chính quy của nghiệm tích phân đối với các lớp phương trình phi tuyến dạng (2).

Cụ thể, ta đặt ra mục tiêu phát triển kết quả của bài báo Lan (2022) cho trường hợp thành phần phi tuyến ở về phải chứa trễ. Xét bài toán

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \gamma \partial_{t,\alpha} \Delta u &= f(t, u_\theta) \text{ trong miền } \Sigma \subset \mathbb{R}^d \text{ khi } t > 0, \\ u &= 0 \text{ trên biên } \partial \Sigma \text{ khi } t \geq 0, \\ u(x, \zeta) &= \phi(x, \zeta) \text{ khi } x \in \Sigma, \zeta \in [-\tau, 0],\end{aligned}$$

trong đó $\gamma > 0$, $\alpha \in (0, 1)$. Trong mô hình này, u_θ được cho bởi $u_\theta(x, t) = u(x, t - \theta(t))$ với θ là một hàm liên tục trên $(0, +\infty)$ thỏa mãn $-\tau \leq t - \theta(t) \leq t$ và $t - \theta(t) \rightarrow +\infty$ khi $t \rightarrow +\infty$, $f : (0, +\infty) \times L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Sigma)$ là ánh xạ phi tuyến và ϕ là hàm được cho trước thuộc không gian $C([-\tau, 0]; L^2(\Sigma))$. Thành phần phi tuyến f có chứa trễ và đại diện cho ngoại lực, thành phần này phụ thuộc vào trạng thái lịch sử của hệ. Một ví dụ điển hình cho thành phần trễ là $\theta(t) = (1 - a)t + \tau$, khi đó $u_\theta(x, t) = u(x, at - \tau)$ với $a \in (0, 1]$, kiểu trễ này được gọi là trễ tỉ lệ.

Trong phương trình đạo hàm riêng, việc xuất hiện trễ là tự nhiên và phù hợp khi ta muốn mô tả các quá trình thực tế. Qua tìm hiểu của chúng tôi, các nghiên cứu về đáng điệu tiệm cận nghiệm đối với phương trình (2) chứa trễ chưa được công bố. Với động lực đó, chúng tôi đặt ra mục tiêu tìm hiểu về tính giải được cùng với các tính chất về sự ổn định của nghiệm bài toán, cụ thể là:

- Khảo sát sự tồn tại nghiệm tích phân khi thành phần f ở vế phải có tăng trưởng trên hoặc dưới tuyến tính.
- Khảo sát tính tiêu hao của hệ và tìm điều kiện để nghiệm không của hệ ổn định tiệm cận.
- Khảo sát sự tồn tại của các nghiệm có tính chất phân rã.

Khi đề cập tới phương trình (3), chúng tôi quan tâm đến bài toán xác định tham số và bài toán giá trị cuối.

Nếu vế phải của phương trình (3) được thay bằng $a(x)b(t) + g(u)$, trong đó $g(u)$ là nhiễu phi tuyến còn $a(x)b(t)$ là ngoại lực được viết dưới dạng tách biến, trong đó có thành phần $a(x)$ cần xác định thì ta có bài toán xác định tham số sau:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \mathfrak{D}_{t,\{k\}} \Delta u &= a(x)b(t) + g(u) \text{ trong miền } \Sigma \text{ khi } t \in (0, T), \\ u &= 0 \text{ trên biên } \partial \Sigma, \text{ khi } t \geq 0, \\ u(0) &= \phi \text{ trong miền } \Sigma, \\ u(T) &= \xi(u) \text{ trong miền } \Sigma,\end{aligned}$$

trong đó $u(t)$ nhận giá trị trong $L^2(\Sigma)$, b , g , ξ và ϕ sẽ được cho trước.

Bài toán này được đặt ra trong tình huống thành phần ngoại lực $a(x)b(t)$ chứa $a(x)$ chưa xác định được qua quan sát. Hơn nữa còn tồn tại nhiễu là hàm phi tuyến mà ta kí hiệu là hàm g . Để xác định a , ta cần điều kiện đo đặc ở thời điểm cuối $u(T) = \xi(u)$, điều kiện này cho thấy dữ liệu đo đặc có thể ở dạng ẩn. Theo hiểu biết của chúng tôi, chưa có công bố về vấn đề xác định thành phần ngoại lực cho bài toán Rayleigh-Stokes với nhiễu phi tuyến. Mục tiêu đặt ra đối với bài toán này là:

- Tìm điều kiện để nghiệm tích phân tồn tại và ổn định.
- Tìm điều kiện để nghiệm tích phân trở thành nghiệm mạnh (*strong solution*).

Để ý rằng thành phần nhiễu phi tuyến và điều kiện đo ở thời điểm cuối ở dạng ẩn đã gây nên nhiều khó khăn khi giải quyết bài toán, đây cũng là một động lực quan trọng để thúc đẩy nghiên cứu cho bài toán này.

Bài toán cho dữ liệu đo ở thời điểm cuối với phương trình (3) có dạng

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \mathfrak{D}_{t,\{k\}} \Delta u &= g(u) \text{ trong miền } \Sigma, \text{ khi } t \in (0, T), \\ u &= 0 \text{ trên biên } \partial \Sigma, \text{ khi } t > 0, \\ u(T, \cdot) &= \xi \text{ trong miền } \Sigma,\end{aligned}$$

ở đây hàm u trên $(0, T] \times \Sigma$ cần được xác định khi cho trước hàm g . Điều kiện ở thời điểm cuối $u(T, \cdot) = \xi$ thường được đặt ra khi ta không có quan sát ở thời điểm ban đầu.

Bài toán giá trị cuối đã được xét đối với phương trình dạng Rayleigh-Stokes phi tuyến trong các bài báo Ngoc (2021), Tuan (2019), trong đó g là hàm theo u và nhận giá trị trong $L^2(\Sigma)$. Tuy nhiên nếu $g(u)$ có biểu diễn dạng đa thức, ví dụ như $g(u) = |u|^q$ với $q > 1$ thì với giả thiết $u \in L^2(\Sigma)$ ta không kết luận được $g(u) \in L^2(\Sigma)$. Khi đó ta sẽ giả sử $g(u)$ thuộc $\mathbb{H}^{-\theta}$ với $\theta > 0$ (các không gian $\mathbb{H}^q$, $q \in \mathbb{R}$ là các thang Hilbert sẽ được định nghĩa cụ thể ở phần sau). Mục tiêu đặt ra đối với bài toán này là:

- Tìm điều kiện để nghiệm tích phân tồn tại.
- Tìm điều kiện để nghiệm tích phân là chính quy Hölder theo biến thời gian.

Để ý rằng do $g(u)$ nhận giá trị trong không gian đối ngẫu nên không có đánh giá trực tiếp cho tính liên tục Hölder của nghiệm.

Dựa vào những ý kiến phân tích trên, chúng tôi nghiên cứu và hoàn thiện luận án với tên gọi: “*Tính ổn định và tính chính quy nghiệm cho phương trình kiểu Rayleigh-Stokes nửa tuyến tính*”.

2. Mục đích - Đối tượng - Phạm vi nghiên cứu của luận án

2.1. Mục đích nghiên cứu

Luận án nghiên cứu nghiệm tích phân cho các bài toán thuận và ngược tương ứng với phương trình dạng (2) và (3), cụ thể là sự tồn tại nghiệm và một số tính chất (định tính) của nghiệm.

2.2. Đối tượng nghiên cứu

Các vấn đề đặt ra với phương trình Rayleigh-Stokes và phương trình Rayleigh-Stokes suy rộng.

2.3. Phạm vi nghiên cứu

Phạm vi nghiên cứu của luận án bao gồm:

- Sự tồn tại và tính ổn định của nghiệm tích phân khi xét bài toán Cauchy đối với phương trình Rayleigh-Stokes có chứa thành phần trễ.
- Sự tồn tại nghiệm tích phân, tính ổn định của nghiệm và mức độ chính quy của nghiệm khi xét bài toán xác định tham số (tham số cần các định xuất hiện trong thành phần ngoại lực) đối với phương trình Rayleigh-Stokes suy rộng với điều kiện đo bổ sung.
- Tính giải được (duy nhất), tính chất chính quy Hölder theo biến thời gian của nghiệm tích phân khi xét bài toán giá trị cuối đối với phương trình Rayleigh-Stokes suy rộng.

3. Phương pháp nghiên cứu

Để phục vụ cho quá trình nghiên cứu, luận án đã sử dụng một số công cụ sau: lý thuyết về các hàm dương hoàn toàn, về giải thức, về các bất đẳng thức có dạng Grönwall và Halanay, về các thang Hilbert (cùng mối liên hệ tới các không gian Sobolev phân thứ) và các định lý điểm bất động.

4. Cấu trúc và kết quả của luận án

Nội dung chính của luận án được chia làm bốn chương:

- Chương 1: *Kiến thức chuẩn bị.*
- Chương 2: *Bài toán Cauchy cho phương trình Rayleigh-Stokes chứa trễ.*
- Chương 3: *Bài toán xác định nguồn cho phương trình Rayleigh-Stokes suy rộng chứa nhiều phi tuyến.*
- Chương 4: *Bài toán giá trị cuối cho phương trình Rayleigh-Stokes suy rộng với phần phi tuyến nhận giá trị yếu.*

5. Ý nghĩa của các kết quả của luận án

Luận án đã đóng góp các kết quả mới trong việc khảo sát tính giải được, các tính chất ổn định và chính quy của nghiệm tích phân cho hướng nghiên cứu về phương trình đạo hàm riêng không địa phương, cụ thể là lớp phương trình phi tuyến kiểu Rayleigh-Stokes. Những kết quả chính được trình bày trong luận án đã được công bố trong 03 bài báo trên các tạp chí khoa học chuyên ngành (liệt kê trong mục “Danh mục công trình khoa học của tác giả liên quan đến luận án”). Các nội dung chính trong luận án đã được báo cáo tại:

- 1) Seminar bộ môn Giải tích, khoa Toán, trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2;
- 2) Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ X, năm 2023.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Các không gian hàm

Trong mục này, nghiên cứu sinh nhắc lại một số khái niệm về toán tử Laplace, phổ của toán tử Laplace, lũy thừa của toán tử Laplace, miền xác định của toán tử Laplace phân thứ, khái niệm về thang Hilbert và mối liên hệ giữa thang Hilbert và không gian Sobolev phân thứ.

1.2. Biến đổi Laplace và giải tích phân thứ

Mục này trình bày các khái niệm về phép biến đổi Laplace, phép biến đổi Laplace ngược, biến đổi Laplace của tích chập. Ngoài ra mục này còn trình bày khái niệm đạo hàm và tích phân phân thứ, công thức biến đổi Laplace của đạo hàm phân thứ cấp α .

1.3. Hàm giải thức và toán tử giải thức

Trong mục này, nghiên cứu sinh trình bày lại lý thuyết các hàm dương hoàn toàn, lý thuyết giải thức bao gồm các tính chất của hàm giải thức và toán tử giải thức, công thức biểu diễn nghiệm tích phân qua toán tử giải thức.

Với đối tượng nghiên cứu là nghiệm tích phân được biểu diễn qua giải thức, việc trang bị những kiến thức về hàm giải thức và toán tử giải thức là cần thiết. Để biểu diễn nghiệm tích phân cho bài toán ngược, trước tiên ta sẽ biểu diễn nghiệm tích phân cho bài toán thuận (bài toán dữ kiện ban đầu).

Xét bài toán dữ kiện ban đầu cho phương trình Rayleigh-Stokes tuyến tính:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \mathfrak{D}_{t,\{k\}} \Delta u = V \text{ trong } \Sigma, \text{ khi } t \in (0, T], \quad (1.1)$$

$$u = 0 \text{ trên } \partial\Sigma, \text{ khi } t \in [0, T], \quad (1.2)$$

$$u(0) = \phi \text{ trong } \Sigma, \quad (1.3)$$

trong đó $V \in C([0, T]; L^2(\Sigma))$.

Ta thấy $L^2(\Sigma)$ có cơ sở trực chuẩn $\{e_i\}_{i=1}^{+\infty}$ bao gồm các hàm riêng của toán tử $-\Delta$ ứng với điều kiện biên Dirichlet thuần nhất, tức là

$$-\Delta e_i = \lambda_i e_i \text{ trong miền } \Sigma, \quad e_i = 0 \text{ trên biên } \partial\Sigma,$$

trong đó $\{\lambda_i\}_{i=1}^{+\infty}$ là một dãy dương không giảm và tiến ra vô cùng khi $i \rightarrow +\infty$.

Khi đó, ta có các biểu diễn sau:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i(t)e_i, \quad V(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} V_i(t)e_i.$$

Theo (1.1) ta có

$$\begin{aligned} u'_i(t) + \lambda_i (1 + \mathfrak{D}_{t, \{k\}}) u_i(t) &= V_i(t), \\ u_i(0) &= \phi_i := \langle \phi, e_i \rangle. \end{aligned}$$

Xét bài toán giảm dư thuần nhất sau:

$$r'(t) + \lambda r(t) + \lambda \mathfrak{D}_{t, \{k\}} r(t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.4)$$

$$r(0) = 1, \quad (1.5)$$

ở đây hàm vô hướng r là thành phần chưa biết, tham số $\lambda > 0$.

Từ đó, ta có công thức nghiệm:

$$u(t) = \mathfrak{R}(t)\phi + \int_0^t \mathfrak{R}(t - \zeta)V(\zeta)d\zeta, \quad (1.6)$$

trong đó $\mathfrak{R}(t)$ có biểu diễn sau:

$$\mathfrak{R}(t)\phi = \sum_{i=1}^{+\infty} r(t, \lambda_i)\phi_i e_i, \quad \phi \in L^2(\Sigma). \quad (1.7)$$

Ta gọi $r(t, \lambda)$ là *hàm giải thức*, $\mathfrak{R}(t)$ là *toán tử giải thức*.

1.4. Các định lý điểm bất động

Mục này trình bày định lý điểm bất động Banach, định lý điểm bất động Schauder, định lý điểm bất động đối với ánh xạ nén.

Chương 2

BÀI TOÁN CAUCHY CHO PHƯƠNG TRÌNH RAYLEIGH-STOKES CHỨA TRỄ

Chương này tập trung vào bài toán Cauchy cho phương trình Rayleigh-Stokes phi tuyến có chứa thành phần trễ, nhằm khảo sát tính giải được và đáng điều nghiệm. Nhờ vào các đánh giá địa phương, lý thuyết điểm bất động và bất đẳng thức dạng Halanay, ta đạt được một số kết quả về sự tồn tại nghiệm và tính chất ổn định của nghiệm. Nội dung chương này dựa trên bài báo số 1 trong Danh mục công trình khoa học liên quan đến luận án.

2.1. Đặt bài toán

Cho miền bị chặn $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ với biên $\partial\Sigma$ trơn. Xét bài toán:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \gamma \partial_{t,\alpha} \Delta u = f(t, u_\theta) \text{ trong miền } \Sigma \text{ khi } t > 0, \quad (2.1)$$

$$u = 0 \text{ trên biên } \partial\Sigma \text{ khi } t \geq 0, \quad (2.2)$$

$$u(x, \zeta) = \phi(x, \zeta) \text{ khi } x \in \Sigma, \zeta \in [-\tau, 0], \quad (2.3)$$

trong đó $0 < \alpha < 1$, $\gamma > 0$, $\partial_{t,\alpha}$ là kí hiệu của đạo hàm phân thứ Riemann-Liouville cấp α , được cho bởi $\partial_{t,\alpha} v(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{1}{(t-\zeta)^{\alpha} \Gamma(1-\alpha)} v(\zeta) d\zeta$, với $t > 0$; $f : (0, +\infty) \times L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Sigma)$ là ánh xạ phi tuyến và $\phi \in C([-\tau, 0]; L^2(\Sigma))$ được cho trước.

Ta xét thành phần trễ u_θ có dạng $u_\theta(x, t) = u(x, t - \theta(t))$ với θ là liên tục trên $(0, +\infty)$ thoả mãn $t - \theta(t) \geq -\tau$ và $t - \theta(t) \leq t \forall t \in (0, +\infty)$, ngoài ra $t - \theta(t)$ tiến ra $+\infty$ khi $t \rightarrow +\infty$.

2.2. Xây dựng công thức nghiệm

Nghiệm tích phân của (2.1)-(2.3) được định nghĩa như bên dưới.

Định nghĩa 2.1. Cho ϕ là hàm thuộc không gian $C([-\tau, 0]; L^2(\Sigma))$. Khi đó ta gọi hàm u thuộc không gian $C([-\tau, T]; L^2(\Sigma))$ là nghiệm tích phân trên đoạn $[-\tau, T]$ của phương trình (2.1)-(2.3) khi và chỉ khi $u(\cdot, \zeta) = \phi(\cdot, \zeta)$ với $\zeta \in [-\tau, 0]$ và

$$u(\cdot, t) = \Re(t) \phi(\cdot, 0) + \int_0^t \Re(t - \zeta) f(\zeta, u_\theta(\cdot, \zeta)) d\zeta, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Các tính chất của $\Re(t)$ được trình bày qua bổ đề sau:

Bổ đề 2.1. Với T là số dương và $\forall \mathbf{v} \in L^2(\Sigma)$:

(a) $\mathfrak{R}(\cdot)\mathbf{v} \in C([0, T]; L^2(\Sigma))$, ngoài ra $\mathfrak{R}(\cdot)\mathbf{v} \in C((0, T]; \mathfrak{H}^2(\Sigma) \cap \mathfrak{H}_0^1(\Sigma))$.

(b) $\|\mathfrak{R}(t)\mathbf{v}\| \leq r(t, \lambda_1)\|\mathbf{v}\|$ và $\|\mathfrak{R}(t)\| \leq 1$ với mọi t không âm.

(c) $\mathfrak{R}(\cdot)\mathbf{v} \in C^{(n)}((0, T]; L^2(\Sigma))$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, và $\|\mathfrak{R}^{(n)}(t)\mathbf{v}\| \leq \frac{C}{t^n}\|\mathbf{v}\|$, trong đó hằng số $C > 0$.

(d) $\|\Delta \mathfrak{R}^{(n)}(t)\mathbf{v}\| \leq \frac{C}{t^{n+1-\alpha}}\|\mathbf{v}\|$ với mọi t dương và $n \in \mathbb{N}$.

2.3. Tính giải được và ổn định

Ta xét toán tử $\mathcal{V} : C([0, T]; L^2(\Sigma)) \rightarrow C([0, T]; L^2(\Sigma))$ được cho bởi

$$\mathcal{V}(h)(t) = \int_0^t \mathfrak{R}(t - \zeta)h(\zeta)d\zeta. \quad (2.4)$$

Bổ đề 2.2. Toán tử $\mathcal{V}$ được cho bởi (2.4) là toán tử compact.

Bổ đề 2.3. Cho hàm liên tục $\mathbf{v}$ nhận giá trị không âm và thoả mãn

$$\mathbf{v}(t) \leq r(t, \lambda)\mathbf{v}_0 + \int_0^t r(t - \zeta, \lambda)[d_1 \sup_{\eta \in [\zeta - \theta(\zeta), \zeta]} \mathbf{v}(\eta) + d_2(\zeta)]d\zeta \text{ khi } t > 0, \quad (2.5)$$

và

$$\mathbf{v}(\zeta) = \psi(\zeta) \text{ với } \zeta \in [-\tau, 0], \quad (2.6)$$

trong đó $0 < d_1 < \lambda$, $\psi \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^+)$ và $d_2 \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^+)$ là hàm nhận giá trị không giảm. Khi đó

$$\mathbf{v}(t) \leq \frac{\lambda}{\lambda - d_1} \left[\mathbf{v}_0 + \int_0^t r(t - \zeta, \lambda)d_2(\zeta)d\zeta \right] + \sup_{\zeta \in [-\tau, 0]} \psi(\zeta) \text{ với mọi } t \text{ dương.} \quad (2.7)$$

Ngoài ra nếu $r(\cdot, \lambda) * d_2$ bị chặn trên $(0, +\infty)$ thì

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{v}(t) \leq \sup_{(0, +\infty)} \int_0^t r(t - \zeta, \lambda)d_2(\zeta)d\zeta. \quad (2.8)$$

Trường hợp riêng nếu $d_2 = 0$ thì khi $t \rightarrow +\infty$ ta có $\mathbf{v}(t) \rightarrow 0$.

Tính giải được của bài toán (2.1)-(2.3) sẽ được chỉ ra trong các định lý tiếp theo.

Định lý 2.1. Cho $f : [0, T] \times L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Sigma)$ là một hàm liên tục và thoả mãn điều kiện sau:

(G1) $\|f(t, \mathbf{v})\| \leq \ell(t)\mathcal{O}(\|\mathbf{v}\|)$ với $0 \leq t \leq T$ và $\mathbf{v} \in L^2(\Sigma)$, trong đó $\ell \in L^1(0, T)$ nhận giá trị không âm và $\mathcal{O}$ là hàm liên tục, nhận giá trị không âm và thoả mãn

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(s)}{s} \cdot \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t r(t - \zeta, \lambda_1)\ell(\zeta)d\zeta < 1.$$

Khi đó ta có số δ dương sao cho bài toán (2.1)-(2.3) có ít nhất một nghiệm tích phân trên $[-\tau, T]$ với điều kiện $\|\Phi\|_\infty \leq \delta$.

Định lý 2.2. Cho $f : [0, T] \times L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Sigma)$ là ánh xạ liên tục thoả mãn

(G2) $\|f(t, \mathbf{v})\| \leq \ell(t)(1 + \|\mathbf{v}\|)$ với $0 \leq t \leq T$ và $\mathbf{v} \in L^2(\Sigma)$, trong đó hàm $\ell \in L^1(0, T)$ nhận giá trị không âm.

Khi đó bài toán (2.1)-(2.3) có nghiệm tích phân trên $[-\tau, T]$.

Định lí 2.3. Cho $f : [0, T] \times L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Sigma)$ là ánh xạ liên tục thoả mãn

(G3) $f(\cdot, 0) = 0$ và $\|f(t, \mathbf{v}_1) - f(t, \mathbf{v}_2)\| \leq \ell(t)\mathcal{K}(s)\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|$ với $0 \leq t \leq T$ và $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in L^2(\Sigma)$ sao cho $\|\mathbf{v}_1\|, \|\mathbf{v}_2\| \leq s$, trong đó $\ell \in L^1(0, T)$ nhận giá trị không âm và hàm $\mathcal{K}$ liên tục và thoả mãn

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \mathcal{K}(s) \cdot \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t r(t - \zeta, \lambda_1) \ell(\zeta) d\zeta < 1.$$

Khi đó ta tìm được số δ dương sao cho bài toán (2.1)-(2.3) có duy nhất một nghiệm tích phân trên $[-\tau, T]$ với điều kiện $\|\Phi\|_\infty \leq \delta$.

Tiếp theo, ta quan tâm đến tính tiêu hao đối với hệ đang xét.

Định lí 2.4. Với mọi $T > 0$, ta giả sử các giả thiết của Định lý 2.2 đều được thoả mãn. Giả sử $\|\ell\|_{\text{ess sup}} := \text{ess sup}_{t \geq 0} \ell(t) < \lambda_1$. Khi đó tồn tại một tập hấp thụ bị chặn đối với nghiệm của (2.1)-(2.3), trong trường hợp này dữ kiện ban đầu có thể cho bất kì.

Định lý tiếp theo chỉ ra nghiệm không của (2.1)-(2.2) ổn định tiệm cận.

Định lí 2.5. Cho $f : \mathbb{R}^+ \times L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Sigma)$ là ánh xạ liên tục và thoả mãn điều kiện sau:

(G4) $f(\cdot, 0) = 0$ và $\|f(t, \mathbf{v}_1) - f(t, \mathbf{v}_2)\| \leq \ell(t)\mathcal{K}(s)\|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|$ với $0 < t < +\infty$ và $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in L^2(\Sigma)$ sao cho $\|\mathbf{v}_1\|, \|\mathbf{v}_2\| \leq s$, trong đó $\ell \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ nhận giá trị không âm và $\mathcal{K}$ liên tục và thoả mãn điều kiện:

$$\|\ell\|_{\text{ess sup}} \cdot \limsup_{s \rightarrow 0} \mathcal{K}(s) < \lambda_1.$$

Khi đó nghiệm không của (2.1)-(2.2) là ổn định tiệm cận.

2.4. Sự tồn tại nghiệm phân rã

Ta đặt điều kiện sau:

(G5) $f : (0, +\infty) \times L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Sigma)$ liên tục và thoả mãn điều kiện:

$$\|f(t, \mathbf{v})\| \leq \ell(t)\mathcal{O}(\|\mathbf{v}\|), \quad \forall t \in (0, +\infty), \mathbf{v} \in L^2(\Sigma),$$

trong đó $\ell \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ nhận giá trị không âm và $\mathcal{O} \in C(\mathbb{R}^+)$ nhận giá trị không âm và không giảm, thoả mãn

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(s)}{s} \cdot \sup_{t \geq 0} \int_0^t r(t - \zeta, \lambda_1) \ell(\zeta) d\zeta < 1, \quad (2.9)$$

và

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq T} \int_0^{\frac{t}{2}} r(t - \zeta, \lambda_1) \ell(\zeta) d\zeta = 0. \quad (2.10)$$

Tiếp theo ta có định lý về sự tồn tại các nghiệm phân rã.

Định lí 2.6. Giả sử ta có điều kiện (G5). Khi đó ta tìm được số δ dương sao cho với điều kiện $\|\Phi\|_\infty \leq \delta$ bài toán (2.1)-(2.3) có một tập compact các nghiệm phân rã.

2.5. Ví dụ minh hoạ cho các điều kiện (2.9) và (2.10)

Trước tiên ta xét điều kiện (2.10). Lấy $\ell \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ và $\|\ell\|_{\text{ess sup}} = \text{ess sup}_{t \geq 0} |\ell(t)|$. Khi đó điều kiện (2.10) được thoả mãn. Thật vậy, ta thấy rằng

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq T} \int_0^{\frac{t}{2}} r(t - \zeta, \lambda_1) \ell(\zeta) d\zeta &\leq \|\ell\|_{\text{ess sup}} \sup_{t \geq T} \int_0^{\frac{t}{2}} r(t - \zeta, \lambda_1) d\zeta \\ &\leq \|\ell\|_{\text{ess sup}} \sup_{t \geq T} \int_{\frac{t}{2}}^t r(\zeta, \lambda_1) d\zeta \\ &\leq \|\ell\|_{\text{ess sup}} \int_{\frac{T}{2}}^{+\infty} r(\zeta, \lambda_1) d\zeta \rightarrow 0 \text{ khi } T \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

nhờ có $r(\cdot, \lambda_1) \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

Tiếp theo ta xét điều kiện (2.9). Nếu f có mức độ tăng trưởng trên tuyến tính, chẳng hạn như $\mathcal{O}(s) = s^p$ với $p > 1$ nào đó, thì dễ thấy (2.9) được thoả mãn. Nếu f có mức độ tăng trưởng dưới tuyến tính, ví dụ như $\mathcal{O}(s) = s$, thì (2.9) trở thành

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t r(t - \zeta, \lambda_1) \ell(\zeta) d\zeta < 1. \quad (2.11)$$

Để ý rằng

$$\int_0^t r(t - \zeta, \lambda_1) \ell(\zeta) d\zeta \leq \|\ell\|_{\text{ess sup}} \int_0^t r(\zeta, \lambda_1) d\zeta \leq \|\ell\|_{\text{ess sup}} \lambda_1^{-1},$$

ta thấy (2.11) được thoả mãn khi $\|\ell\|_{\text{ess sup}} < \lambda_1$.

Chương 3

BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH NGUỒN CHO PHƯƠNG TRÌNH RAYLEIGH-STOKES SUY RỘNG CHỨA NHIỀU PHI TUYẾN

Trong chương này chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, tính ổn định và tính chính quy nghiệm của bài toán xác định nguồn với phương trình Rayleigh-Stokes suy rộng. Nội dung chương này dựa trên bài báo số 2 trong Danh mục công trình khoa học liên quan đến luận án.

3.1. Đặt bài toán

Cho Σ là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^d$ với biên $\partial\Sigma$ trơn. Khi đó ta đặt bài toán sau: tìm (a, u) thỏa mãn

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \mathfrak{D}_{t,\{k\}} \Delta u = a(x)b(t) + g(u) \text{ trong miền } \Sigma \text{ khi } t \in (0, T), \quad (3.1)$$

$$u = 0 \text{ trên biên } \partial\Sigma \text{ khi } t \geq 0, \quad (3.2)$$

$$u(0) = \phi \text{ trong miền } \Sigma, \quad (3.3)$$

$$u(T) = \xi(u) \text{ trong miền } \Sigma, \quad (3.4)$$

ở đây $u(\cdot)$ nhận giá trị trong không gian $L^2(\Sigma)$, b , g và ξ là các hàm cho trước, $\mathfrak{D}_{t,\{k\}}$ là toán tử đạo hàm không địa phương được cho bởi

$$\mathfrak{D}_{t,\{k\}} \mathfrak{v}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t k(t - \zeta) \mathfrak{v}(\zeta) d\zeta,$$

ứng với hàm nhân $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Trong bài toán này, ta đặt các điều kiện như sau:

(M) $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ là hàm nhận giá trị không âm và $\mathfrak{a}(t) = 1 + k(t)$ là hàm dương hoàn toàn.

(NND) Tồn tại hàm $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ nhận giá trị dương và không tăng sao cho

$$m * \mathfrak{a} = 1 \text{ trên } \mathbb{R}^+.$$

3.2. Xây dựng công thức nghiệm và các đánh giá liên quan đến toán tử giải thức

Dựa vào công thức (1.6) ứng với bài toán (1.1)-(1.3), ta sẽ tìm biểu diễn nghiệm của (3.1)-(3.4). Giả sử u là nghiệm của (3.1)-(3.4). Đặt $\xi_i = \langle \xi(u), e_i \rangle$, $g_i(t) = \langle g(u(t)), e_i \rangle$ (đây là kí hiệu của tích vô hướng trong $L^2(\Sigma)$), và $a_i = \langle a, e_i \rangle_{\mathbb{H}^{-1}, \mathbb{H}^1}$ (kí hiệu cặp đôi ngẫu $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^{-e}, \mathbb{H}^e}$ trên $\mathbb{H}^{-e} \times \mathbb{H}^e$), khi đó:

$$u(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left[r(t, \lambda_i) \phi_i + \int_0^t r(t - \zeta, \lambda_i) a_i b(\zeta) d\zeta + \int_0^t r(t - \zeta, \lambda_i) g_i(\zeta) d\zeta \right] e_i.$$

Sử dụng điều kiện đo tại $t = T$, ta có:

$$\xi_i = r(T, \lambda_i) \phi_i + \int_0^T r(T - \zeta, \lambda_i) a_i b(\zeta) d\zeta + \int_0^T r(T - \zeta, \lambda_i) g_i(\zeta) d\zeta.$$

Vì vậy

$$a_i = \left(\int_0^T r(T - \zeta, \lambda_i) b(\zeta) d\zeta \right)^{-1} \left[\xi_i - r(T, \lambda_i) \phi_i - \int_0^T r(T - \zeta, \lambda_i) g_i(\zeta) d\zeta \right],$$

với điều kiện $\left(\int_0^T r(T - \zeta, \lambda_i) b(\zeta) d\zeta \right)^{-1}$ xác định. Để đảm bảo điều đó, ta đặt ra giả thiết sau:

Hàm thực b xác định trên $[0, T]$ là hàm liên tục trên đó, nhận giá trị không âm và thoả mãn $b_T := \int_0^T b(\zeta) d\zeta > 0$.

Xét toán tử $\mathcal{S}$ như sau:

$$\mathcal{S}\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\int_0^T r(T - \zeta, \lambda_i) b(\zeta) d\zeta \right)^{-1} \mathbf{v}_i e_i,$$

với miền xác định

$$D(\mathcal{S}) = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Sigma) : \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\int_0^T r(T - \zeta, \lambda_i) b(\zeta) d\zeta \right)^{-2} \mathbf{v}_i^2 < +\infty \}.$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} a &= \mathcal{S}[\xi(u) - \Re(T)\phi - \int_0^T \Re(T - \zeta)g(u(\zeta))d\zeta], \\ u(t) &= \Re(t)\phi + \int_0^t \Re(t - \zeta)ab(\zeta)d\zeta + \int_0^t \Re(t - \zeta)g(u(\zeta))d\zeta. \end{aligned}$$

Các bổ đề sau cho ta các tính chất của $\Re(t)$ và $\mathcal{S}$:

Bổ đề 3.1. Giả sử $\{\Re(t)\}_{t \geq 0}$ là họ các toán tử giải thức được cho bởi (1.7), $\mathbf{v} \in L^2(\Sigma)$ và T là một số thực dương. Khi đó

(a) $\Re(\cdot)\mathbf{v} \in C([0, T]; L^2(\Sigma))$ và $\|\Re(t)\| \leq r(t, \lambda_1) \forall t \geq 0$.

(b) $\Delta\Re(\cdot)\mathbf{v} \in C((0, T]; L^2(\Sigma)) \cap L^1(0, T; L^2(\Sigma))$ và $\|\Delta\Re(t)\| \leq t^{-1}$ với mọi t dương. Thêm vào đó,

$$\left\| \int_0^t \Delta\Re(\zeta)\mathbf{v}d\zeta \right\| \leq \|\mathbf{v}\| \quad \forall t \geq 0. \quad (3.5)$$

(c) Nếu k nhận giá trị không tăng thì $\Re(\cdot)\mathbf{v} \in C^1((0, T]; L^2(\Sigma))$ và ta có:

$$\|\Re'(t)\| \leq t^{-1} \quad \forall t > 0. \quad (3.6)$$

(d) Nếu hàm $h \in C([0, T]; L^2(\Sigma))$ thì $(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{R} * h \in C([0, T]; L^2(\Sigma))$ và

$$\|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{R} * h(t)\| \leq \left(\int_0^t r(t - \zeta, \lambda_1) \|h(\zeta)\|^2 d\zeta \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Bổ đề 3.2. Với $b_T = \int_0^T b(\zeta) d\zeta > 0$, ta có một số tính chất sau của toán tử $\mathcal{S}$:

(a) $D(\mathcal{S}) = D(-\Delta)$.

(b) Nếu $\mathbf{v} \in \mathbb{H}^2$ thì $\mathcal{S}\mathbf{v} \in L^2(\Sigma)$ và $\|\mathcal{S}\mathbf{v}\| \leq b_T^{-1} \|\mathbf{v}\| + b_T^{-1} m(T)^{-1} \|(-\Delta)\mathbf{v}\|$, trong đó m được cho như trong điều kiện (NND).

(c) Nếu $\mathbf{v} \in \mathbb{H}^1$ thì $\mathcal{S}\mathbf{v} \in \mathbb{H}^{-1}$ và

$$\|\mathcal{S}\mathbf{v}\|_{\mathbb{H}^{-1}} \leq b_T^{-1} \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\| + b_T^{-1} m(T)^{-1} \|(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}\|.$$

(d) Nếu $g \in C([0, T]; L^2(\Sigma))$ và $\|g\|_\infty = \sup_{[0, T]} \|g(t)\|$ thì $\mathcal{S}(\mathfrak{R} * g)(T) \in \mathbb{H}^{-1}$ và

$$\|\mathcal{S}(\mathfrak{R} * g)(T)\|_{\mathbb{H}^{-1}} \leq b_T^{-1} \lambda_1^{-\frac{1}{2}} [\lambda_1^{-1} + m(T)^{-1}] \|g\|_\infty. \quad (3.7)$$

(e) Giả sử rằng $g \in C^{0, \iota}((0, T]; L^2(\Sigma))$ với $0 < \iota < 1$, tức là tồn tại $C_g > 0$ sao cho với mọi t dương, $\epsilon \in (0, T - t)$ ta có:

$$\|g(t + \epsilon) - g(t)\| \leq C_g \epsilon^\iota.$$

Khi đó $\mathcal{S}(\mathfrak{R} * g)(T) \in L^2(\Sigma)$ và

$$\|\mathcal{S}(\mathfrak{R} * g)(T)\| \leq b_T^{-1} \|(\mathfrak{R} * g)(T)\| + b_T^{-1} m(T)^{-1} [C_g \iota^{-1} T^\iota + \|g(T)\|].$$

3.3. Tính giải được và ổn định

Trong phần này, ta giả sử rằng:

(F1) Hàm $g : L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Sigma)$ với $g(0) = 0$ có tính chất Lipschitz địa phương, tức là

$$\|g(\mathbf{v}_1) - g(\mathbf{v}_2)\| \leq \mathfrak{L}_g(\vartheta) \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|, \quad \forall \|\mathbf{v}_1\|, \|\mathbf{v}_2\| \leq \vartheta,$$

trong đó $\vartheta \geq 0$ và $\mathfrak{L}_g(\cdot)$ là hàm không âm thoả mãn

$$\mathfrak{L}_g^* := \limsup_{\vartheta \rightarrow 0} \mathfrak{L}_g(\vartheta) < +\infty.$$

(F2) Hàm thực $b(t)$ xác định và liên tục trên $[0, T]$, nhận giá trị không âm và $b_T = \int_0^T b(\zeta) d\zeta > 0$.

(F3) Hàm ξ đi từ $C([0, T]; L^2(\Sigma))$ vào $\mathbb{H}^1$ thoả mãn $\xi(0) = 0$ và điều kiện Lipschitz địa phương

$$\|\xi(\mathbf{v}_1) - \xi(\mathbf{v}_2)\|_{\mathbb{H}^1} \leq \mathfrak{L}_\xi(\vartheta) \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_\infty, \quad \forall \|\mathbf{v}_1\|_\infty, \|\mathbf{v}_2\|_\infty \leq \vartheta,$$

trong đó $\mathfrak{L}_\xi(\cdot)$ nhận giá trị không âm sao cho $\mathfrak{L}_\xi^* := \limsup_{\vartheta \rightarrow 0} \mathfrak{L}_\xi(\vartheta) < +\infty$.

Ta sẽ định nghĩa nghiệm tích phân của bài toán này như sau.

Định nghĩa 3.1. Bài toán (3.1)-(3.4) nhận cặp $(a, u) \in \mathbb{H}^{-1} \times C([0, T]; L^2(\Sigma))$ là nghiệm tích phân nếu và chỉ nếu

$$\begin{aligned} a &= \mathcal{S}[\xi(u) - \mathfrak{R}(T)\phi - \int_0^T S(T - \zeta)g(u(\zeta))d\zeta], \\ u(t) &= \mathfrak{R}(t)\phi + \int_0^t \mathfrak{R}(t - \zeta)ab(\zeta)d\zeta + \int_0^t \mathfrak{R}(t - \zeta)g(u(\zeta))d\zeta. \end{aligned}$$

Định lý tiếp theo sẽ phát biểu kết quả về tính giải được của bài toán.

Định lý 3.1. *Giả sử (F1)-(F3) được thoả mãn, ta tìm được số $\delta > 0$ để bài toán (3.1)-(3.4) có duy nhất nghiệm tích phân khi $\|\Phi\| < \delta$ và điều kiện sau được thoả mãn:*

$$\mathfrak{L}_b \mathfrak{L}_\xi^* + (\mathfrak{L}_b \lambda_1^{\frac{1}{2}} + 1) \lambda_1^{-1} \mathfrak{L}_g^* < 1,$$

trong đó

$$\mathfrak{L}_b = \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \|b\|_\infty b_T^{-1} (\lambda_1^{-1} + m(T)^{-1}). \quad (3.8)$$

Bây giờ ta xét trường hợp ξ không phụ thuộc vào u . Ta sẽ chỉ ra rằng ánh xạ nghiệm $(\xi, \Phi) \mapsto (a, u)$ có tính chất Lipschitz khi đi từ $\mathbb{H}^1 \times L^2(\Sigma)$ vào $\mathbb{H}^{-1} \times C([0, T]; L^2(\Sigma))$.

Định lý 3.2. *Ta đặt giả thiết ξ không phụ thuộc vào u và ánh xạ g là ánh xạ Lipschitz toàn cục với hệ số Lipschitz là $\mathfrak{L}_g^*$. Khi đó ánh xạ nghiệm $(\xi, \Phi) \mapsto (a, u)$ có tính chất liên tục Lipschitz nếu điều kiện sau được thoả mãn:*

$$(\mathfrak{L}_b \lambda_1^{\frac{1}{2}} + 1) \lambda_1^{-1} \mathfrak{L}_g^* < 1.$$

3.4. Tính chính quy nghiệm

Nếu ξ đủ chính quy, ta có thể chứng minh nghiệm tích phân của bài toán là nghiệm mạnh.

Định nghĩa 3.2. Ta gọi một cặp $(a, u) \in L^2(\Sigma) \times C([0, T]; L^2(\Sigma))$ là nghiệm mạnh của bài toán (3.1)-(3.4) nếu và chỉ nếu các phương trình (3.1), (3.3) và (3.4) được thoả mãn trong $L^2(\Sigma)$.

Để khảo sát sự tồn tại nghiệm mạnh, ta thay (M) bởi điều kiện sau:

(M*) *Điều kiện (M) được thoả mãn và hàm k nhận giá trị không tăng.*

Định lý về tính chính quy được phát biểu như sau:

Định lý 3.3. *Giả sử ta có các giả thiết (F1)-(F3) và (M*). Giả sử ξ nhận giá trị trong $\mathbb{H}^2$ và b có tính chất liên tục Hölder. Khi đó nghiệm tích phân của (3.1)-(3.4) là nghiệm mạnh.*

Để chứng minh kết quả trên ta cần các bổ đề sau:

Bổ đề 3.3. *Giả sử ta có các giả thiết (F1)-(F3) và (M*). Giả sử bài toán (3.1)-(3.4) có nghiệm tích phân (a, u) . Khi đó u có tính chất liên tục Hölder trên $(0, T]$. Cụ thể hơn, ta tìm được d_1, d_2 dương và $\iota \in (0, \frac{1}{2})$ sao cho với mọi t dương, $\omega \in (0, T - t]$ ta có:*

$$\|u(t + \omega) - u(t)\| \leq (d_1 t^{-\iota} + d_2) \omega^\iota. \quad (3.9)$$

Bổ đề 3.4. *Giả sử ta có các giả thiết của Định lý 3.3 và bài toán (3.1) – (3.4) có nghiệm tích phân (a, u) . Khi đó u là khả vi trên $(0, T]$, tức là $u'(t) \in L^2(\Sigma) \forall t \in (0, T]$.*

Bổ đề 3.5. *Giả sử ta có các giả thiết của Định lý 3.3 và bài toán (3.1) – (3.4) có nghiệm tích phân (a, u) . Khi đó $\Delta u(t) \in L^2(\Sigma) \forall t \in (0, T]$.*

Bổ đề 3.6. *Giả sử ta có các giả thiết của Định lý 3.3 và bài toán (3.1) – (3.4) có nghiệm tích phân (a, u) . Khi đó $\mathfrak{D}_{t, \{k\}} \Delta u(t) \in L^2(\Sigma) \forall t \in (0, T]$.*

3.5. Ví dụ minh hoạ cho các hàm g và ξ

Trong phần này, ta đưa ra các ví dụ minh hoạ cho các giả thiết (F1) và (F3).

Để minh hoạ cho giả thiết (F1), ta chọn hàm $g : L^2(\Sigma) \rightarrow L^2(\Sigma)$ như sau:

$$g(v)(x) = \left(\int_{\Sigma} |v(x)|^2 dx \right)^p v(x) = \|v\|_{L^2(\Sigma)}^{2p} v(x), p \geq 1.$$

Để minh hoạ cho giả thiết (F3), ta chọn hàm $\xi(u)(x) = \int_{\Sigma} \kappa(x, y) u(T, y) dy$, với $\kappa : \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục theo biến thứ nhất, $\kappa(x, y) = 0$ khi $x \in \partial\Sigma$ và ta cần thêm điều kiện

$$\int_{\Sigma} \|\nabla \kappa(x, y)\|_{L^2(\Sigma)}^2 dy < +\infty.$$

Chương 4

BÀI TOÁN GIÁ TRỊ CUỐI CHO PHƯƠNG TRÌNH RAYLEIGH-STOKES SUY RỘNG VỚI PHẦN PHI TUYẾN NHẬN GIÁ TRỊ YẾU

Chương này nghiên cứu bài toán giá trị cuối đối với phương trình Rayleigh-Stokes suy rộng, trong đó hàm phi tuyến ở vế phải có thể nhận giá trị trong các thang Hilbert có số mũ âm. Mục tiêu của chương là đưa ra một số điều kiện đủ cho tính giải được và tính chính quy Hölder theo biến thời gian của nghiệm tích phân đối với bài toán đó. Công cụ chính được sử dụng là các đánh giá chính quy của toán tử giải thức và định lý ánh xạ co. Nội dung chương này dựa trên bài báo số 3 trong Danh mục công trình khoa học liên quan đến luận án.

4.1. Đặt bài toán

Cho $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ là miền bị chặn với biên trơn $\partial\Sigma$. Xét bài toán sau:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \mathfrak{D}_{t,\{k\}}\Delta u = g(u) \text{ trong miền } \Sigma, 0 < t < T, \quad (4.1)$$

$$u = 0 \text{ trên biên } \partial\Sigma, t > 0, \quad (4.2)$$

$$u(T, \cdot) = \xi \text{ trong miền } \Sigma, \quad (4.3)$$

ở đây hàm g được cho trước, hàm u xác định trên $(0, T] \times \Sigma$ là hàm chưa biết cần tìm, $\mathfrak{D}_{t,\{k\}}$ là toán tử đạo hàm không địa phương:

$$\mathfrak{D}_{t,\{k\}}v(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t k(t - \zeta)v(\zeta)d\zeta,$$

ứng với hàm nhân $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Trong bài toán này, ta đặt các điều kiện như sau:

(M) $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ là hàm nhận giá trị không âm và $\mathfrak{a}(t) = 1 + k(t)$ là hàm dương hoàn toàn.

(NND) Tồn tại hàm $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ nhận giá trị dương và không tăng sao cho

$$m * \mathfrak{a} = 1 \text{ trên } \mathbb{R}^+.$$

4.2. Xây dựng công thức nghiệm và các đánh giá liên quan đến toán tử giải thức

Trước tiên, ta sẽ tìm biểu diễn nghiệm cho bài toán tuyến tính với giá trị cuối:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \mathfrak{D}_{t, \{k\}} \Delta u = \mathbb{F} \quad \text{trong miền } \Sigma, 0 < t \leq T, \quad (4.4)$$

$$u = 0 \quad \text{trên biên } \partial \Sigma, 0 < t \leq T, \quad (4.5)$$

$$u(T, \cdot) = \xi \quad \text{trong miền } \Sigma, \quad (4.6)$$

trong đó $\mathbb{F}$ là hàm thuộc không gian $C([0, T]; L^2(\Sigma))$. Giả sử ta có điều kiện ban đầu $u(0) = \phi$, từ (1.6) ta có:

$$\xi = \mathfrak{R}(T)\phi + \int_0^T \mathfrak{R}(T - \zeta)\mathbb{F}(\zeta)d\zeta.$$

Khi đó

$$\phi = \mathfrak{R}(T)^{-1}[\xi - \int_0^T \mathfrak{R}(T - \zeta)\mathbb{F}(\zeta)d\zeta].$$

Do vậy nghiệm của (4.4)-(4.6) được cho bởi

$$u(t) = \mathbb{S}(t)[\xi - \mathfrak{R} * \mathbb{F}(T)] + \mathfrak{R} * \mathbb{F}(t), \quad (4.7)$$

trong đó

$$\mathbb{S}(t) = \mathfrak{R}(t)\mathfrak{R}(T)^{-1} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{r(t, \lambda_i)}{r(T, \lambda_i)} \langle \cdot, e_i \rangle e_i. \quad (4.8)$$

Dựa vào (4.7), nghiệm tích phân của bài toán (4.1)-(4.3) có thể được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 4.1. Cho số dương ω . Bài toán (4.1)-(4.3) nhận hàm $u \in C((0, T]; \mathbb{H}^\omega)$ là nghiệm tích phân nếu

$$u(t) = \mathbb{S}(t)\xi - \mathbb{S}(t) \int_0^T \mathfrak{R}(T - \zeta)g(u(\zeta))d\zeta + \int_0^t \mathfrak{R}(t - \zeta)g(u(\zeta))d\zeta, \quad \forall t \in (0, T].$$

Một số tính chất của $\mathfrak{R}(t)$ và $\mathbb{S}(t)$ được đưa ra trong các bổ đề dưới đây:

Bổ đề 4.1. Với $\{\mathfrak{R}(t)\}_{t \geq 0}$ là họ các toán tử giải thức được cho bởi (1.7), $u \in L^2(\Sigma)$ và T là số thực dương, ta có:

(a) $\mathfrak{R}(\cdot)u \in C([0, T]; L^2(\Sigma))$ và $\|\mathfrak{R}(t)\| \leq r(t, \lambda_1)$ với mọi t không âm.

(b) Nếu k nhận giá trị không tăng thì $\mathfrak{R}(\cdot)u \in C^1((0, T]; L^2(\Sigma))$. Hơn nữa:

$$\|\mathfrak{R}'(t)\| \leq t^{-1} \quad \text{với mọi } t \text{ dương.} \quad (4.9)$$

(c) Với $\nu \in (0, 1)$, $\omega > 0$ và $h \in C([0, T]; \mathbb{H}^{\omega-1-\nu})$, ta có:

$$\|\mathfrak{R} * h(t)\|_\omega^2 \leq \int_0^t (t - \zeta)^{-\nu} \|h(\zeta)\|_{\omega-1-\nu}^2 d\zeta,$$

và

$$\|\mathfrak{R} * h(t)\|_\omega^2 \leq \int_0^t [1 * k(t - \zeta)]^{-\nu} \|h(\zeta)\|_{\omega-1-\nu}^2 d\zeta.$$

(d) Với ω dương và h là hàm thuộc $C([0, T]; \mathbb{H}^{\omega-2})$ và $(1 * k)^{-1} \in L^1(0, T)$ ta có:

$$\|\mathfrak{R} * h(t)\|_\omega^2 \leq \int_0^t \frac{\|h(\zeta)\|_{\omega-2}^2}{(1 * k)(t - \zeta)} d\zeta.$$

Bổ đề 4.2. Họ các toán tử $\mathbb{S}(t)$ được cho bởi (4.8) có các tính chất sau:

(a) Nếu $0 \leq \eta \leq 1$, ω là số dương và $\xi \in \mathbb{H}^{\omega+2(1-\eta)}$ thì

$$\|\mathbb{S}(t)\xi\|_{\omega} \leq C(m)t^{-\eta}\|\xi\|_{\omega+2(1-\eta)}, \text{ với } t \text{ dương,}$$

và

$$\|\mathbb{S}(t)\xi\|_{\omega} \leq \frac{C(m)\|\xi\|_{\omega+2(1-\eta)}}{[1 * k(t)]^{\eta}}, \text{ với } t \text{ dương,}$$

trong đó $C(m) = \lambda_1^{-1} + m(T)^{-1}$.

(b) Với $0 < \nu < 1$, $0 \leq \eta \leq 1$, ω dương và $h \in C([0, T]; \mathbb{H}^{\omega+1-2\eta-\nu})$, ta có:

$$\|\mathbb{S}(t)[\mathfrak{R} * h(T)]\|_{\omega}^2 \leq C(m)^2 t^{-2\eta} \int_0^T (T - \zeta)^{-\nu} \|h(\zeta)\|_{\omega+1-2\eta-\nu}^2 d\zeta.$$

(c) Nếu $0 \leq \eta \leq 1$ và $(1 * k)^{-1} \in L^1(0, T)$ thì với ω dương và $h \in C([0, T]; \mathbb{H}^{\omega-2\eta})$, ta có:

$$\|\mathbb{S}(t)[\mathfrak{R} * h(T)]\|_{\omega}^2 \leq \frac{C(m)^2}{1 * k(t)^{2\eta}} \int_0^T \frac{\|h(\zeta)\|_{\omega-2\eta}^2}{1 * k(T - \zeta)} d\zeta.$$

Bổ đề 4.3. Với k nhận giá trị không tăng, $0 < \tau \leq 1$, $0 < \omega \leq 1$, ω dương và $\xi \in \mathbb{H}^{\omega+2\omega}$, tồn tại số C_{τ} dương sao cho

$$\|\mathbb{S}(t + \varrho) - \mathbb{S}(t)\xi\|_{\omega} \leq \frac{C_{\tau} \varrho^{\tau\omega} \|\xi\|_{\omega+2\omega}}{[1 * k(t)]^{1-\omega} t^{\tau\omega}}, \quad t \in (0, T - \varrho], \varrho > 0.$$

4.3. Tính giải được

Để giải quyết bài toán (4.1)-(4.3), ta đặt điều kiện sau lên hàm g :

(G) Hàm g đi từ không gian $\mathbb{H}^{\omega}$ vào không gian $\mathbb{H}^{-\gamma}$ với ω dương và γ là số không âm, ngoài ra ta có $g(0) = 0$.
Thêm vào đó, ta tìm được các hàm $\mathfrak{L}_g$ và $\mathcal{L}_g$ nhận giá trị không âm sao cho với $u_1, u_2 \in \mathbb{H}^{\omega}$ ta có:

$$\|g(u_1) - g(u_2)\|_{-\gamma} \leq \mathfrak{L}_g(\|u_1\|_{\omega}, \|u_2\|_{\omega}) \|u_1 - u_2\|_{\omega}$$

và

$$\mathfrak{L}_g(\lambda\theta, \lambda\theta') \geq \mathcal{L}_g(\lambda)\mathfrak{L}_g(\theta, \theta'), \text{ với mọi số dương } \lambda, \theta, \theta'.$$

Ta sẽ tìm nghiệm của bài toán (4.1)-(4.3) trong không gian $\mathcal{M}^{\omega, \eta}$ được định nghĩa như sau:

$$\mathcal{M}^{\omega, \eta} = \{u \in C((0, T]; \mathbb{H}^{\omega}) : \|u\|_{\omega, \eta} := \sup_{t>0} t^{\eta} \|u(t)\|_{\omega} < +\infty\},$$

ở đây $\omega > 0, \eta > 0$ và ξ là hàm được cho trước.

Định lý 4.1. Cho $\omega \in (0, 1]$, $\eta \in (0, 1)$, $\nu \in (0, 1)$ thỏa mãn $2\eta + \nu \geq \omega + 1$. Giả sử rằng (G) được thỏa mãn với $\gamma = 2\eta + \nu - \omega - 1$. Khi đó tồn tại $\theta^* > 0$ và $\delta > 0$ sao cho nếu $\|\xi\|_{\omega+2(1-\eta)} \leq \delta$ và

$$6\mathfrak{L}_g^{*2}[C(m)^2 \Lambda(T) + \lambda_1^{2\eta-2} \sup_{t \in (0, T]} t^{2\eta} \Lambda(t)] < 1,$$

ở đây

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_g^* &= \limsup_{\theta, \theta' \rightarrow 0} \mathfrak{L}_g(\theta, \theta'), \\ \Lambda(t) &= \int_0^t (t - \zeta)^{-\nu} \zeta^{-2\eta} \mathcal{L}_g(\zeta^{\eta})^{-2} d\zeta, \end{aligned}$$

thì bài toán (4.1)-(4.3) có duy nhất nghiệm tích phân u trong $\mathcal{M}^{\omega, \eta}$ thỏa mãn $\|u\|_{\omega, \eta} \leq \theta^*$.

Nếu g có tính chất Lipschitz toàn cục và k thoả mãn $(1 * k)^{-1} \in L^1(0, T)$ thì ta có định lý sau:

Định lý 4.2. *Giả sử rằng $g : \mathbb{H}^\varpi \rightarrow \mathbb{H}^{\varpi-2\eta}$, $\varpi > 0$, $0 < \eta < 1$ và g thoả mãn*

$$\|g(u_1) - g(u_2)\|_{\varpi-2\eta} \leq \mathfrak{L}_g^* \|u_1 - u_2\|_{\varpi} \text{ với mọi } u_1, u_2 \in \mathbb{H}^\varpi.$$

Nếu $(1 * k)^{-1} \in L^1(0, T)$ và

$$\mathfrak{L}^* := 2\mathfrak{L}_g^{*2} [C(m)^2 \Theta_\eta(T) + \lambda_1^{4(\eta-1)} \sup_{0 < t \leq T} 1 * k(t)^{2\eta} \Theta_\eta(t)] < 1,$$

ở đây

$$\Theta_\eta(t) = \int_0^t [1 * k(t - \zeta)]^{-1} [1 * k(\zeta)]^{-2\eta} d\zeta, \quad (4.10)$$

thì tồn tại nghiệm tích phân duy nhất của bài toán (4.1)-(4.3) trong không gian

$$\mathcal{N}^{\varpi, \eta} = \{u \in C((0, T]; \mathbb{H}^\varpi) : \|u\|_{\varpi, k, \eta} := \sup_{0 < t \leq T} 1 * k(t)^\eta \|u(t)\|_{\varpi} < +\infty\},$$

với $\xi \in \mathbb{H}^{\varpi+2(1-\eta)}$ được cho trước.

4.3. Tính chính quy Hölder của nghiệm

Trong phần này ta cần giả thiết mạnh hơn như sau:

(M*) *Hàm k thoả mãn giả thiết (M) và k là hàm nhận giá trị không tăng.*

Định lý 4.3. *Giả sử ta có giả thiết (M*) và hàm $g : \mathbb{H}^\varpi \rightarrow \mathbb{H}^{\varpi-2(1-\omega)}$, $\varpi > 0$, $0 < \omega < 1$ thoả mãn*

$$\|g(u_1) - g(u_2)\|_{\varpi-2(1-\omega)} \leq \mathfrak{L}_g^* \|u_1 - u_2\|_{\varpi}, \text{ với mọi } u_1, u_2 \in \mathbb{H}^\varpi,$$

trong đó $\mathfrak{L}_g^* > 0$. Giả sử rằng $(1 * k)^{-1} \in L^1(0, T)$ và

$$\mathfrak{L}^* := 6\mathfrak{L}_g^{*2} [C(m)^2 \Theta_{1-\omega}(T) + \lambda_1^{-4\omega} \sup_{0 < t \leq T} [1 * k(t)]^{2(1-\omega)} \Theta_{1-\omega}(t)] < 1,$$

$$6\lambda_1^{-4\omega} \mathfrak{L}_g^{*2} \mathcal{M}_{\omega, \tau}^* < 1, \quad \Theta^* := \sup_{\varrho \in (0, T)} \frac{1}{\varrho^{2\tau\omega}} \left(\Theta_{1-\omega}(\varrho) + \int_0^\varrho \frac{d\zeta}{1 * k(\zeta)} \right) < +\infty,$$

với $\Theta_{1-\omega}$ được cho bởi (4.10), $\tau \in (0, 1]$ và

$$\mathcal{M}_{\omega, \tau}^* := \sup_{t \in (0, T)} [1 * k(t)]^{2(1-\omega)} t^{2\tau\omega} \int_0^t \frac{d\zeta}{[1 * k(t - \zeta)][1 * k(\zeta)]^{2(1-\omega)} \zeta^{2\tau\omega}}.$$

Với những điều kiện trên, tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán (4.1)-(4.3) trong $\mathcal{N}^{\varpi, 1-\omega}$ với mỗi $\xi \in \mathbb{H}^{\varpi+2\omega}$ được cho trước và nghiệm này là liên tục Hölder theo biến thời gian trên $(0, T]$.

4.4. Ví dụ minh hoạ

Trong phần này, ta sẽ lấy ví dụ cho hàm phi tuyến g và các điều kiện được đặt ra trong Định lý 4.1, Định lý 4.2 và Định lý 4.3.

Ví dụ 4.1. Ví dụ minh hoạ cho Định lý 4.1.

Giả sử rằng $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ với $d \geq 2$. Khi đó ta chọn hàm phi tuyến g có dạng đa thức $g(u) = |u|^r$ và các tham số $\varpi, \gamma, \nu, \eta$ giống như trong Định lý 4.1.

Ví dụ 4.2. Ví dụ minh hoạ cho Định lý 4.2 và Định lý 4.3.

Xét $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ với số chiều $d \geq 3$. Khi đó ta có thể chọn hàm g có tính chất Lipschitz toàn cục:

$$g(u) = \mathbf{g}(x) \cdot \nabla u + b(x) \ln(1 + u^2),$$

với $\mathbf{g} = (\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_d) \in (L^\infty(\Sigma))^d$, $b \in L^d(\Sigma)$, và

$$k(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}$$

với $0 < \alpha < 1, \eta = \omega = \frac{1}{2}$.

Kết luận và kiến nghị

1. Các kết quả đạt được

Chúng tôi nghiên cứu một số bài toán thuận và ngược với phương trình dạng Rayleigh-Stokes thuộc vào lớp các phương trình đạo hàm riêng không địa phương. Các kết quả đạt được trong luận án bao gồm:

(a) Đối với bài toán Cauchy cho lớp phương trình Rayleigh-Stokes chứa trễ:

- Kết quả về tính giải được: sự tồn tại nghiệm tích phân của bài toán.
- Kết quả về tính ổn định nghiệm: sự tồn tại tập hấp thụ cho nghiệm, tính ổn định tiệm cận của nghiệm không và sự tồn tại tập compact các nghiệm phân rã của bài toán.

(b) Đối với bài toán xác định nguồn cho lớp phương trình Rayleigh-Stokes suy rộng chứa nhiều phi tuyến:

- Kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm tích phân và sự liên tục Lipschitz của ánh xạ nghiệm.
- Kết quả về tính chính quy nghiệm: với những điều kiện thích hợp, nghiệm của bài toán là nghiệm mạnh.

(c) Đối với bài toán giá trị cuối cho lớp phương trình Rayleigh-Stokes suy rộng với phần phi tuyến nhận giá trị yếu:

- Kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm tích phân.
- Kết quả về tính chính quy Hölder của nghiệm theo biến thời gian.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

- Xét bài toán Cauchy cho lớp phương trình Rayleigh-Stokes suy rộng: tìm điều kiện để nghiệm tích phân phụ thuộc liên tục vào nhân k .
- Đối với bài toán xác định nguồn cho lớp phương trình Rayleigh-Stokes suy rộng: xét các trường hợp khác của phép đo bổ sung, chẳng hạn $\frac{1}{T} \int_0^T u(s)ds = \xi$ (biết giá trị trung bình theo thời gian).
- Đối với bài toán giá trị cuối cho lớp phương trình Rayleigh-Stokes suy rộng: tìm điều kiện để nghiệm nhẹ trở thành nghiệm mạnh.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ

Những kết quả nghiên cứu chính của nghiên cứu sinh gồm có 03 bài báo sau:

1. D. Lan, P.T. Tuan, (2022), On stability for semilinear generalized Rayleigh-Stokes equation involving delays, *Quarterly of Applied Mathematics* 80, 701–715. (SCI-E/Q2)
2. T.D. Ke, L.T.P. Thuy, P.T. Tuan, (2022), An inverse source problem for generalized Rayleigh-Stokes equations involving superlinear perturbations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 507:2 , 125797. (SCI-E/Q1)
3. P.T. Tuan, T.D. Ke, N.N. Thang, (2023), Final value problem for Rayleigh-Stokes type equations involving weak-valued nonlinearities, *Fractional Calculus and Applied Analysis* 26, 694–717. (SCI-E/Q1)