BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

NGUYỄN ĐỨC DUYỆT

TÍNH BỊ CHẶN CỦA TOÁN TỬ LOẠI HAUSDORFF TRÊN MỘT SỐ KHÔNG GIAN HÀM

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội, 2021

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

NGUYỄN ĐỨC DUYỆT

TÍNH BỊ CHẶN CỦA TOÁN TỬ LOẠI HAUSDORFF TRÊN MỘT SỐ KHÔNG GIAN HÀM

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán giải tích
Mã số: 9 46 01 02

Người hướng dẫn khoa học 2 — **Người hướng dẫn khoa học 1**

TS Nguyễn Văn Tuấn — **GS.TSKH Nguyễn Minh Chương**

Hà Nội, 2021

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả viết chung với tác giả khác đều đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả trình bày trong luận án là mới và chưa từng được công bố trong bất trong bất kì công trình của ai khác.

Hà Nội, tháng 04 năm 2021

NCS Nguyễn Đức Duyệt

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành tại Bộ môn Giải tích, Khoa Toán, trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, dưới sự hướng dẫn tận tình chu đáo của GS. TSKH Nguyễn Minh Chương và TS Nguyễn Văn Tuấn. Tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và vô cùng biết ơn tới hai Thầy, người đã truyền đạt kiến thức, kinh nghiệm học tập và nghiên cứu khoa học, định hướng tác giả tiếp cận hướng nghiên cứu thời sự, thú vị và có ý nghĩa.

Trong quá trình nghiên cứu và hoàn thành luận án, tác giả xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ, góp ý của TS Đào Văn Dương (Trường ĐH Xây dựng Miền Trung).

Tác giả xin chân thành cảm ơn PGS. TS Khuất Văn Ninh, TS Trần Văn Bằng, PGS. TS Nguyễn Văn Tuyên (Trường ĐHSP Hà Nội 2), PGS. TS Trần Đình Kế (Trường ĐHSP Hà Nội) đã động viên và cho tác giả những góp ý, kinh nghiệm trong nghiên cứu khoa học để tác giả hoàn thiện luận án này.

Tác giả cũng xin cảm ơn các Thầy, Cô và các Anh, Chị, Em nghiên cứu sinh ở Xêmina Giải tích, Khoa Toán, trường ĐHSP Hà Nội 2 đã tạo một môi trường học tập, nghiên cứu khoa học sôi nổi và thân thiện.

Lời cảm ơn sau cùng, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn tới gia đình, những người thân, các anh chị em, bạn bè đã luôn ở bên, tin tưởng và cho tác giả động lực tinh thần để tác giả hoàn thành luận án.

Mục lục

MỘT SỐ KÍ HIỆU THƯỜNG DÙNG TRONG LUẬN ÁN

$\mathbb{R}^n$	không gian vectơ thực n chiều;
$\lvert x\rvert$	chuẩn của x trong $\mathbb{R}^n$;
dx	độ đo Haar;
$L^q(\mathbb{R}^n)$	tập các hàm khả tích bậc q trên $\mathbb{R}^n$;
$L^q_\omega(\mathbb{R}^n)$	tập các hàm khả tích bậc q trên $\mathbb{R}^n$ với độ đo $d\mu = \omega(x)dx$;
$L^q_{\omega,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$	tập các hàm khả tích địa phương bậc q trên $\mathbb{R}^n$;
$\mathbb{H}^n$	nhóm Heisenberg có số chiều thuần nhất $2n+2$;
$\lvert x\rvert_h$	modul của x trên nhóm Heisenberg;
χ_A	hàm đặc trưng của tập A;
$Lip^\beta(\mathbb{R}^n)$	không gian Lipschitz trên $\mathbb{R}^n$;
$\dot{M}^{\lambda,q}_\omega(\mathbb{R}^n)$	không gian tâm Morrey thuần nhất có trọng trên $\mathbb{R}^n$;
$\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)$	không gian Herz thuần nhất có trọng trên $\mathbb{R}^n$;
$M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)$	không gian Morrey-Herz thuần nhất có trọng trên $\mathbb{R}^n$;
$\dot{M}^{\lambda,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$	không gian tâm Morrey thuần nhất có hai trọng trên $\mathbb{R}^n$;
$\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$	không gian Herz thuần nhất có hai trọng trên $\mathbb{R}^n$;
$M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$	không gian Morrey-Herz thuần nhất có hai trọng trên $\mathbb{R}^n$;
$\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$	toán tử Hausdorff thô;
$\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$	giao hoán tử của toán tử Hausdorff thô;
$\mathscr{H}^b_{\Phi,A}$	giao hoán tử của toán tử ma trận Hausdorff;
$\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$	toán tử Hausdorff đa tuyến tính;
A_ξ	trọng Muckenhoupt.

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lí do chọn đề tài

Một trong những chủ đề quan trọng của giải tích điều hòa là nghiên cứu tính bị chặn của các toán tử T trên các không gian. Cụ thể hơn, chúng ta có bài toán chứng minh bất đẳng thức

$$\|Tf\|_Y \leq C\|f\|_X, \tag{1}$$

ở đó C là hằng số dương, và X, Y là hai không gian với chuẩn tương ứng $\|\cdot\|_X$ và $\|\cdot\|_Y$. Như chúng ta đã biết, tính bị chặn của toán tử xuất hiện một cách tự nhiên khi nghiên cứu một số bài toán quan trọng trong giải tích điều hòa, phương trình đạo hàm riêng hay lý thuyết không gian hàm. Để thấy được tầm quan trọng của bài toán này, chúng ta nhắc lại một số bài toán quan trọng sau.

• Định lý khả vi Lebesgue phát biểu rằng: với mọi hàm khả tích địa phương f trong không gian $\mathbb{R}^n$, chúng ta có

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x)$$

với hầu khắp x trong $\mathbb{R}^n$. Để chứng minh bài toán này, người ta nghiên cứu hàm cực đại Hardy–Littlewood có tâm sau đây

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy,$$

và chứng minh rằng hàm cực đại Hardy–Littlewood có tâm là bị chặn yếu $(1,1)$. Chúng ta cũng có định nghĩa hàm cực đại Hardy–Littlewood như sau

$$\mathscr{M}f(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy,$$

trong đó sup được lấy trên tất cả các hình cầu B trong không gian $\mathbb{R}^n$.

• Xét bài toán Dirichlet sau đây

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 u(x,t) + \partial_t^2 u(x,t) = 0, \quad \text{với} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = f(x), \quad \text{hầu khắp} \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

trong đó f thuộc không gian $L^p(\mathbb{R}^n)$ với $1 \leq p < \infty$. Để giải bài toán này, người ta xét

$$u(x,t) = (f * P_t)(x),$$

trong đó $P_t(x) = t^{-n}P(t^{-1}x)$ và

$$P(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

là hạch Poisson. Rõ ràng $P_t(x_1,...,x_n,t)$ là hàm điều hòa theo các biến $(x_1,...,x_n,t)$, nghĩa là

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 P_t + \frac{d^2}{dt^2} P_t = 0.$$

Do đó hàm $u(x,t)$ cũng là một hàm điều hòa trong không gian $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ và hội tụ đến f trong không gian $L^p(\mathbb{R}^n)$ khi t dần về 0. Để giải quyết bài toán Dirichlet bên trên, ta còn chỉ ra sự hội tụ từng điểm hầu khắp của $u(x,t)$ về f khi t tiến về 0. Tuy nhiên, điều này dễ dàng nhận được từ bất đẳng thức

$$\sup_{t>0} |u(x,t)| \leq \mathscr{M} f(x),$$

và tính bị chặn yếu (p,p) của hàm cực đại Hardy–Littlewood.

• Chúng ta xét thêm một bài toán Cauchy cho phương trình Schrödinger như sau

$$\begin{cases} i\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Như chúng ta biết, nghiệm $u(x,t)$ của bài toán này được cho bởi công thức $u(x,t)=(e^{-it\Delta}u_0)(x)$, ở đó $u(x,t)=(e^{-it\Delta}u_0)(x)$ xác định thông qua biến đổi Fourier

$$\widehat{(e^{-it\Delta}u_0)}(\xi)=e^{it|\xi|^2}\hat{u_0}(\xi).$$

Để nghiên cứu tính chính quy nghiệm, chúng ta cần đánh giá

$$\|e^{-it\Delta}(u_0-v_0)\|_Y\leq C\|u_0-v_0\|_X.$$

Do đó, ta đưa bài toán về việc xét tính bị chặn của toán tử tuyến tính $e^{-it\Delta}$ thông qua bất đẳng thức

$$\|e^{-it\Delta}f\|_Y\leq C\|f\|_X.$$

Qua các trường hợp trên, chúng ta thấy được phần nào tầm quan trọng của việc nghiên cứu tính bị chặn của toán tử, trên các không gian để giải các bài toán trong giải tích hay trong lĩnh vực phương trình đạo hàm riêng.

Ngoài việc chứng minh bất đẳng thức (1), bài toán quan trọng và thú vị nữa là đưa ra các điều kiện cần và đủ để bất đẳng thức (1) đúng. Bên cạnh đó có thể xác định được hằng số C tốt nhất. Với một số lớp toán tử quan trọng trong giải tích điều hòa, ví dụ như nghiên cứu các hàm cực đại Hardy–Littlewood là một bài rất khó. Chẳng hạn, có thể xem [37], [64] và các tài liệu trích dẫn bên trong đó.

Năm 1920, G. H. Hardy [40] đã thiết lập một bất đẳng thức tích phân

$$\|\mathscr{H}f\|_{L^p(\mathbb{R}^+)}\leq\frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^+)},$$

với $1<p<\infty$ và f là hàm đo được không âm trên $(0;\infty)$. Hơn nữa, hằng số $\frac{p}{p-1}$ thu được là tốt nhất. Ở đây $\mathscr{H}$ là toán tử Hardy được định nghĩa

$$\mathscr{H}f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Bất đẳng thức Hardy và các dạng mở rộng của chúng giữ một vai trò quan trọng trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết các không gian phiếm hàm (xem [2], [29], [53]). Năm 1984, C. Carton-Lebrun và M. Fosset [22] đã giới thiệu toán tử tích phân Hardy–Littlewood có trọng, là tổng quát của toán tử Hardy–Littlewood từ một chiều lên nhiều chiều. Kể từ đó, toán tử Hardy–Littlewood có trọng đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới, trong đó chủ yếu tập trung nghiên cứu các điều kiện cần và đủ để toán tử Hardy-Littlewood có trọng bị chặn trên các không gian như Lesbegue, Hardy, BMO, Herz, Morrey–Herz, Triebel–Lizorkin, ... Trong một số trường hợp tính được chuẩn của toán tử.

Một trong những toán tử quan trọng trong giải tích điều hòa là toán tử Hausdorff. Toán tử này có liên quan mật thiết đến bài toán về tính khả tổng của chuỗi Fourier cổ điển. Cho Φ là hàm khả tích địa phương trên $(0,\infty)$. Toán tử Hausdorff một chiều được định nghĩa như sau

$$\mathcal{H}_\Phi f(x) = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) dt. \tag{2}$$

Rõ ràng, khi chọn $\Phi(t) = \frac{\chi_{(1,\infty)}(t)}{t}$ toán tử Hausdorff trở thành toán tử Hardy bên trên. Hơn nữa, với các hàm Φ thích hợp toán tử Hausdorff trở thành một số toán tử quan trọng trong giải tích như: toán tử Cesàro, toán tử Hardy–Littlewood–Pólya, toán tử tích phân phân số Riemann–Liouville (xem [3], [12], [13], [30], [65]). Toán tử Hausdorff được mở rộng đến không gian $\mathbb{R}^n$ bởi Brown và Móricz [6], độc lập nghiên cứu là A. Lerneran và E. Liflyand [54]. Cụ thể hơn, cho φ là một hàm khả tích địa phương trên không gian $\mathbb{R}^n$. Toán tử Hausdorff $\mathcal{H}_{\varphi,A}$ tương ứng với hàm hạch φ được định nghĩa bởi

$$\mathcal{H}_{\varphi,A} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) f(A(t)x) dt, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó $A(t)$ là một ma trận vuông cấp n thỏa mãn $\det A(t) \neq 0$ với hầu khắp t thuộc giá của φ. Nếu lấy ma trận $A(t)$ và hàm φ thích hợp thì $\mathcal{H}_{\varphi,A}$ sẽ trở thành một số toán tử quen thuộc trong giải tích. Chi tiết hơn xem bài báo tổng quan [56] và các tài liệu tham khảo được trích dẫn bên trong đó.

Trong những năm gần đây, toán tử Hausdorff và các giao hoán tử của chúng kể cả trường hợp tuyến tính và đa tuyến tính đã được nhiều nhà toán học trong nước và trên thế giới quan tâm nghiên cứu. Trong đó, các tác giả tập trung thiết lập các điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff và các giao hoán tử, đồng thời đánh giá chuẩn của các toán tử. Chi tiết hơn, có thể tham khảo trong các công trình [4], [5], [6], [7], [10], [11], [12], [16], [17], [20], [27], [39], [42], [43], [49], [51], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [60], [80], [81] và [82]. Từ những lý do trên, GS. TSKH Nguyễn Minh Chương và TS Nguyễn Văn Tuấn đã gợi ý và định hướng cho tôi nghiên cứu đề tài **Tính bị chặn của toán tử loại Hausdorff trên một số không gian hàm**.

2. Mục đích nghiên cứu

Luận án này nghiên cứu điều kiện đủ cho tính bị chặn của một số lớp toán tử Hausdorff, trong một số trường hợp ước lượng được chuẩn của toán tử. Nghiên cứu tính bị chặn cho giao hoán tử của toán tử Hausdorff trên trường thực và nhóm Heisenberg. Cụ thể:

• Ước lượng chuẩn của toán tử Hausdorff thô, tính bị chặn cho giao hoán tử của chúng trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng;

• Ước lượng chuẩn của toán tử Hausdorff đa tuyến tính trên tích các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có hai trọng;

• Tính bị chặn cho giao hoán tử của toán tử Hausdorff thô, giao hoán tử của toán tử ma trận Hausdorff trên nhóm Heisenberg.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của Luận án là lớp toán tử Hausdorff và giao hoán tử của chúng trên trường thực và nhóm Heisenberg. Lớp toán tử này chứa nhiều lớp toán tử như toán tử Hardy, toán tử Hardy liên hợp, toán tử Cesàro, toán tử Hardy-Cesàro, toán tử tích phân phân số Riemann-Liouville, toán tử trung bình Hardy-Littlewood trên các không gian kiểu Morrey-Herz có trọng. Phạm vi nghiên cứu của Luận án được thể hiện thông qua các nội dung sau:

• **Nội dung 1:** Nghiên cứu điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng thuần nhất.

- Ước lượng chuẩn của toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ và kết luận mới về ước lượng chuẩn của toán tử Hardy, toán tử Hardy liên hợp cho các không gian trên với trọng lũy thừa.

- Nghiên cứu điều kiện đủ cho tính bị chặn cho giao hoán tử của toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có hai trọng thuần nhất.

• **Nội dung 2:** Ước lượng chuẩn của toán tử Hausdorff đa tuyến tính $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có hai trọng lũy thừa.

- Kết luận ước lượng chuẩn của toán tử Hardy-Ceàro đa tuyến tính trên tích các không gian ở trên.

- Nghiên cứu điều kiện đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff đa tuyến tính $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian tâm Morrey, không gian Morrey-Herz có hai trọng Muckenhoupt.

• **Nội dung 3:** Nghiên cứu điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ trên nhóm Heisenberg với biểu trưng thuộc không gian ℓ-tâm BMO, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng lũy thừa hoặc trọng Muckenhoupt.

- Nghiên cứu điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử toán tử ma trận Hausdorff $\mathscr{H}^{b}_{\Phi,A}$ trên nhóm Heisenberg với biểu trưng thuộc không gian ℓ-tâm BMO, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng lũy thừa hoặc trọng Muckenhoupt.

4. Phương pháp nghiên cứu

• Để nghiên cứu tính bị chặn của toán tử Hausdorff trên trường số thực và nhóm Heisenberg, chúng tôi dựa vào các phương pháp được Coifman-Rochberg-Weiss [23] xây dựng trên các không gian thuần nhất với các biến đổi đặc trưng của trọng lũy thừa và trọng Muckenhoupt. Đánh giá các đại lượng bằng cách chia nhỏ, kết hợp với các phép biến đổi và áp dụng các bất đẳng thức quan trọng trong giải tích. Chiều ngược lại, chúng tôi sử dụng lược đồ mà Xiao [84] đã phát triển. Trong đó, các hàm thử được lựa chọn để đưa ra các ước lượng dưới cho chuẩn của toán tử.

• Đối với các nghiên cứu về giao hoán tử, dựa trên phương pháp nổi tiếng của Coifman-Rochberg-Weiss [23]. Trong đó, mấu chốt là đưa về ước lượng dao động trung bình kết hợp với một số kĩ thuật đặc trưng khi tiếp cận toán tử Hausdorff được xây dựng bởi D. Fan, Chen, Li, Fu, Lu và các cộng sự (xem [11], [12], [21], [32]).

5. Kết quả của luận án

Luận án đã đạt được các kết quả chính sau đây:

• Nghiên cứu điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng thuần nhất. Ngoài ra, chúng tôi ước lượng được chuẩn của toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ và kết luận mới về ước lượng chuẩn của toán tử Hardy, toán tử Hardy liên hợp cho các không gian trên với trọng lũy thừa. Hơn nữa, chúng tôi đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}^{b}_{\Phi,\Omega}$ với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có hai trọng thuần nhất.

• Ước lượng được chuẩn của toán tử Hausdorff đa tuyến tính $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có hai trọng lũy thừa. Ngoài ra, chúng tôi ước lượng được chuẩn của toán tử Hardy-Ceàro đa tuyến tính trên tích các không gian ở trên. Hơn nữa, đưa ra được điều kiện đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff đa tuyến tính $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian tâm Morrey, không gian Morrey-Herz có hai trọng Muckenhoupt.

• Nghiên cứu điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}^{b}_{\Phi,\Omega}$ trên nhóm Heisenberg với biểu trưng thuộc không gian ℓ-tâm BMO, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng lũy thừa hoặc trọng Muckenhoupt. Đồng thời, chúng tôi đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử toán tử ma trận Hausdorff $\mathscr{H}^{b}_{\Phi,A}$ trên nhóm Heisenberg với biểu trưng thuộc không gian ℓ-tâm BMO, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng lũy thừa hoặc trọng Muckenhoupt.

Các kết quả mới của luận án có ý nghĩa khoa học trong giải tích điều hòa, phương trình đạo hàm riêng và lý thuyết các không gian hàm. Hy vọng, trong thời gian tới thiết lập được mối quan hệ giữa toán tử tích phân kì dị, toán tử cực đại Hardy-Littlewood và toán tử Hausdorff.

Các kết quả chính của luận án đã được công bố trong 03 bài báo trên các tạp chí khoa học chuyên ngành quốc tế có uy tín (trong danh mục ISI và Scopus), đã được báo cáo tại:

• Xêmina Giải tích Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2.

6. Cấu trúc của luận án

Ngoài phần mở đầu, kết luận, kiến nghị, danh mục các công trình công bố và danh mục tài liệu tham khảo. Luận án gồm 4 chương:

• Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị cần thiết cho các chương sau;

• Chương 2 trình bày các kết quả về ước lượng chuẩn của toán tử Hausdorff thô, tính bị chặn của giao hoán tử của nó trên các không gian kiểu Morrey-Herz có trọng;

• Chương 3 trình bày các kết quả về ước lượng chuẩn của toán tử Hausdorff đa tuyến tính trên các không gian kiểu Morrey-Herz có hai trọng;

• Chương 4 trình bày các kết quả về tính bị chặn cho giao hoán tử Hausdorff trên nhóm Heisenberg.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả sẽ được sử dụng trong toàn bộ luận án. Bởi vì luận án nghiên cứu một số kết quả đồng thời trên trường số thực và trên nhóm Heisenberg, cho nên một số kiến thức cơ sở như không gian Lebesgue, bất đẳng thức Minkowski, bất đẳng thức Hölder, điều kiện Hölder ngược, ... sẽ được trình bày trên không gian đo được tổng quát và được sử dụng cho cả hai trường hợp trên trường số thực và trên nhóm Heisenberg. Bên cạnh đó, chúng tôi nhắc lại các không gian kiểu Morrey-Herz có trọng và trình bày sơ lược về nhóm Heisenberg.

1.1. Không gian Lebesgue

Giả sử $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ là một không gian đo với μ là một độ đo σ-hữu hạn trên σ-đại số $\mathfrak{M}$ trong không gian X. Cho $0 < q < \infty$, kí hiệu $L^q(X, \mathfrak{M}, \mu)$ hay $L^q(X)$ gồm các hàm f đo được trên X thỏa mãn

$$\|f\|_{L^q(X)} = \left(\int_X |f(x)|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \tag{1.1}$$

Kí hiệu $L^\infty(X)$ gồm các hàm giá trị phức, đo được trên X sao cho

$$\|f\|_{L^\infty(X)} = \inf\{B > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > B\}) = 0\} < \infty. \tag{1.2}$$

Khi đó $L^q(X)$ với $0 < q < \infty$ là một không gian vectơ trên trường phức. Hai hàm trong không gian $L^q(X)$ được gọi là bằng nhau nếu chúng bằng nhau từng điểm hầu khắp theo độ đo μ. Với $1 \leq q < \infty$, ta có $L^q(X)$ là một không gian Banach với chuẩn $\|\cdot\|_{L^q(X)}$. Trường hợp $0 < q < 1$, không gian $L^q(X)$ là tựa Banach với tựa chuẩn $\|\cdot\|_{L^q(X)}$.

Trường hợp $X = \mathbb{R}^n$ và $d\mu(x) = \omega(x)dx$ trong đó ω là hàm đo được không âm, khả tích địa phương trên $\mathbb{R}^n$ thì ta kí hiệu $L^q_\omega(\mathbb{R}^n)$ thay cho

$L^q(X)$. Hơn nữa, hàm thử dưới đây sẽ được sử dụng trong phần tiếp theo của luận án.

Ví dụ 1.1 ([84], trang 662). Với $\varepsilon > 0$ tùy ý. Ta đặt

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } |x| \le 1 \\ |x|^{-\frac{n}{q}-\varepsilon} & \text{nếu } |x| > 1. \end{cases}$$

Khi đó, f_ε thuộc $L^q(\mathbb{R}^n)$ với mọi $0 < q < \infty$.

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$\|f_\varepsilon\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left|f_\varepsilon(x)\right|^q dx = \int_{|x|>1} |x|^{-n-q\varepsilon} dx = \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{q\varepsilon\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} < \infty.$$

Do đó, $f_\varepsilon \in L^q(\mathbb{R}^n)$. □

Định lí 1.1. (Định lí hội tụ Lebesgue [[33], trang 54]) *Giả sử $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ là một dãy các hàm trong $L^1(X)$ hội tụ điểm hầu khắp nơi theo độ đo μ đến hàm f trên X và giả sử tồn tại một hàm $g \in L^1(X)$ sao cho $|f_k(x)| \le g(x)$, μ-hầu khắp nơi trên X với mọi k. Khi đó, $f \in L^1(X)$ và $\int_X f(x)d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X f_k(x)d\mu$.*

Định lí 1.2. (Bất đẳng thức Hölder [[70], trang 153]) *Nếu $f \in L^q(X)$ và $g \in L^{q'}(X)$ thì $fg \in L^1(X)$. Hơn nữa*

$$\|fg\|_{L^1(X)} \le \|f\|_{L^q(X)}\|g\|_{L^{q'}(X)},$$

trong đó $1 \le q, q' \le \infty$ thỏa mãn $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Định lí 1.3. (Bất đẳng thức Minkowski [[70], trang 159]) *Giả sử $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ và $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ là các không gian đo σ-hữu hạn và $f(x,y)$ là một hàm giá trị phức với $\mu \times \nu$-đo được trên $X \times Y$ sao cho với ν-hầu khắp $y \in Y, f(\cdot, y) \in L^q(X)$ với $1 \le q \le \infty$. Khi đó*

$$\left(\int_X \left|\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} \le \int_Y \left(\int_X \left|f(x,y)\right|^q d\mu(x)\right)^{\frac{1}{q}} d\nu(y),$$

với giả thiết vế trái của bất đẳng thức trên là hữu hạn.

Định lí 1.4. (Fubini [[33], trang 68]) *Giả sử $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ và $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$ là các không gian đo σ-hữu hạn và $f(x, y)$ là một hàm đo được theo độ đo $\lambda = \mu \times \nu$. Nếu $f(x, y)$ không âm hoặc khả tích trên tập $A \times B \in \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ thì ta có*

$$\int_{A\times B} f(x,y)d\lambda = \int_A \left(\int_B f(x,y)d\nu \right) d\mu = \int_B \left(\int_A f(x,y)d\mu \right) d\nu.$$

1.2. Một số kí hiệu và các không gian hàm

Cho $\|T\|_{X\to Y}$ là chuẩn của toán tử T giữa hai không gian vectơ định chuẩn X, Y. Với $a \in \mathbb{R}^n$ và $r > 0$, kí hiệu $B(a, r)$ là hình cầu tâm a với bán kính r. Kí hiệu $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ và $|S_{n-1}| = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$. Với bất kì số thực $q > 0$, kí hiệu q' là số thực liên hợp của q sao cho $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Tiếp theo, viết $a \lesssim b$ có nghĩa có một hằng số dương C không phụ thuộc vào biến sao cho $a \leq Cb$. Kí hiệu $f \simeq g$ được hiểu là f tương đương với g $(C^{-1}f \leq g \leq Cf)$.

Cho E là tập đo được Lebesgue, kí hiệu χ_E là hàm đặc trưng của E. Hàm trọng ω là hàm không âm và khả tích địa phương trên $\mathbb{R}^n$ và $\omega(E) = \int_E \omega(x)dx$. Một số kí hiệu khác, $\chi_k = \chi_{C_k}$, $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 2^k\}$ và $C_k = B_k \setminus B_{k-1}$, với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

Cho λ, λ_i là các số thực, $\beta, \gamma, \beta_1, \gamma_1, ..., \beta_m, \gamma_m$ là các số thực lớn hơn $-n$ và $1 \leq p, q < \infty$, $1 \leq p_i, q_i < \infty$ với mọi $i = 1, ..., m$ thỏa mãn

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{p}, \quad \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m} = \frac{1}{q}.$$

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ khả nghịch có chuẩn xác định

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ta có $|Ax| \leq \|A\||x|$ với bất kì $x \in \mathbb{R}^n$ và $\|A\|^{-n} \leq |\det(A^{-1})| \leq \|A^{-1}\|^n$. Nếu $A_i(t)$ là ma trận thực trực giao với hầu khắp t trên $\mathbb{R}^n$ và $A_i(t)$

thỏa mãn điều kiện

$$\rho_{\vec{A}} := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}^n, i=1,\ldots,m} \|A_i(t)\| \cdot \|A_i^{-1}(t)\| < \infty. \tag{1.3}$$

Khi đó, $\|A_i(t)\| \simeq \|A_i^{-1}(t)\|^{-1}$ hơn nữa

$$\|A_i(t)\|^\eta \lesssim \|A_i^{-1}(t)\|^{-\eta}, \text{ với mọi } \eta \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

$$|A_i(t)x|^\eta \gtrsim \|A_i^{-1}(t)\|^{-\eta}.|x|^\eta, \text{ với mọi } \eta \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Không gian $L^q_\omega(\mathbb{R}^n)$ với $0 < q < \infty$ gồm tập các hàm $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ có

$$\|f\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q \omega(x) dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Không gian $L^q_{\omega,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ gồm các hàm f đo được trên $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\int_K |f(x)|^q \omega(x) dx < \infty$, với bất kì tập con compact K của $\mathbb{R}^n$. Không gian $L^q_{\omega,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ được định nghĩa tương tự không gian $L^q_{\omega,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại định nghĩa về không gian Lipschitz, các không gian như: không gian tâm Morrey, không gian Herz và không gian Morrey-Herz trường hợp có một trọng và có hai trọng. Thông tin về các không gian trên và ứng dụng trong giải tích, có thể tham khảo trong [1], [9] và [15] hoặc cuốn sách chuyên khảo [63].

Định nghĩa 1.1. Cho $0 < \beta \leq 1$. Không gian Lipschitz $Lip^\beta(\mathbb{R}^n)$ gồm các hàm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sao cho

$$\|f\|_{Lip^\beta(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\beta} < \infty.$$

Không gian Morrey được giới thiệu bởi Ch. B. Jr. Morrey (xem [66]) khi nghiên cứu hệ phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2, được ứng dụng trong nghiên cứu tính chính quy nghiệm. Đặc biệt, với hệ eliptic phi tuyến, sử dụng để nghiên cứu tính bị chặn của một số toán tử cổ điển trong giải tích điều hòa như toán tử Hardy-Littlewood cực đại, toán tử tích phân kì dị Calderón-Zygmund (xem [50]). Về sau, không gian tâm Morrey có trọng (xem [1]) được nghiên cứu xuất phát từ tính trơn của nghiệm phương trình đạo hàm riêng.

Định nghĩa 1.2. Cho $0 < q < \infty, \lambda \in \mathbb{R}$ và $1 + \lambda q > 0$. Không gian tâm Morrey có trọng $\dot{M}_{\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$ gồm các hàm $f \in L_{\omega,\mathrm{loc}}^{q}(\mathbb{R}^n)$ sao cho

$$\|f\|_{\dot{M}_{\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{R>0}\left(\frac{1}{\omega\big(B(0,R)\big)^{1+\lambda q}}\int_{B(0,R)}\Big|f(x)\Big|^q\omega(x)dx\right)^{1/q} < \infty.$$

Định nghĩa 1.3. Cho $0 < q < \infty, \lambda \in \mathbb{R}$ và $1 + \lambda q > 0$. Giả sử ν, ω là hai hàm trọng. Không gian tâm Morrey có hai trọng $\dot{M}_{\nu,\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$ gồm các hàm $f \in L_{\omega,\mathrm{loc}}^{q}(\mathbb{R}^n)$ sao cho

$$\begin{aligned}\|f\|_{\dot{M}_{\nu,\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{R>0}\left(\frac{1}{\nu(B(0,R))^{1+\lambda q}}\int_{B(0,R)}|f(x)|^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \sup_{R>0}\frac{1}{\nu(B(0,R))^{\lambda+\frac{1}{q}}}\|f\|_{L_{\omega}^{q}(B(0,R))} < \infty.\end{aligned}$$

Đặc biệt, nếu $\nu = \omega$ thì $\dot{M}_{\nu,\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n) = \dot{M}_{\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$.

Không gian Herz (xem [45]) dùng để nghiên cứu tính liên tục của toán tử trong giải tích điều hòa. Bên cạnh đó, không gian Herz đóng vai trò quan trọng trong việc mô tả tính chất đặc trưng của hàm trong không gian Hardy cổ điển. Về sau, không gian Herz có trọng được nghiên cứu trong [9] và [63].

Định nghĩa 1.4. Cho $0 < p, q < \infty$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Không gian Herz có trọng $\dot{K}_{\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)$ gồm tập các hàm $f \in L_{\omega,\mathrm{loc}}^{q}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ sao cho

$$\|f\|_{\dot{K}_{\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p}\|f\chi_k\|_{L_{\omega}^{q}(\mathbb{R}^n)}^{p}\Big)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Nếu $\alpha = 0, p = q$ và $\omega = 1$ thì $\dot{K}_{\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$.

Định nghĩa 1.5. Cho $0 < p, q < \infty$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Giả sử ν và ω là hai hàm trọng. Không gian Herz có hai trọng $\dot{K}_{\nu,\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)$ gồm các hàm $f \in L_{\omega,\mathrm{loc}}^{q}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$ sao cho

$$\|f\|_{\dot{K}_{\nu,\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\nu(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}}\|f\chi_k\|_{L_{\omega}^{q}(\mathbb{R}^n)}^{p}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Chú ý rằng, nếu ν là hàm hằng thì $\dot{K}_{\nu,\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}_{\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Năm 2005, Lu và Xu [61] đã giới thiệu không gian Morrey-Herz. Sau đó, không gian Morrey-Herz có trọng được giới thiệu trong [31], [62], [63].

Định nghĩa 1.6. Cho $0 < p,q < \infty, \alpha \in \mathbb{R}$ và $\lambda \geq 0$. Không gian Morrey-Herz có trọng $M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)$ gồm các hàm $f \in L^q_{\omega,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ sao cho

$$\|f\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \|f\chi_k\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Nếu $\lambda = 0$ thì $M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}_{\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Định nghĩa 1.7. Cho $0 < p,q < \infty, \alpha \in \mathbb{R}$ và $\lambda \geq 0$. Giả sử ν, ω là hai hàm trọng. Không gian Morrey-Herz có hai trọng $M\dot{K}_{\nu,\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)$ gồm các hàm $f \in L^q_{\omega,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ sao cho

$$\|f\|_{M\dot{K}_{\nu,\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} \left(\nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} \nu(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}} \|f\chi_k\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}} \right) < \infty.$$

Nhận thấy, nếu $\nu = \omega$ là hằng số thì $M\dot{K}_{\nu,\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n) = M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, nếu cho $\lambda = 0$ thì $M\dot{K}_{\nu,\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}_{\nu,\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)$. Một số ứng dụng của không gian Morrey-Herz có hai trọng cho toán tử Hardy-Cesàro, có thể tham khảo trong [9], [15].

1.3. Trọng thuần nhất, trọng lũy thừa và trọng Muckenhoupt

Định nghĩa 1.8. (xem [14], trang 700) Cho $\gamma \in \mathbb{R}$. Kí hiệu $\mathscr{W}_\gamma$ gồm các hàm ω đo được Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$, $\omega(x) > 0$ với hầu khắp $x \in \mathbb{R}^n, 0 < \int_{S_{n-1}} \omega(y) d\sigma(y) < \infty$ và ω là trọng thuần nhất tuyệt đối bậc γ, nghĩa là $\omega(tx) = |t|^\gamma \omega(x)$ với mọi $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Kí hiệu $\mathscr{W} = \bigcup\limits_{\gamma} \mathscr{W}_\gamma$. Nhận thấy rằng $\mathscr{W}$ chứa cả trọng lũy thừa $|x|^\gamma$ (xem [9], [14]). Các kết quả về sau, chúng tôi kí hiệu ω là một hàm trọng thuộc $\mathscr{W}_\gamma$. Bổ đề dưới đây là một kết quả quan trọng của các hàm trọng $\mathscr{W}_\gamma$.

Bổ đề 1.1. (xem [9]) *Cho $\omega \in \mathscr{W}_\gamma$ và $\gamma > -n$. Khi đó, với bất kì $m \in \mathbb{Z}$ tồn tại hằng số $C = C(\omega, n) > 0$ sao cho*

$$\omega(B_m) = C|B_m|^{\frac{\gamma+n}{n}} \ \text{ và } \ \omega(C_m) = (1 - 2^{-\gamma-n})\omega(B_m).$$

Tiếp theo, trọng Muckenhoupt A_ξ được nghiên cứu lần đầu bởi Benjamin Muckenhoupt [68] trong không gian Euclidean, để mô tả các hàm cực đại Hardy–Littlewood bị chặn trên không gian L^p có trọng.

Định nghĩa 1.9. Cho $1 < \xi < \infty$. Hàm trọng $\omega \in A_\xi(\mathbb{R}^n)$ nếu tồn tại một hằng số $C > 0$ sao cho mọi hình cầu $B \subset \mathbb{R}^n$,

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^{-\frac{1}{\xi-1}}dx\right)^{\xi-1} \leq C.$$

Trọng $\omega \in A_1(\mathbb{R}^n)$ nếu có một hằng số $C > 0$ sao cho với mọi hình cầu $B \subset \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx \leq C \operatorname*{essinf}_{x\in B} \omega(x).$$

Kí hiệu $A_\infty(\mathbb{R}^n) = \bigcup\limits_{1\leq\xi<\infty} A_\xi(\mathbb{R}^n)$.

Điều đáng chú ý là $A_\infty(\mathbb{R}^n)$ có liên kết với điều kiện Hölder ngược. Cụ thể hơn, nếu tồn tại $r > 1$ và hằng số C cố định sao cho

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{C}{|B|}\int_B \omega(x)dx,$$

với mọi hình cầu $B \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó, ta nói ω thỏa mãn điều kiện Hölder ngược có bậc r và kí hiệu $\omega \in RH_r$. Theo Định lí 19 và Hệ quả 21 trong [48], $\omega \in A_\infty$ nếu và chỉ nếu tồn tại $r > 1$ sao cho $\omega \in RH_r$. Hơn nữa, nếu $\omega \in RH_r, r > 1$ thì $\omega \in RH_{r+\varepsilon}$ với $\varepsilon > 0$ nào đó. Ta viết $r_\omega = \sup\{r > 1 : \omega \in RH_r\}$ biểu thị chỉ số tới hạn của ω cho điều kiện Hölder ngược.

Sau đây, chúng tôi nhắc lại các kết quả quan trọng liên quan đến trọng Muckenhoupt (xem [36], [76]).

Mệnh đề 1.1. *i)* $A_\xi(\mathbb{R}^n) \subsetneq A_\eta(\mathbb{R}^n)$*, với* $1 \le \xi < \eta < \infty$.
ii) Nếu $\omega \in A_\xi(\mathbb{R}^n), 1 < \xi < \infty$ *thì có* $\varepsilon > 0$ *sao cho* $\xi - \varepsilon > 1$ *và* $\omega \in A_{\xi-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$.

Mệnh đề 1.2. *Nếu* $\omega \in A_\xi(\mathbb{R}^n), 1 \le \xi < \infty$ *thì với bất kì* $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ *và bất kì hình cầu* $B \subset \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f(x)|dx \le C\left(\frac{1}{\omega(B)}\int_B |f(x)|^\xi \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{\xi}}.$$

Mệnh đề 1.3. *Cho* $\omega \in A_\xi \cap RH_\delta$*, với* $\xi \ge 1$ *và* $\delta > 1$*. Khi đó tồn tại hai hằng số* $C_1, C_2 > 0$ *sao cho*

$$C_1\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{\xi} \le \frac{\omega(E)}{\omega(B)} \le C_2\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{\frac{\delta-1}{\delta}},$$

với bất kì tập con E đo được trong hình cầu B. Đặc biệt, với $\lambda > 1$ *ta có*

$$\omega(B(x_0,\lambda R)) \le C\lambda^{n\xi}\omega(B(x_0,R)).$$

1.4. Nhóm Heisenberg

Lý thuyết về nhóm Heisenberg có vai trò quan trọng trong một số ngành toán học như giải tích điều hòa, lý thuyết biểu diễn, giải tích phức, phương trình đạo hàm riêng và cơ học lượng tử (xem [76], [79]). Trong những năm gần đây, nhiều nhà toán học đã nghiên cứu toán tử Hardy, toán tử Hardy-Cesàro có trọng và toán tử Hausdorff trên nhóm Heisenberg (xem [21], [39], [72], [73], [81], [82], [83]).

Nhóm Heisenberg $\mathbb{H}^n$ là tập các ma trận cấp $(n+2)\times(n+2)$ có dạng

$$\mathbb{H}^n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & I_n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R} \right\},$$

trong đó, I_n là ma trận đơn vị. Trên $\mathbb{H}^n$ xác định quy tắc nhân

$$x\cdot y = \Big(x_1+y_1, ..., x_{2n}+y_{2n}, x_{2n+1}+y_{2n+1}+2\sum_{j=1}^n (y_j x_{n+j} - x_j y_{n+j})\Big),$$

với $x = (x_1, ..., x_{2n}, x_{2n+1}), y = (y_1, ..., y_{2n}, y_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$. Phần tử đơn vị là $0 \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ và phần tử nghịch đảo của x là $x^{-1} = (-x_1, ..., -x_{2n}, -x_{2n+1})$.

Nhóm Heisenberg $\mathbb{H}^n$ là một không gian thuần nhất kiểu Coifman và Weiss (xem [24]) với tính co giãn

$$\delta_r x = (rx_1, ..., rx_{2n}, r^2 x_{2n+1}), \text{ với mọi } r > 0.$$

Khoảng cách trên nhóm Heisenberg $\mathbb{H}^n$ được xác định bởi

$$d(x, y) = |y^{-1} \cdot x|_h.$$

Cho $E \subseteq \mathbb{H}^n$, kí hiệu $|E|$ là độ đo của tập E. Khi đó

$$|\delta_r(E)| = r^Q |E|, \;\; d(\delta_r x) = r^Q dx,$$

với $Q = 2n + 2$ được gọi là số chiều thuần nhất. Ta có

$$|x|_h = \left(\Big(\sum_{i=1}^{2n} x_i^2 \Big)^2 + x_{2n+1}^2 \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Với $x \in \mathbb{H}^n, r > 0$, các hình cầu và mặt cầu tâm x có bán kính r trên $\mathbb{H}^n$ xác định bởi

$$\begin{aligned} B(x, r) &= \{y \in \mathbb{H}^n : d(x, y) < r\}, \\ B'(x, r) &= \{y \in \mathbb{H}^n : d(x, y) \le r\}, \\ S(x, r) &= \{y \in \mathbb{H}^n : d(x, y) = r\}. \end{aligned}$$

Ta có

$$|B(x, r)| = |B(0, r)| = v_Q r^Q,$$

ở đó, v_Q là thể tích hình cầu đơn vị $B(0, 1)$ trên $\mathbb{H}^n$ với

$$v_Q = \frac{2\pi^{n+1/2}\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{n+1}{2})}.$$

Mặt cầu đơn vị $S(0, 1)$ thường được kí hiệu S_{Q-1}, và diện tích của S_{Q-1} là $\omega_Q = Q v_Q$ (xem [79]).

Với bất kì tập đo được Lebesgue E, kí hiệu χ_E là hàm đặc trưng của E, và $\omega(E) = \int_E \omega(x)dx$ với bất kì hàm trọng ω là hàm không âm và khả tích địa phương trên $\mathbb{H}^n$. Kí hiệu $\chi_k = \chi_{C_k}$, $C_k = U_k \setminus U_{k-1}$, ở đó $U_k = \left\{x \in \mathbb{H}^n : |x|_h \leq 2^k\right\}$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

Ma trận $A = (a_{ij})_{(2n+1)\times(2n+1)}$ có chuẩn xác định

$$||A|| = \sup_{x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}} \frac{|Ax|_h}{|x|_h}.$$

Nếu A khả nghịch thì ta có $||A||^{-Q} \leq \left|\det(\mathrm{A}^{-1})\right| \leq \left\|A^{-1}\right\|^{Q}$. Hơn nữa, từ $|Ax|_h \leq ||A|| |x|_h$ và $|x|_h = |A^{-1}Ax|_h \leq ||A^{-1}|| |Ax|_h$, suy ra

$$|x|_h^\alpha \min\{||A||^\alpha, ||A^{-1}||^{-\alpha}\} \leq |Ax|_h^\alpha \leq |x|_h^\alpha \max\{||A||^\alpha, ||A^{-1}||^{-\alpha}\}, \quad (1.6)$$

với bất kì $\alpha \in \mathbb{R}$ và $x \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$.

Tiếp theo, chúng tôi nhắc lại định nghĩa không gian ℓ-tâm BMO kiểu của John-Nirenberg trên nhóm Heisenberg. Để biết thêm thông tin và ứng dụng trong giải tích điều hòa, có thể tham khảo trong [76].

Định nghĩa 1.10. Cho $1 \leq q < \infty$, $\ell < \frac{1}{Q}$ và ω là hàm trọng. Không gian ℓ-tâm BMO là $C\dot{M}O_\omega^{\ell,q}(\mathbb{H}^n)$ gồm các hàm $f \in L^q_{\omega,\mathrm{loc}}(\mathbb{H}^n)$ sao cho

$$||f||_{C\dot{M}O_\omega^{\ell,q}(\mathbb{H}^n)} = \sup_{R>0} \left(\frac{1}{\omega(B(0,R))^{1+\ell q}} \int_{B(0,R)} |f(x) - f_{\omega,B(0,R)}|^q \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (1.7)$$

ở đó,

$$f_{\omega,B(0,R)} = \frac{1}{\omega(B(0,R))} \int_{B(0,R)} f(x)\omega(x)dx.$$

Kí hiệu $C\dot{M}O_\omega^q(\mathbb{H}^n)$ thay cho $C\dot{M}O_\omega^{0,q}(\mathbb{H}^n)$.

Chương 2

ƯỚC LƯỢNG CHUẨN CỦA TOÁN TỬ HAUSDORFF THÔ $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ VÀ TÍNH BỊ CHẶN CỦA GIAO HOÁN TỬ $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ TRÊN KHÔNG GIAN KIỂU MORREY–HERZ

Trong chương này, chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff thô (rough Hausdorff) $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng thuần nhất. Sau đó, chúng tôi có ước lượng chuẩn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ và kết luận mới về ước lượng chuẩn của toán tử Hardy, toán tử Hardy liên hợp cho các không gian trên với trọng lũy thừa. Đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có hai trọng thuần nhất.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo [1] trong danh mục công trình đã công bố.

2.1. Giới thiệu

Năm 2012, Chen, Fan và Li [12] giới thiệu một dạng khác của toán tử Hausdorff gọi là toán tử Hausdorff thô. Cho $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ là hàm bán kính đo được, $\Phi(x) = \Phi(|x|)$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$, và $\Omega : S_{n-1} \to \mathbb{C}$ là hàm đo được sao cho $\Omega(x) \neq 0$ hầu khắp với $x \in S_{n-1}$. Toán tử Hausdorff thô có công thức

$$\mathscr{H}_{\Phi,\Omega} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi\left(x|y|^{-1}\right)}{|y|^n} \Omega\left(y'\right) f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Sử dụng phép đổi biến trong hệ tọa độ cực, ta có

$$\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f(x) = \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} \frac{\Phi(t)}{t}\Omega(y')f(|x|t^{-1}y')d\sigma(y')dt. \tag{2.2}$$

Khi chọn Φ và Ω thích hợp, toán tử Hausdorff thô trở thành toán tử Hardy và toán tử Hardy liên hợp. Cụ thể:
Chọn $\Phi(t) = t^{-n}\chi_{(1,\infty)}(t)$ và $\Omega \equiv 1$ ta có toán tử Hardy

$$\mathscr{H}f(x) = \frac{1}{|x|^n}\int_{|y|\leq|x|} f(y)dy. \tag{2.3}$$

Chọn $\Phi(t) = \chi_{(0,1)}(t)$ và $\Omega \equiv 1$ ta có toán tử Hardy liên hợp

$$\mathscr{H}^\star f(x) = \int_{|y|>|x|} \frac{f(y)}{|y|^n}dy. \tag{2.4}$$

Trong [12], các tác giả đã chứng minh được toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên không gian $L^p(\mathbb{R}^n)$ với $1 < p < \infty$,

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\Omega\|_{L^{p'}(S_{n-1})}|S_{n-1}|^{\frac{1}{p}}\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t}t^{\frac{n}{p}}dt\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

và kết luận về tính bị chặn của toán tử Hardy, toán tử Hardy liên hợp

$$\|\mathscr{H}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{|S_{n-1}|}{n}\frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.5}$$

$$\|\mathscr{H}^\star f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq p\frac{|S_{n-1}|}{n}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.6}$$

Hơn nữa, Chen, Fan và Li đã nhận thấy toán tử Hausdorff thô tương thích tốt hơn trên không gian Hardy kiểu Herz $H\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ và không gian Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ với $0 < p < 1$. Khi đó, các tác giả đã đạt được các kết quả mới tổng quát hơn các kết quả đã có cho toán tử Hardy nhiều chiều cũng như toán tử Hardy liên hợp.

Thật thú vị khi thấy rằng, lý thuyết về các toán tử trung bình Hardy-Littlewood có trọng, toán tử Hardy-Cesàro và toán tử Hausdorff đã được phát triển trong các bối cảnh khác nhau (xem [6], [10], [14], [15], [67], [84]). Năm 2016, N. M. Chương, Đ. V. Dương và H. D.

Hưng [9] đã nghiên cứu tính bị chặn của toán tử Hardy-Cesàro và giao hoán tử của nó trên không gian tâm Morrey, không gian Herz và không gian Morrey-Herz có trọng thuần nhất. Từ các kết quả trên, chúng tôi mở rộng các kết quả đã biết trong [9], [12] cho toán tử Hausdorff thô và trên các không gian hàm tổng quát hơn.

Cho $b \in Lip^{\beta}, 0 < \beta \leq 1$ là một hàm đo được, $\mathscr{M}_b$ là một toán tử nhân xác định bởi $\mathscr{M}_b f(x) = b(x).f(x)$ với bất kỳ hàm f đo được. Nếu $\mathscr{H}$ là một toán tử tuyến tính trên các không gian hàm đo được, khi đó giao hoán tử kiểu Coifman-Rochberg-Weiss của $\mathscr{M}_b$ và $\mathscr{H}$ có dạng

$$[\mathscr{M}_b, \mathscr{H}]f(x) = (\mathscr{M}_b \circ \mathscr{H} - \mathscr{H} \circ \mathscr{M}_b)f(x).$$

Năm 1976, R. Coifman, R. Rochberg và G. Weiss [23] đã chứng minh giao hoán tử của toán tử tích phân kì dị Calderón-Zygmund bị chặn trên $L^q(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu $b \in BMO(\mathbb{R}^n), 1 < q < \infty$. Trong [34] các tác giả đã nghiên cứu giao hoán tử của toán tử Hardy-Littlewood có trọng trên các không gian Lebesgue. Về sau, các tác giả trong [78] đã mở rộng trên không gian Morrey-Herz. Khi $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$, ta có giao hoán tử kiểu Coifman-Rochberg-Weiss của toán tử Hausdorff thô là

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega} f(x) &= b(x)\mathscr{H}_{\Phi,\Omega} f(x) - \mathscr{H}_{\Phi,\Omega}(bf)(x) \\ &= \int_0^{\infty} \int_{S_{n-1}} \frac{\Phi(t)}{t} \Omega(y') f(|x|t^{-1}y') \left[b(x) - b(|x|t^{-1}y') \right] d\sigma(y') dt. \quad (2.7)\end{aligned}$$

Ứng dụng của lý thuyết về giao hoán tử có đóng góp quan trọng trong nghiên cứu tính chính quy nghiệm của phương trình đạo hàm riêng, có thể tham khảo thêm trong [8], [28], [77].

Lý thuyết về các toán tử dạng thô như toán tử cực đại, toán tử tích phân kì dị, toán tử giả vi phân, toán tử Hardy đóng vai trò quan trọng trong giải tích điều hòa, phương trình đạo hàm riêng và lý thuyết về các không gian hàm (xem [32], [35], [42], [43], [75], [76]). Do đó, việc xuất hiện là tự nhiên khi mở rộng nghiên cứu toán tử Hausdorff thô trên một số không gian hàm được tổng quát. Có một mối liên hệ giữa toán tử tích phân kì dị Calderón-Zygmund và toán tử Hausdorff. Khi đó, Chen, Dai, Fan và Zhu [11] đã đưa ra kết quả mới về tính bị chặn của toán tử Hausdorff trên không gian Lebesgue và không gian Hardy. Hy vọng, trong thời gian tới, thiết lập được mối liên hệ giữa toán tử tích phân kì dị dạng thô và toán tử Hausdorff.

2.2. Toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ và lớp trọng lũy thừa

Trong mục này, chúng tôi trình bày kết quả về điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian có trọng thuần nhất như: không gian tâm Morrey (Định lí 2.1), không gian Herz (Định lí 2.2), không gian Morrey-Herz (Định lí 2.3).

Định lí 2.1. *Cho $1 \le q < \infty, 1 + \lambda q > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \gamma > -n$ và $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$.*
i) Nếu $\omega(x') \ge c > 0$ với mọi $x' \in S_{n-1}$ và

$$\mathscr{C}_1 = \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1+(n+\gamma)\lambda}} dt < \infty,$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa,

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\mathscr{C}_1.$$

ii) Ngược lại, giả sử $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1}, \omega(x')d\sigma(x'))$ và Φ là hàm thực với dấu không đổi trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó nếu $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ thì $\mathscr{C}_1 < \infty$. Hơn nữa, chúng ta có

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \ge \frac{\|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})}}{\|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}}.\mathscr{C}_1.$$

Chứng minh. i) Trước hết, ta chứng minh điều kiện đủ của Định lí. Từ (2.2) và áp dụng bất đẳng thức Minkowski, ta có

$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)}$

$$= \sup_{R>0}\left(\frac{1}{\omega(B(0,R))^{1+\lambda q}}\int_{B(0,R)}\left|\int_0^\infty\left(\int_{S_{n-1}}\frac{\Phi(t)}{t}\Omega(y')f(|x|t^{-1}y')d\sigma(y')\right)dt\right|^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \sup_{R>0}\int_0^\infty\left(\int_{B(0,R)}\frac{1}{\omega(B(0,R))^{1+\lambda q}}\frac{|\Phi(t)|^q}{t^q}\left|\int_{S_{n-1}}\Omega(y')f(|x|t^{-1}y')d\sigma(y')\right|^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}dt.$$

Sử dụng phép đổi biến $u = xt^{-1}$, ta được

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq \sup_{R>0}\int_0^\infty\frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}}\left(\int_{B(0,t^{-1}R)}\frac{1}{\omega(B(0,R))^{1+\lambda q}}\left|\int_{S_{n-1}}\Omega(y')f(|u|y')d\sigma(y')\right|^q\omega(u)du\right)^{\frac{1}{q}}dt.$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder ta có

$$\int_{S_{n-1}}\Omega(y')f(|u|y')d\sigma(y')$$

$$\leq\left(\int_{S_{n-1}}|f(|u|y')|^q d\sigma(y')\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{S_{n-1}}|\Omega(y')|^{q'}d\sigma(y')\right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$=\left(\int_{S_{n-1}}|f(|u|y')|^q d\sigma(y')\right)^{\frac{1}{q}}\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}. \qquad (2.8)$$

Khi đó, suy ra

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)}\leq\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\sup_{R>0}\int_0^\infty\frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}}\Psi(t,R)dt, \qquad (2.9)$$

ở đó $\Psi(t,R) := \left(\int_{B(0,t^{-1}R)}\frac{1}{\omega(B(0,R))^{1+\lambda q}}\left(\int_{S_{n-1}}|f(|u|y')|^q d\sigma(y')\right)\omega(u)du\right)^{\frac{1}{q}}$.
Đặt $u = rx'$, sử dụng điều kiện $\omega(x') \geq c > 0$ với mọi $x' \in S_{n-1}$, ta có

$$\Psi(t,R)$$

$$=\left(\frac{1}{\omega(B(0,R))^{1+\lambda q}}\int_0^{t^{-1}R}\int_{S_{n-1}}\left(\int_{S_{n-1}}|f(|rx'|y')|^q d\sigma(y')\right)\omega(rx')d\sigma(x')r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\omega(S_{n-1})^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{\omega(B(0,R))^{1+\lambda q}}\int_0^{t^{-1}R}r^{\gamma+n-1}\left(\int_{S_{n-1}}|f(ry')|^q d\sigma(y')\right)dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\lesssim\omega(S_{n-1})^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{\omega(B(0,R))^{1+\lambda q}}\int_0^{t^{-1}R}r^{\gamma+n-1}\left(\int_{S_{n-1}}|f(ry')|^q\omega(y')d\sigma(y')\right)dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\lesssim \omega(S_{n-1})^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\omega(B(0,R))^{1+\lambda q}} \int_{B(0,t^{-1}R)} |f(x)|^q \omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.10}$$

Mặt khác,

$$\omega(B(0,t^{-1}R)) = \int_{B(0,t^{-1}R)} \omega(z)dz = \int_{B(0,R)} t^{-(\gamma+n)}\omega(y)dy = t^{-(\gamma+n)}\omega(B(0,R)),$$

vì vậy

$$\frac{1}{\omega(B(0,R))^{1+\lambda q}} = \frac{1}{t^{(\gamma+n)(1+\lambda q)}\omega(B(0,t^{-1}R))^{1+\lambda q}}. \tag{2.11}$$

Khi đó từ (2.9), (2.10) và (2.11), ta được

$$\begin{aligned} \|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} &\lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}. \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1+(n+\gamma)\lambda}}dt.\|f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\mathscr{C}_1.\|f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

ii) Tiếp theo, ta chứng minh điều kiện cần của Định lí. Giả sử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$. Ta chọn hàm

$$f(x) = |x|^{(n+\gamma)\lambda}|\Omega(x')|^{q'-2}\,\overline{\Omega}(x'), \text{ với } x' = \frac{x}{|x|}.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} &\|f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \\ &= \sup_{R>0}\left(\frac{1}{\omega(B(0,R))^{1+\lambda q}} \int_{B(0,R)} |x|^{(n+\gamma)\lambda q}|\Omega(x)'|^{(q'-2)p}|\Omega(x')|^q\omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \sup_{R>0}\left(\frac{1}{\omega(B(0,R))^{1+\lambda q}} \int_{B(0,R)} |x|^{(n+\gamma)\lambda q}|\Omega(x)'|^{q'}\omega(x)dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Vì $\gamma > -n$, nên có $\omega(B(0,R)) = \frac{R^{n+\gamma}}{n+\gamma}\omega(S_{n-1})$ và

$$\begin{aligned} &\int_{B(0,R)} |x|^{(n+\gamma)\lambda q}|\Omega(x')|^{q'}\omega(x)dx \\ &\qquad = \int_0^R \int_{S_{n-1}} |rx'|^{(n+\gamma)\lambda q}|\Omega(x')|^{q'}\omega(rx')r^{n-1}d\sigma(x')dr \end{aligned}$$

$$= \left(\int_0^R r^{(n+\gamma)(1+\lambda q)-1} dr\right)\left(\int_{S_{n-1}} |\Omega(x')|^{q'}\omega(x')d\sigma(x')\right)$$
$$= \frac{R^{(n+\gamma)(1+\lambda q)}}{(n+\gamma)(1+\lambda q)}\|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}.$$

Suy ra

$$\|f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} = \left(\frac{n+\gamma}{\omega(S_{n-1})}\right)^{\lambda}\frac{1}{(1+\lambda q)^{\frac{1}{q}}}\frac{1}{\omega(S_{n-1})^{\frac{1}{q}}}\|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))} < \infty.$$

Từ việc chọn hàm f ở trên, ta có

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f(x) &= \int_0^\infty \left(\int_{S_{n-1}} \frac{\Phi(t)}{t}\Omega(y')f(|x|t^{-1}y')d\sigma(y')\right)dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{S_{n-1}} \frac{\Phi(t)}{t}\Omega(y')\left||x|t^{-1}y'\right|^{(n+\gamma)\lambda}|\Omega(y')|^{q'-2}\overline{\Omega}(y')d\sigma(y')\right)dt \\
&= |x|^{(n+\gamma)\lambda}\int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t}t^{-(n+\gamma)\lambda}\left(\int_{S_{n-1}} |\Omega(y')|^{q'}d\sigma(y')\right)dt \\
&= \|\Omega\|^{p'}_{L^{q'}(S_{n-1})}|x|^{(n+\gamma)\lambda}\int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t^{1+(n+\gamma)\lambda}}dt.
\end{aligned}$$

Từ đó

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})}\||x|^{(n+\gamma)\lambda}\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)}\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1+(n+\gamma)\lambda}}dt.$$

Mặt khác, vì $\|f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \||x|^{(n+\gamma)\lambda}\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)}\|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}$, cho nên

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} &\geq \frac{\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)}}{\|f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)}} \\
&\gtrsim \frac{\|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})}}{\|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}}\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1+(n+\gamma)\lambda}}dt.
\end{aligned}$$

Định lí được chứng minh. □

Định lí 2.2. *Cho* $1 \leq p, q < \infty, \alpha \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}$ *và* $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$.
i) Nếu $\omega(x') \geq c > 0$ *với mọi* $x' \in S_{n-1}$ *và*

$$\mathscr{C}_2 = \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha}} dt < \infty,$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ *bị chặn trên* $\dot{K}_\omega^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)$. *Hơn nữa,*

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{\dot{K}_\omega^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n) \to \dot{K}_\omega^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\mathscr{C}_2.$$

ii) Ngược lại, giả sử $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1}, \omega(x')d\sigma(x'))$ *và* Φ *là hàm thực có dấu không đổi trên* $\mathbb{R}^n$. *Khi đó nếu* $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ *bị chặn trên* $\dot{K}_\omega^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)$ *thì* $\mathscr{C}_2 < \infty$. *Hơn nữa, chúng ta có*

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{\dot{K}_\omega^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n) \to \dot{K}_\omega^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}^{q'}}{\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}^{\frac{q'}{q}}}.\mathscr{C}_2.$$

Chứng minh. i) Trước hết, ta chứng minh điều kiện đủ của Định lí. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski cùng phép đổi biến $u = xt^{-1}$, ta được

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega} f \chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t} \left(\int_{C_k} \left| \int_{S_{n-1}} \Omega(y') f(|x|t^{-1}y') d\sigma(y') \right|^q \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}} \left(\int_{\frac{1}{t}C_k} \left| \int_{S_{n-1}} \Omega(y') f(|u|y') d\sigma(y') \right|^q \omega(u) du \right)^{\frac{1}{q}} dt.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder như (2.8) và (2.12), suy ra

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega} f \chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}} \left(\int_{\frac{1}{t}C_k} \left| \left(\int_{S_{n-1}} |f(|u|y')|^q d\sigma(y') \right)^{\frac{1}{q}} \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})} \right|^q \omega(u) du \right)^{\frac{1}{q}} dt \\
&\leq \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})} \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}} \mathscr{J}(t)^{\frac{1}{q}} dt,
\end{aligned}$$

ở đó, $\mathscr{J}(t) := \int_{\frac{1}{t}C_k}\left(\int_{S_{n-1}}|f(|u|y')|^q d\sigma(y')\right)\omega(u)du$. Đặt $u = rx'$ và sử dụng điều kiện $\omega(x') \geq c > 0$ với mọi $x' \in S_{n-1}$, ta được

$$\begin{aligned}
\mathscr{J}(t) &= \int_{\frac{1}{t}C_k}\int_{S_{n-1}}\left(\int_{S_{n-1}}|f(|rx'|y')|^q d\sigma(y')\right)d\sigma(x')\omega(rx')r^{n-1}dr\\
&= \omega(S_{n-1})\int_{\frac{1}{t}C_k} r^{n-1+\gamma}\left(\int_{S_{n-1}}|f(ry')|^q d\sigma(y')\right)dr\\
&\lesssim \int_{\frac{1}{t}C_k} r^{n-1+\gamma}\left(\int_{S_{n-1}}|f(ry')|^q\omega(y')d\sigma(y')\right)dr = \|f\chi_{\frac{1}{t}C_k}\|^q_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}}\|f\chi_{\frac{1}{t}C_k}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}dt.$$

Với mỗi $t \in (0,\infty)$, ta tìm số nguyên $\ell = \ell(t)$ sao cho $2^{\ell-1} < \frac{1}{t} \leq 2^\ell$. Khi đó $\frac{1}{t}C_k$ là tập con của $C_{k+\ell-1}\cup C_{k+\ell}$. Do vậy

$$\|f\chi_{\frac{1}{t}C_k}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\chi_{k+\ell-1}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} + \|f\chi_{k+\ell}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}}\left(\|f\chi_{k+\ell-1}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} + \|f\chi_{k+\ell}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)dt. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Với $1 \leq p < \infty$, ta có

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)} &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p}\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f(x)\chi_k(x)\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p}\left(\|f\chi_{k+\ell-1}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} + \|f\chi_{k+\ell}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}dt.
\end{aligned}$$

Từ $2^{\ell-1} < \frac{1}{t} \leq 2^\ell$, dẫn đến

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^{k\alpha p}\left(\|f\chi_{k+\ell-1}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} + \|f\chi_{k+\ell}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p}\|f\chi_{k+\ell-1}\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p}\|f\chi_{k+\ell}\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq (2^{-(\ell-1)\alpha} + 2^{-\ell\alpha})\|f\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left(\frac{1}{t}\right)^{-\alpha}\|f\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)}.$$

Do vậy,

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha}}.\|f\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)}.$$

ii) Tiếp theo, ta chứng minh điều kiện cần của Định lí. Với $m \in \mathbb{Z}$ ta chọn m đủ lớn sao cho $\alpha + \frac{1}{2^m} \neq 0$. Ta chọn hàm

$$f_m(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } |x| < 1, \\ |x|^{-\alpha-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\frac{1}{2^m}}|\Omega(x')|^{q'-2}\overline{\Omega}(x'), & \text{nếu } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Lập luận tương tự như [9], ta có thể chứng minh rằng $f_m \in \dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)$. Thật vậy,

$$\|f_m\chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \leq \left(\int_{C_k}\left||x|^{-\alpha-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\frac{1}{2^m}}|\Omega(x')|^{q'-2}\Omega(x')\right|^q \omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\int_{C_k}\int_{S_{n-1}} |rx'|^{-\alpha q-\gamma-n-\frac{q}{2^m}}|\Omega(x')|^{q(q'-1)}\omega(rx')r^{n-1}d\sigma(x')dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\lesssim \left(\int_{C_k} r^{-\alpha q-\frac{q}{2^m}-1}\left(\int_{S_{n-1}}|\Omega(x')|^{q(q'-1)}\omega(x')d\sigma(x')\right)dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\lesssim \left(\int_{C_k} r^{-\alpha q-\frac{q}{2^m}-1}dr\right)^{\frac{1}{q}}\|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}$$

$$= 2^{-k(\frac{1}{2^m}+\alpha)}\left|\frac{2^{q(\frac{1}{2^m}+\alpha)}-1}{(\frac{1}{2^m}+\alpha)q}\right|^{\frac{1}{q}}\|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}.$$

Rõ ràng với $k \leq 0$, thì $\|f_m\chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} = 0$. Do đó,

$$\|f_m\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p}\|f_m\chi_k\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha p} \left(2^{-k(\frac{1}{2^m}+\alpha)} \left| \frac{2^{q(\frac{1}{2^m}+\alpha)}-1}{(\frac{1}{2^m}+\alpha)q} \right|^{\frac{1}{q}} \|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left| \frac{2^{q(\frac{1}{2^m}+\alpha)}-1}{(\frac{1}{2^m}+\alpha)q} \right|^{\frac{1}{q}} \|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\alpha p} \left(2^{-k(\frac{1}{2^m}+\alpha)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left| \frac{2^{q(\frac{1}{2^m}+\alpha)}-1}{(\frac{1}{2^m}+\alpha)q} \right|^{\frac{1}{q}} \|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{kp}{2^m}} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Khi đó, ta được

$$\mathscr{H}_{\Phi,\Omega} f_m = \begin{cases} 0, & \text{nếu } |x| < 1, \\ |x|^{-\alpha-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\frac{1}{2^m}} \times & \\ \times \int_{S(x)} \left(\int_{S_{n-1}} \frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha-\frac{1}{2^m}}} |\Omega(y')|^{q'} d\sigma(y') \right) dt, & \text{nếu } |x| \geq 1, \end{cases}$$

ở đó, $S(x) = \{\frac{1}{t} \in (0,\infty) : ||x|t^{-1}y'| \geq 1\}$. Với $k \in \mathbb{Z}$ sao cho $k \geq 1$, chọn

$$S_k = \left\{ \frac{1}{t} \in (0,\infty) : |t^{-1}| \geq \frac{1}{2^{k-1}} \right\}.$$

Dãy $\{S_k\}_{k>0}$ tăng dần và tiến về $(0,\infty)$. Bây giờ chọn $1 \leq m \leq k$. Khi đó, với mọi $x \in C_k$, tồn tại tập con đo được A của $(0,\infty)$ với $|A| = 0$ sao cho

$$S(x) \supset S_m \backslash A.$$

Mặt khác, vì với mỗi $k \leq 0$ thì $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega} f_m \chi_k = 0$ nên ta có

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega} f_m \chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}$$

$$= \left(\int_{C_k} \left| |x|^{-\alpha-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\frac{1}{2^m}} \int_{S_k} \left(\int_{S_{n-1}} \frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha-\frac{1}{2^m}}} |\Omega(y')|^{q'} d\sigma(y') \right) dt \right|^q \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geq \left(\int_{C_k} |x|^{-\alpha-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\frac{1}{2^m}} \omega(x) \left(\int_{S_m} \left(\int_{S_{n-1}} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha-\frac{1}{2^m}}} |\Omega(y')|^{q'} d\sigma(y') \right) dt \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geq \left(\int_{S_m} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha-\frac{1}{2^m}}} dt \right) \left(\int_{C_k} |x|^{-\alpha q-\gamma-n-\frac{q}{2^m}} \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{S_{n-1}} |\Omega(y')|^{q'} d\sigma(y') \right)$$

$$= \int_{S_m} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha-\frac{1}{2^m}}} dt . \|f'_m \chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} . \|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})},$$

ở đó,

$$f'_m(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } |x| < 1, \\ |x|^{-\alpha - \frac{\gamma}{q} - \frac{n}{q} - \frac{1}{2^m}}, & \text{nếu } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Ta thấy rằng, $\|f'_m \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} = 0$ với mọi $k \leq 0$. Vì thế

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{H}_{\Phi,\Omega} f_m\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)} \\
&\geq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p} \left(\int_{S_m} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha-\frac{1}{2^m}}} dt \|f'_m \chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p} \|f'_m \chi_k\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{S_m} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha-\frac{1}{2^m}}} dt \right) \\
&\geq \|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})} \left(\sum_{k=m}^{\infty} 2^{k\alpha p} 2^{-kp(\frac{1}{2^m}+\alpha)} \left| \frac{2^{q(\frac{1}{2^m}+\alpha)} - 1}{(\frac{1}{2^m}+\alpha)q} \right|^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \mathcal{C}_2(m) \\
&\geq \|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})} 2^{-\frac{m}{2^m}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{kp}{2^m}} \right)^{\frac{1}{p}} \left| \frac{2^{q(\frac{1}{2^m}+\alpha)} - 1}{(\frac{1}{2^m}+\alpha)q} \right|^{\frac{1}{q}} \mathcal{C}_2(m),
\end{aligned}$$

ở đó, $\mathcal{C}_2(m) := \int_{S_m} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha-\frac{1}{2^m}}} dt$. Từ việc $\mathcal{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)$, suy ra

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}_{\Phi,\Omega}\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n) \to \dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)} &\geq \frac{\|\mathcal{H}_{\Phi,\Omega} f_m\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)}}{\|f_m\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)}} \\
&\geq \frac{\|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})} 2^{-\frac{m}{2^m}} \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{kp}{2^m}} \right)^{\frac{1}{p}} \left| \frac{2^{q(\frac{1}{2^m}+\alpha)}-1}{(\frac{1}{2^m}+\alpha)q} \right|^{\frac{1}{q}} \mathcal{C}_2(m)}{\left| \frac{2^{q(\frac{1}{2^m}+\alpha)}-1}{(\frac{1}{2^m}+\alpha)q} \right|^{\frac{1}{q}} \|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))} \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-\frac{kp}{2^m}} \right)^{\frac{1}{p}}} \\
&\geq \frac{\|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})}}{\|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}} .2^{-\frac{m}{2^m}} \int_{S_m} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha-\frac{1}{2^m}}} dt.
\end{aligned}$$

Khi $m \to \infty$, áp dụng định lí hội tụ bị chặn Lebesgue ta được

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \gtrsim \frac{\|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})}}{\|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}}.\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha}}dt.$$

Định lí được chứng minh. $\square$

Định lí 2.3. *Cho $0 < p < \infty, 1 \leq q < \infty, \alpha \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ và $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$.*
i) Nếu $\omega(x') \geq c > 0$ với mọi $x' \in S_{n-1}$ và

$$\mathscr{C}_3 = \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}}dt < \infty,$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa,

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\mathscr{C}_3.$$

ii) Ngược lại, giả sử $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1}, \omega(x')d\sigma(x'))$, Φ là hàm thực với dấu không đổi trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó nếu $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ thì $\mathscr{C}_3 < \infty$. Hơn nữa, chúng ta có

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{\|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})}}{\|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}}.\mathscr{C}_3.$$

Chứng minh. i) Trước hết, ta chứng minh điều kiện đủ của Định lí. Từ (2.13) ta được

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}$$
$$\lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}}\left(\|f\chi_{k+\ell-1}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} + \|f\chi_{k+\ell}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)dt.$$

Trường hợp 1: Với $1 \leq p < \infty$

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f(x)\chi_k(x)\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lesssim \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\left(\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}}\left(\|f\chi_{k+\ell-1}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}+\|f\chi_{k+\ell}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}}\sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\left(\|f\chi_{k+\ell-1}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}+\|f\chi_{k+\ell}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} dt.$$

Mặt khác,

$$\sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\left(\|f\chi_{k+\ell-1}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}+\|f\chi_{k+\ell}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\|f\chi_{k+\ell-1}\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\|f\chi_{k+\ell}\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lesssim 2^{\ell(\lambda-\alpha)}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left(\frac{1}{t}\right)^{\lambda-\alpha}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)}.$$

Do vậy,

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}}\left(\frac{1}{t}\right)^{\lambda-\alpha}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)}dt$$

$$\lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}}dt.\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)}.$$

Trường hợp 2: Với $0<p<1$. Từ định nghĩa không gian Morrey-Herz có trọng ta có

$$\|f\chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \le 2^{k(\lambda-\alpha)}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)}.$$

Với mọi $f\in M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)$, bởi (2.13) nên ta có

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}}\left(\sum_{i=-1,0} 2^{(k+\ell+i)(\lambda-\alpha)}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)dt,$$

với mọi $k\in\mathbb{Z}$. Do vậy,

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)} = \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f(x)\chi_k(x)\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)}.\sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\times$$

$$\times\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\left(\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}}\left(\sum_{i=-1,0} 2^{(k+\ell+i)(\lambda-\alpha)}\right)dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Từ $2^{\ell-1} < \frac{1}{t} \leq 2^{\ell}$ và $\lambda > 0$. Ta có ước lượng

$$\sum_{i=-1,0} 2^{(k+\ell+i)(\lambda-\alpha)} \lesssim \left(\frac{1}{t}\right)^{\lambda-\alpha} 2^{k(\lambda-\alpha)} \sum_{i=-1,0} 2^{i(\lambda-\alpha)}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega} f\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})} \|f\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{(k-k_0)\lambda p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\infty} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}} dt\right) \sum_{i=-1,0} 2^{i(\lambda-\alpha)}\\
&\lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})} \|f\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{(k-k_0)\lambda p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\infty} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}} dt\right)\\
&\lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}. \int_0^{\infty} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}} dt. \|f\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

(ii) Tiếp theo, ta chứng minh điều kiện cần của Định lí. Giả sử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)$. Khi đó, ta chọn hàm

$$f(x) = |x|^{-\alpha-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda} |\Omega(x')|^{q'-2} \overline{\Omega}(x').$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\|f\chi_k\|_{L^q_{\omega}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left||x|^{-\alpha-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda} |\Omega(x')|^{q'-2}.\overline{\Omega}(x')\chi_k\right|^q \omega(x) dx\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left(\int_{C_k}\int_{S_{n-1}} r^{-\alpha q-\gamma-n+\lambda q} |\Omega(x')|^{q'} r^{\gamma} \omega(x') r^{n-1} d\sigma(x') dr\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left(\int_{C_k} r^{-\alpha q+\lambda q-1} dr \int_{S_{n-1}} |\Omega(x')|^{q'} \omega(x') d\sigma(x')\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left(\int_{C_k} r^{-\alpha q+\lambda q-1} dr\right)^{\frac{1}{q}} \|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}\\
&= \begin{cases} \ln 2. \|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}, & \text{nếu } \alpha = \lambda,\\ 2^{k(\lambda-\alpha)} \left|\frac{1-2^{-q(\lambda-\alpha)}}{q(\lambda-\alpha)}\right|^{\frac{1}{q}} \|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}, & \text{nếu } \alpha \neq \lambda. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vì thế,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\|f\chi_k\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\lesssim \|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}\sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\left(2^{k(\lambda-\alpha)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\lesssim \|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}\sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\lambda p}\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.
\end{aligned}$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f(x) &= \int_0^\infty\left(\int_{S_{n-1}}\frac{\Phi(t)}{t}\Omega(y')f(|x|t^{-1}y')d\sigma(y')\right)dt\\
&= |x|^{-\alpha-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda}.\int_0^\infty\frac{\Phi(t)}{t}t^{\alpha+\frac{\gamma}{q}+\frac{n}{q}-\lambda}\left(\int_{S_{n-1}}|\Omega(y')|^{q'}d\sigma(y')\right)dt\\
&= |x|^{-\alpha-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda}.\|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})}\int_0^\infty\frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}}dt.
\end{aligned}$$

Từ đó, dẫn đến

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \||x|^{-\alpha-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda}\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)}.\|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})}\int_0^\infty\frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}}dt.$$

Vì vậy

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)\to M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)} &\geq \frac{\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)}}{\|f\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)}}\\
&\gtrsim \frac{\int_0^\infty\frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}}dt\|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})}\||x|^{-\alpha-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda}\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)}}{\|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}\||x|^{-\alpha-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda}\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)}}\\
&\gtrsim \frac{\|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})}}{\|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}}.\int_0^\infty\frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}}dt.
\end{aligned}$$

Định lí được chứng minh. $\square$

Nhận xét rằng, nếu $\omega(x) = |x|^\gamma$ thì ta có $\omega(x') = 1$ với mọi $x' \in S_{n-1}$. Từ đó suy ra

$$\frac{\|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})}}{\|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}} = \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.$$

Như là các trường hợp đặc biệt của Định lí 2.1, Định lí 2.2 và Định lí 2.3 ta nhận được các hệ quả về ước lượng chuẩn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian hàm có trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Hệ quả 2.1), không gian Herz (Hệ quả 2.2), không gian Morrey-Herz (Hệ quả 2.3).

Hệ quả 2.1. *Cho $1 \leq q < \infty, 1+\lambda q > 0$ và $\lambda \in \mathbb{R}$. Giả sử $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$, $\omega(x) = |x|^\gamma$ với $\gamma > -n$ và Φ là hàm bán kính không âm. Khi đó, $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{1.1} = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t^{1+(n+\gamma)\lambda}} dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\mathscr{C}_{1.1}$.

Hệ quả 2.1 là mở rộng và củng cố lại các kết quả có trong [12].

Hệ quả 2.2. *Cho $1 \leq p, q < \infty, \alpha \in \mathbb{R}$, $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$ và $\omega(x) = |x|^\gamma$ với $\gamma \in \mathbb{R}$. Giả sử Φ là hàm bán kính không âm. Khi đó, $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{2.1} = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha}} dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\mathscr{C}_{2.1}$.

Mặt khác, vì $K^{\alpha/p,p}_{p}(\mathbb{R}^n) = L^p(|x|^\alpha dx)$ nên Hệ quả 2.2 là mở rộng của Định lí 3.1 trong [12] trên không gian Lebesgue với trọng lũy thừa.

Hệ quả 2.3. *Cho $0 < p < \infty, 1 \leq q < \infty, \alpha \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}$ và $\lambda > 0$. Giả sử $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$, $\omega(x) = |x|^\gamma$ và Φ là hàm bán kính không âm. Khi đó,*

$\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathscr{C}_{3.1} = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}}dt < \infty.$$

Hơn nữa,$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\mathscr{C}_{3.1}$.

Đặc biệt, chúng tôi đạt được kết luận mới về bất đẳng thức cho toán tử Hardy và toán tử Hardy liên hợp nhiều chiều là mở rộng các kết quả của Christ và Grafakos trong [13], trên các không gian có trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Hệ quả 2.4), không gian Herz (Hệ quả 2.5), không gian Morrey-Herz (Hệ quả 2.6).

Hệ quả 2.4. *Cho $1 \le q < \infty, 1+\lambda q > 0, \lambda \in \mathbb{R}$, và $\omega(x) = |x|^\gamma$ với $\gamma > -n$. Khi đó, toán tử Hardy bị chặn trên $\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{1.2} = \int_1^\infty \frac{1}{t^{n+1+(n+\gamma)\lambda}}dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{1.2}$. Tương tự, toán tử Hardy liên hợp bị chặn trên $\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathscr{C}_{1.3} = \int_0^1 \frac{1}{t^{1+(n+\gamma)\lambda}}dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}^\star\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{1.3}$.

Hệ quả 2.5. *Cho $1 \le p,q < \infty, \alpha \in \mathbb{R}$ và $\omega(x) = |x|^\gamma$ với $\gamma \in \mathbb{R}$. Khi đó, toán tử Hardy bị chặn trên $\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{2.2} = \int_1^\infty \frac{1}{t^{n+1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha}}dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{2.2}$. Tương tự, toán tử Hardy liên hợp bị chặn trên $\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathscr{C}_{2.3} = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha}}dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}^\star\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{2.3}$.

Hệ quả 2.6. *Cho* $0 < p < \infty, 1 \leq q < \infty, \alpha \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ *và* $\omega(x) = |x|^\gamma$. *Khi đó, toán tử Hardy bị chặn trên* $M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{3.2} = \int_1^\infty \frac{1}{t^{n+1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}}dt < \infty.$$

Hơn nữa, ta có $\|\mathscr{H}\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{3.2}$. *Tương tự, toán tử Hardy liên hợp bị chặn trên* $M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{3.3} = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}}dt < \infty.$$

Hơn nữa, ta có $\|\mathscr{H}^\star\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{3.3}$.

2.3. Giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ và lớp trọng thuần nhất

Trong mục này, chúng tôi đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz, trên các không gian có hai trọng thuần nhất như: không gian tâm Morrey (Định lí 2.4), không gian Herz (Định lí 2.5), không gian Morrey-Herz (Định lí 2.6).

Trước khi trình bày kết quả chính của mục này, chúng tôi đưa ra bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} |b(x) - b(|x|t^{-1}y')| &\leq \|b\|_{Lip^\beta}.\|x - |x|t^{-1}y'\|^\beta \\ &\leq \|b\|_{Lip^\beta}.|x|^\beta(1+t^{-1})^\beta,\ \forall t > 0,\ y' \in S_{n-1}. \quad (2.14) \end{aligned}$$

Định lí 2.4. *Cho* $1 \leq q < \infty$, $\Omega \in L^{p'}(S_{n-1})$ *và* $b \in Lip^\beta(\mathbb{R}^n)$ *với* $0 < \beta \leq 1$. *Giả sử* $v, \omega \in \mathscr{W}_\gamma$, $\gamma > -n$ *và* $\omega(x') \geq c > 0$ *với mọi* $x' \in S_{n-1}$. *Nếu* $\lambda_1 = \lambda - \frac{\beta q}{n+\gamma} > 0$ *và*

$$\mathscr{C}_4 = \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1+(\gamma+n)\frac{\lambda_1-1}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}}dt < \infty,$$

thì $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ *bị chặn từ* $\dot{M}^{\lambda_1,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)$ *đến* $\dot{M}^{\lambda,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Chứng minh. Với $x \in B(0,R)$, ta có $|x|^\beta \le |B(0,R)|^{\frac{\beta}{n}}$ và $v(B(0,R)) \simeq |B(0,R)|^{\frac{n+\gamma}{n}}$ với mọi $\gamma > -n$. Từ kết quả trên và (2.14), với mọi $f \in \dot{M}^{\lambda_1,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)$ ta có

$$\|\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{R>0}\left(\frac{1}{v(B(0,R))^{1+\lambda q}}\int_{B(0,R)}\left|\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}f\right|^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \|b\|_{Lip^\beta}\sup_{R>0}\left(\frac{1}{v(B(0,R))^{1+\lambda q}}\int_{B(0,R)}\left|\int_0^\infty\int_{S_{n-1}}\frac{\Phi(t)}{t(1+t^{-1})^{-\beta}}\Omega(y')f(|x|t^{-1}y')\right.\right.$$

$$\left.\left.\times|x|^\beta d\sigma(y')dt\right|^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\lesssim \|b\|_{Lip^\beta}\sup_{R>0}\left(\frac{1}{v(B(0,R))^{\lambda_1}}\int_{B(0,R)}\left|\int_0^\infty\int_{S_{n-1}}\frac{\Phi(t)}{t(1+t^{-1})^{-\beta}}\Omega(y')f(|x|t^{-1}y')\right.\right.$$

$$\left.\left.\times d\sigma(y')dt\right|^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

ở đó $\lambda_1 = \lambda - \frac{\beta q}{n+\gamma}$. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski và phép đổi biến $u = xt^{-1}$, ta được

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|b\|_{Lip^\beta}\sup_{R>0}\int_0^\infty\frac{|\Phi(t)|}{t(1+t^{-1})^{-\beta}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{v(B(0,R))^{\lambda_1}}\int_{B(0,R)}\left|\int_{S_{n-1}}\Omega(y')f(|x|t^{-1}y')d\sigma(y')\right|^q\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}dt$$

$$\lesssim \|b\|_{Lip^\beta}\sup_{R>0}\int_0^\infty\frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{v(B(0,R))^{\lambda_1}}\int_{B(0,t^{-1}R)}\left|\int_{S_{n-1}}\Omega(y')f(|u|y')d\sigma(y')\right|^q\omega(u)du\right)^{\frac{1}{q}}dt.$$

Từ (2.8), suy ra

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|b\|_{Lip^\beta}\|\Omega\|_{L^{p'}(S_{n-1})}\sup_{R>0}\int_0^\infty\frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}}\mathscr{F}(t)dt, \quad (2.15)$$

ở đó $\mathscr{F}(t) := \left(\frac{1}{v(B(0,R))^{\lambda_1}}\int_{B(0,t^{-1}R)}\left(\int_{S_{n-1}}|f(|u|y')|^q d\sigma(y')\right)\omega(u)du\right)^{\frac{1}{q}}$. Đặt $u = rx'$. Khi đó ta có

$$\mathscr{F}(t) = \left(\frac{1}{v(B(0,R))^{\lambda_1}}\int_{B(0,R)}\int_{S_{n-1}}\left(\int_{S_{n-1}}|f(|rx'|y')|^q d\sigma(y')\right)d\sigma(x')\omega(rx')r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \omega(S_{n-1})^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{\nu(B(0,R))^{\lambda_1}} \int_{B(0,R)} r^{\gamma+n-1} \left(\int_{S_{n-1}} |f(|r|y')|^q d\sigma(y') \right) dr \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\lesssim \left(\frac{1}{\nu(B(0,R))^{\lambda_1}} \int_{B(0,R)} r^{\gamma+n-1} \left(\int_{S_{n-1}} |f(|r|y')|^q d\sigma(y') \right) dr \right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (2.16)$$

Chú ý rằng, $\frac{1}{\nu(B(0,R))^{\lambda_1}} = \frac{1}{t^{(\gamma+n)\lambda_1}\nu(B(0,t^{-1}R))^{\lambda_1}}$. Từ (2.15), (2.16) và điều kiện $\omega(x') \geq c > 0$ với mọi $x' \in S_{n-1}$, ta được

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\Omega} f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim \|b\|_{Lip^\beta} \|\Omega\|_{L^{p'}(S_{n-1})} \sup_{R>0} \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}} \left(\frac{1}{t^{(\gamma+n)\lambda_1}\nu(B(0,t^{-1}R))^{\lambda_1}} \right.$$

$$\left. \times \int_{B(0,t^{-1}R)} r^{\gamma+n-1} \left(\int_{S_{n-1}} |f(|r|y')|^q \omega(y') d\sigma(y') \right) dr \right)^{\frac{1}{q}} dt$$

$$\lesssim \|b\|_{Lip^\beta} \|\Omega\|_{L^{p'}(S_{n-1})} \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1+(\gamma+n)\frac{\lambda_1-1}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}} \sup_{R>0} \left(\frac{1}{\nu(B(0,t^{-1}R))^{\lambda_1}} \right.$$

$$\left. \times \int_{B(0,t^{-1}R)} r^{\gamma+n-1} \left(\int_{S_{n-1}} |f(|r|y')|^q \omega(y') d\sigma(y') \right) dr \right)^{\frac{1}{q}} dt$$

$$\lesssim \|b\|_{Lip^\beta}.\|\Omega\|_{L^{p'}(S_{n-1})}. \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1+(\gamma+n)\frac{\lambda_1-1}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}} dt. \|f\|_{\dot{M}^{\lambda_1,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}.$$

Định lí được chứng minh. □

Định lí 2.5. *Cho* $1 \leq p, q < \infty$, $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$ *và* $b \in Lip^\beta(\mathbb{R}^n)$ *với* $0 < \beta \leq 1$. *Giả sử* $\nu, \omega \in \mathcal{W}_\gamma$, $\gamma > -n$ *và* $\omega(x') \geq c > 0$ *với mọi* $x' \in S_{n-1}$. *Nếu* $\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{n\beta}{n+\gamma}$ *và*

$$\mathcal{C}_5 = \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha_1\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}(1+t^{-1})^{-\beta}} dt < \infty,$$

thì $\mathcal{H}^b_{\Phi,\Omega}$ *bị chặn từ* $\dot{K}^{\alpha_1,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$ *đến* $\dot{K}^{\alpha_2,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Chứng minh. Cho $f \in \dot{K}^{\alpha_1,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$. Với bất kỳ $k \in \mathbb{Z}$, từ (2.14) và áp dụng bất đẳng thức Minkowski, ta có

$$\|\mathcal{H}^b_{\Phi,\Omega} f \chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}$$

$$= \left(\int_{C_k} \left| \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} \frac{\Phi(t)}{t} \Omega(y') f(|x|t^{-1}y') \left(b(x) - b(|x|t^{-1}y') \right) d\sigma(y') dt \right|^q \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\int_{C_k} \left| \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} \frac{|\Phi(t)|}{t} \Omega(y') f(|x|t^{-1}y') \|b\|_{Lip^\beta} |x|^\beta (1+t^{-1})^\beta d\sigma(y') dt \right|^q \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\lesssim \|b\|_{Lip^\beta} \left(\int_{C_k} \left| \int_0^\infty \int_{S_{n-1}} \frac{|\Phi(t)|}{t(1+t^{-1})^{-\beta}} \Omega(y') f(|x|t^{-1}y') |x|^\beta d\sigma(y') dt \right|^q \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\lesssim \|b\|_{Lip^\beta} \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t(1+t^{-1})^{-\beta}} \left(\int_{C_k} \left| \int_{S_{n-1}} \Omega(y') f(|x|t^{-1}y') |x|^\beta d\sigma(y') \right|^q \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} dt$$

$$\lesssim \|b\|_{Lip^\beta} |B_k|^{\frac{\beta}{n}} \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t(1+t^{-1})^{-\beta}} \left(\int_{C_k} \left| \int_{S_{n-1}} \Omega(y') f(|x|t^{-1}y') d\sigma(y') \right|^q \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} dt.$$

Sử dụng phép đổi biến $u = xt^{-1}$ và (2.8), dẫn đến

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega} f \chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|b\|_{Lip^\beta} |B_k|^{\frac{\beta}{n}} \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}} \left(\int_{\frac{1}{t}C_k} \left| \int_{S_{n-1}} \Omega(y') f(|u|y') d\sigma(y') \right|^q \omega(u) du \right)^{\frac{1}{q}} dt \\
&\lesssim \|b\|_{Lip^\beta} \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})} |B_k|^{\frac{\beta}{n}} \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}} \left(\mathscr{J}(t,\omega) \right)^{\frac{1}{q}} dt \\
&\lesssim \|b\|_{Lip^\beta} \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})} |B_k|^{\frac{\beta}{n}} \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}} \|f \chi_{\frac{1}{t}C_k}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} dt \\
&\lesssim \|b\|_{Lip^\beta} \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})} |B_k|^{\frac{\beta}{n}} \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}} \left(\|f \chi_{k+\ell-1}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} + \|f \chi_{k+\ell}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \right) dt,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

ở đó, $\mathscr{J}(t,\omega) := \int_{\frac{1}{t}C_k} \left(\int_{S_{n-1}} |f(|u|y')|^q d\sigma(y') \right) \omega(u) du$ và $\ell = \ell(t)$ là số nguyên sao cho $2^\ell \simeq t^{-1}$. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski với $1 \leq p < \infty$, ta có

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega} f\|_{\dot{K}^{\alpha_2,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu(B_k)^{\alpha_2 \frac{p}{n}} \|\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega} f \chi_k\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \|b\|_{Lip^\beta} \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})} \Bigg(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu(B_k)^{\alpha_2 \frac{p}{n}} \times \\
&\times \left(|B_k|^{\frac{\beta}{n}} \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}} \left(\|f \chi_{k+\ell-1}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} + \|f \chi_{k+\ell}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \right) dt \right)^p \Bigg)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\lesssim \|b\|_{Lip^\beta}\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}}\mathscr{B}dt,$$

ở đó $\mathscr{B} := \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu(B_k)^{\alpha_2\frac{p}{n}}|B_k|^{\frac{\beta}{n}p}\left(\|f\chi_{k+\ell-1}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} + \|f\chi_{k+\ell}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
Hơn nữa,

$$\mathscr{B} \le \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu(B_k)^{\alpha_2\frac{p}{n}}|B_k|^{\frac{\beta}{n}p}\|f\chi_{k+\ell-1}\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu(B_k)^{\alpha_2\frac{p}{n}}|B_k|^{\frac{\beta}{n}p}\|f\chi_{k+\ell}\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Từ Bổ đề 1.1, do $\frac{|B_k|}{\nu(B_k)^{\frac{n}{n+\gamma}}}$ là một hằng số ta suy ra

$$\frac{\nu(B_k)}{\nu(B_{k+\ell+i})} = 2^{-(\ell+i)(n+\gamma)},\ \ i = -1, 0. \tag{2.18}$$

Với $\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{n\beta}{n+\gamma}$ và $2^\ell \simeq t^{-1}$ ta có

$$\begin{aligned}
\mathscr{B} &\le \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu(B_{k+\ell-1})^{\alpha_1\frac{p}{n}}\|f\chi_{k+\ell-1}\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\nu(B_k)}{\nu(B_{k+\ell-1})}\right)^{\frac{\alpha_1}{n}} \left(\frac{|B_k|}{\nu(B_k)^{\frac{n}{n+\gamma}}}\right)^{\frac{\beta}{n}} \\
&\quad + \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu(B_{k+\ell})^{\alpha_1\frac{p}{n}}\|f\chi_{k+\ell}\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\nu(B_k)}{\nu(B_{k+\ell})}\right)^{\frac{\alpha_1}{n}} \left(\frac{|B_k|}{\nu(B_k)^{\frac{n}{n+\gamma}}}\right)^{\frac{\beta}{n}} \\
&\le \left(\left(\frac{\nu(B_k)}{\nu(B_{k+\ell-1})}\right)^{\frac{\alpha_1}{n}} + \left(\frac{\nu(B_k)}{\nu(B_{k+\ell})}\right)^{\frac{\alpha_1}{n}}\right)\left(\frac{|B_k|}{\nu(B_k)^{\frac{n}{n+\gamma}}}\right)^{\frac{\beta}{n}} \|f\|_{\dot{K}^{\alpha_1,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \left(2^{-(\ell-1)\alpha_1\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)} + 2^{-\ell\alpha_1\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}\right)\|f\|_{\dot{K}^{\alpha_1,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \left(\frac{1}{t}\right)^{-\alpha_1\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)} \|f\|_{\dot{K}^{\alpha_1,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Do vậy,

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}f\|_{\dot{K}^{\alpha_2,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|b\|_{Lip^\beta}\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}}\left(\frac{1}{t}\right)^{-\alpha_1\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}\|f\|_{\dot{K}^{\alpha_1,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}dt \\
&\lesssim \|b\|_{Lip^\beta}.\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha_1\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}(1+t^{-1})^{-\beta}}dt.\|f\|_{\dot{K}^{\alpha_1,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Định lí được chứng minh. □

Định lí 2.6. *Cho $0 < p < \infty, 1 \leq q < \infty$, $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$, $\lambda > 0$ và $b \in Lip^{\beta}(\mathbb{R}^n)$ với $0 < \beta \leq 1$. Giả sử $\nu, \omega \in \mathscr{W}_{\gamma}$, $\gamma > -n$ và $\omega(x') \geq c > 0$ với mọi $x' \in S_{n-1}$. Nếu $\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{n\beta}{n+\gamma}$ và*

$$\mathscr{C}_6 = \int_0^{\infty} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+(\lambda-\alpha_1)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}(1+t^{-1})^{-\beta}} dt < \infty,$$

thì $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ bị chặn từ $M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$ đến $M\dot{K}^{\alpha_2,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Chứng minh. Tương tự như Định lí 2.2, ước lượng cho (2.17) ta xét hai trường hợp.
Trường hợp 1: Với $1 \leq p < \infty$. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski, Bổ đề 1.1 và (2.18) ta có

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega} f\|_{M\dot{K}^{\alpha_2,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \|b\|_{Lip^{\beta}} \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})} \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} \left(\nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} \nu(B_k)^{\alpha_2 \frac{p}{n}} \left(|B_k|^{\frac{\beta}{n}} \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. \times \int_0^{\infty} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}} \left(\|f\chi_{k+\ell-1}\|_{L^q_{\omega}(\mathbb{R}^n)} + \|f\chi_{k+\ell}\|_{L^q_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \right) dt \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
&\lesssim \|b\|_{Lip^{\beta}} \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})} \int_0^{\infty} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}} \widetilde{\mathscr{B}} dt,
\end{aligned}$$

ở đó,

$$\widetilde{\mathscr{B}} := \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} \left(\nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} \nu(B_k)^{\alpha_2 \frac{p}{n}} \left(|B_k|^{\frac{\beta}{n}} \left(\|f\chi_{k+\ell-1}\|_{L^q_{\omega}(\mathbb{R}^n)} + \|f\chi_{k+\ell}\|_{L^q_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \right) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right),$$

và $\ell = \ell(t)$ là một số nguyên sao cho $2^{\ell} \simeq t^{-1}$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{B}} &\leq \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} \nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} \nu(B_{k+\ell-1})^{\alpha_1 \frac{p}{n}} \|f\chi_{k+\ell-1}\|^p_{L^q_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}} \times \\
&\times \left(\frac{\nu(B_k)}{\nu(B_{k+\ell-1})} \right)^{\frac{\alpha_1}{n}} \left(\frac{|B_k|}{\nu(B_k)^{\frac{n}{n+\gamma}}} \right)^{\frac{\beta}{n}} + \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} \nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda}{n}} \times
\end{aligned}$$

$$\times\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\nu(B_{k+\ell})^{\alpha_1\frac{p}{n}}\|f\chi_{k+\ell}\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\nu(B_k)}{\nu(B_{k+\ell})}\right)^{\frac{\alpha_1}{n}}\left(\frac{|B_k|}{\nu(B_k)^{\frac{n}{n+\gamma}}}\right)^{\frac{\beta}{n}}$$

$$\leq\left(\left(\frac{\nu(B_k)}{\nu(B_{k+\ell-1})}\right)^{\frac{\alpha_1}{n}}+\left(\frac{\nu(B_k)}{\nu(B_{k+\ell})}\right)^{\frac{\alpha_1}{n}}\right)\left(\frac{|B_k|}{\nu(B_k)^{\frac{n}{n+\gamma}}}\right)^{\frac{\beta}{n}}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim 2^{\ell\lambda\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}\left(2^{-(\ell-1)\alpha_1\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}+2^{-\ell\alpha_1\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}\right)\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim\left(\frac{1}{t}\right)^{(\lambda-\alpha_1)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}.$$

Suy ra

$$\|\mathcal{H}^b_{\Phi,\Omega}f\|_{M\dot{K}^{\alpha_2,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim\|b\|_{Lip^\beta}\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\int_0^\infty\frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}}\left(\frac{1}{t}\right)^{(\lambda-\alpha_1)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}dt$$

$$\lesssim\|b\|_{Lip^\beta}\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\int_0^\infty\frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+(\lambda-\alpha_1)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}(1+t^{-1})^{-\beta}}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}dt.$$

Trường hợp 2: Với $0<p<1$. Ta có

$$\|f\chi_{k+\ell+i}\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\leq\nu(B_{k+\ell+i})^{\frac{\lambda-\alpha_1}{n}}\nu(B_{k+\ell+i})^{-\frac{\lambda}{n}}\left(\sum_{j=-\infty}^{k+\ell+i}\nu(B_j)^{\frac{\alpha_1 p}{n}}\|f\chi_j\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\nu(B_{k+\ell+i})^{\frac{\lambda-\alpha_1}{n}}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)},\ \ i=-1,0.$$

Kết hợp điều này với (2.17) ta nhận được

$$\|\mathcal{H}^b_{\Phi,\Omega}f\|_{M\dot{K}^{\alpha_2,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim\sum_{i=-1,0}\|b\|_{Lip^\beta}\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}\Bigg(\nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda}{n}}\times$$

$$\times\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\nu(B_k)^{\alpha_2\frac{p}{n}}|B_k|^{\frac{\beta p}{n}}\left(\int_0^\infty\frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}}\nu(B_{k+\ell+i})^{\frac{\lambda-\alpha_1}{n}}dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg)$$

$$\lesssim\sum_{i=-1,0}\|b\|_{Lip^\beta}\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\int_0^\infty\frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}}\mathcal{T}dt\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

ở đó, $\mathcal{T}:=\nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda}{n}}\nu(B_k)^{\frac{\alpha_2}{n}}|B_k|^{\frac{\beta}{n}}\nu(B_{k+\ell+i})^{\frac{\lambda-\alpha_1}{n}}$. Từ (2.18) và với bất kỳ $k\leq k_0$, ta có

$$\mathcal{T}\lesssim 2^{(k-k_0)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\lambda}\left(\frac{1}{t}\right)^{(\lambda-\alpha_1)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}.$$

Suy ra

$$\|\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega} f\|_{M\dot{K}^{\alpha_2,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim \|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{(k-k_0)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\lambda p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+(\lambda-\alpha_1)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}(1+t^{-1})^{-\beta}} dt$$

$$\lesssim \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+(\lambda-\alpha_1)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}(1+t^{-1})^{-\beta}} dt.\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}.$$

Định lí đã được chứng minh. □

Từ Định lí 2.5 và Định lí 2.6 bằng cách chọn $\Phi(t) = t^{-n}\chi_{(1,\infty)}(t)$ và $\Omega \equiv 1$ ta nhận được kết quả mới về tính bị chặn của giao hoán tử toán tử Hardy trên không gian Morrey-Herz có hai trọng thuần nhất.

Hệ quả 2.7. *Cho* $1 \le q < \infty$ *và* $b \in Lip^\beta(\mathbb{R}^n)$ *với* $0 < \beta \le 1$. *Giả sử* $\nu, \omega \in \mathscr{W}_\gamma$, $\gamma > -n$ *và* $\omega(x') \ge c > 0$ *với mọi* $x' \in S_{n-1}$. *Nếu* $\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{n\beta}{n+\gamma}$ *và*

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^{n+1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+(\lambda-\alpha_1)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}} dt < \infty,$$

thì với bất kỳ $0 < p < \infty$ *và* $\lambda > 0$ *hoặc* $1 \le p < \infty$ *và* $\lambda = 0$, *giao hoán tử* $\mathscr{H}^b$ *bị chặn từ* $M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$ *đến* $M\dot{K}^{\alpha_2,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Kết luận Chương 2

Trong Chương 2, chúng tôi thu được các kết quả sau:

• Trình bày kết quả về điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian có trọng thuần nhất như: không gian tâm Morrey (Định lí 2.1), không gian Herz (Định lí 2.2), không gian Morrey-Herz (Định lí 2.3).

• Đưa ra các Hệ quả về ước lượng chuẩn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian có trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Hệ quả 2.1), không gian Herz (Hệ quả 2.2), không gian Morrey-Herz (Hệ quả 2.3). Hệ quả 2.1 là mở rộng và củng cố lại các kết quả có trong [12].

Mặt khác, $K_p^{\alpha/p,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(|x|^\alpha dx)$ nên Hệ quả 2.2 là mở rộng của Định lí 3.1 trong [12] trên không gian Lebesgue với trọng lũy thừa.

• Đặc biệt, chúng tôi đạt được kết luận mới về bất đẳng thức cho toán tử Hardy và toán tử Hardy liên hợp nhiều chiều là mở rộng các kết quả của Christ và Grafakos trong [13], trên các không gian có trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Hệ quả 2.4), không gian Herz (Hệ quả 2.5), không gian Morrey-Herz (Hệ quả 2.6).

• Đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz, trên các không gian có hai trọng thuần nhất như: không gian tâm Morrey (Định lí 2.4), không gian Herz (Định lí 2.5), không gian Morrey-Herz (Định lí 2.6).

• Từ Định lí 2.5 và Định lí 2.6, chọn $\Phi(t) = t^{-n}\chi_{(1,\infty)}(t)$ và $\Omega \equiv 1$. Chúng tôi đạt được kết quả mới về tính bị chặn của giao hoán tử toán tử Hardy trên không gian Morrey-Herz có hai trọng thuần nhất.

Chương 3

ƯỚC LƯỢNG CHUẨN CỦA TOÁN TỬ HAUSDORFF ĐA TUYẾN TÍNH $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}$ TRÊN KHÔNG GIAN KIỂU MORREY–HERZ

Trong chương này, chúng tôi ước lượng chuẩn của toán tử $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có hai trọng lũy thừa. Sau đó, có kết luận ước lượng chuẩn cho toán tử Hardy-Ceàro đa tuyến tính trên tích các không gian ở trên. Đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của toán tử $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian tâm Morrey, không gian Morrey-Herz có hai trọng Muckenhoupt.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo [2] trong danh mục công trình đã công bố.

3.1. Giới thiệu

Toán tử Hausdorff nhiều chiều được giới thiệu bởi Brown và Móricz [6] và được nghiên cứu độc lập bởi Lerner và Liflyand [54]. Cho Φ là hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{R}^n$. Toán tử Hausdorff nhiều chiều được cho bởi

$$\mathcal{H}_{\Phi,A}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} f(A(y)x)dy,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

ở đó $A(y)$ là ma trận vuông cấp $n \times n$ có $\det A(y) \neq 0$ với hầu khắp y trên giá của Φ. Nếu chọn $\Phi(t) = |t|^n \psi(t)\chi_{[0,1]^n}(t)$ và $A(t) = t.I_n$ (I_n là ma trận đơn vị), với $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$, ở đó $\psi : [0,1] \to [0,\infty)$ là hàm đo được, $\mathcal{H}_{\Phi,A}$ trở thành toán tử trung bình Hardy–Littlewood có trọng (xem [41])

$$\mathcal{H}_{\psi}f(x) = \int_0^1 f(tx)\psi(t)dt,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Trong những điều kiện nhất định của ψ, Carton-Lebrun và Fosset [22] chứng minh $\mathscr{H}_\psi$ bị chặn trên $L^p(\mathbb{R}^n)$ với $1 < p < \infty$. Mở rộng kết quả của [22] trong không gian Hardy và không gian BMO là Xiao [84].

Khi chọn $\Phi(y) = |y|^n\psi(y)\chi_{[0,1]^n}(y)$ và $A(y) = s(y).I_n$, ở đó $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm đo được, N. M. Chương và H. D. Hưng [14] đã giới thiệu toán tử $U_{\psi,s}$, được gọi là toán tử Hardy–Cesàro với $s(x,t) := s(t)x$, (xem [51]) xác định bởi

$$U_{\psi,s}f(x) = \int_0^1 f(s(t)x)\psi(t)dt,\ \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Lý thuyết của toán tử trung bình Hardy–Littlewood có trọng, toán tử Hardy–Cesàro và toán tử Hausdorff được phát triển đáng kể khi nghiên cứu trên nhiều không gian như không gian Lebesgue, không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey–Herz, không gian Hardy và không gian BMO có trọng (xem [3], [5], [6], [7], [49], [54], [55], [57], [58], [59], [60], [67], [69], [71]).

Coifman và Meyer trong [25] nghiên cứu điểm đa tuyến tính trên toán tử tích phân kì dị. Từ đó, lý thuyết của các toán tử đa tuyến tính được mở rộng nghiên cứu. Năm 2015, Fu [30] giới thiệu toán tử Hardy đa tuyến tính có trọng

$$\mathscr{H}_\psi^m\vec{f}(x) = \int_{[0,1]^n}\left(\prod_{i=1}^m f_i(y_i x)\right)\psi(y)dy,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.3}$$

ở đó $\psi : [0,1]^n \to [0,\infty)$ là hàm khả tích, $\vec{f} = (f_1,...,f_m)$, $f_i, i = 1,...,m$, là hàm có giá trị phức đo được trên $\mathbb{R}^n$. Các tác giả đã đạt được tính bị chặn của $\mathscr{H}_\psi^m$ trên tích các không gian Lebesgue và không gian tâm Morrey. Những kết quả này dùng để chứng minh các bất đẳng thức Riemann–Liouville và Weyl.

Sau đó, H. D. Hưng và L. D. Kỳ [46] đã giới thiệu toán tử Hardy–Cesàro đa tuyến tính là khái quát hơn toán tử Hardy đa tuyến tính, cho bởi

$$U_{\psi,\vec{s}}^{m,n}\vec{f}(x)=\int_{[0,1]^n}\left(\prod_{i=1}^{m}f_i(s_i(y)x)\right)\psi(y)dy,\ x\in\mathbb{R}^n, \tag{3.4}$$

ở đó, $s_1,...,s_m : [0,1]^n \to \mathbb{R}$. Họ đạt được các đặc trưng cho tính bị chặn của toán tử Hardy–Cesàro đa tuyến tính trên tích các không gian Lebesgue có trọng và không gian tâm Morrey có trọng.

Gần đây, N. M. Chương, Đ. V. Dương và K. H. Dũng [16] đã giới thiệu một lớp toán tử tổng quát của toán tử Hausdorff đa tuyến tính xác định bởi

$$\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Phi(y)}{|y|^n}\prod_{i=1}^{m}f_i(A_i(y)x)dy,\ x\in\mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Nếu $A_i(y)=\mathrm{diag}[s_i(y),...,s_i(y)]$, ở đó $s_1(y),...,s_m(y)\neq 0$ hầu khắp trên $\mathbb{R}^n$ với mọi $i=1,...,m$ thì được lớp toán tử

$$\mathcal{H}_{\phi,\vec{s}}\vec{f}(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\prod_{i=1}^{m}f_i(s_i(y)x)\right)\phi(y)dy,\ x\in\mathbb{R}^n. \tag{3.6}$$

Chú ý rằng, khi $\phi(y)=\psi(y)\chi_{[0,1]^n}(y)$ thì toán tử $\mathcal{H}_{\phi,\vec{s}}$ trở thành toán tử $U_{\psi,\vec{s}}^{m,n}$. Một cách tự nhiên, toán tử Hausdorff đa tuyến tính được mở rộng nghiên cứu trên các không gian cả trên trường thực và trường p-adic (xem [10], [15], [16], [18], [19], [20], [26], [30], [46]).

Trong những năm gần đây, ngày càng có nhiều mối quan tâm nghiên cứu các vấn đề liên quan đến bất đẳng thức hai trọng đối với nhiều toán tử trong giải tích điều hòa, như toán tử cực đại, biến đổi Hilbert, toán tử tích phân kì dị, toán tử Hardy và toán tử Hausdorff. Đối với các bất đẳng thức Hardy có trọng, có thể tham khảo công trình của Gogatishvili và Stepanov [38]. Trong [17], toán tử Hausdorff được nghiên cứu trên các không gian Hardy kiểu Herz có hai trọng. Do đó, điều quan tâm là mở rộng nghiên cứu về bất đẳng thức hai trọng cho toán tử Hausdorff đa tuyến tính trên các không gian hàm kiểu Morrey-Herz có hai trọng mũ hoặc hai trọng Muckenhoupt.

3.2. Toán tử $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}$ và lớp trọng lũy thừa

Trong mục này, chúng tôi trình bày kết quả về ước lượng chuẩn cho toán tử $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian có hai trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Định lí 3.1), không gian Herz (Định lí 3.2), không gian Morrey-Herz (Định lí 3.3).

Định lí 3.1. *Cho* $\Phi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ *và* $v(x) = |x|^{\beta}, \omega(x) = |x|^{\gamma}$, $v_i(x) = |x|^{\beta_i}, \omega_i(x) = |x|^{\gamma_i}$, *với mọi* $i = 1,\ldots,m$. *Nếu các điều kiện sau thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_i}{q_i} = \frac{\beta}{q}, \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{n+\beta_i}{n+\beta} \right) \lambda_i = \lambda, \text{ và } \sum_{i=1}^{m} \frac{\gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma}{q}$$

thì $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}$ *bị chặn từ* $\prod_{i=1}^{m} \dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ *đến* $\dot{M}^{\lambda,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathcal{C}_7 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^{m} \|A_i^{-1}(y)\|^{-(\beta_i+n)\lambda_i + (\gamma_i - \beta_i)\frac{1}{q_i}} dy < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}\|_{\prod_{i=1}^{m} \dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n) \to \dot{M}^{\lambda,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathcal{C}_7$.

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh điều kiện đủ của Định lí. Với $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma}{q}$, ta có được $\prod_{i=1}^{m} \omega_i^{\frac{1}{q_i}}(x) = \omega^{\frac{1}{q}}(x)$. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski, khi đó

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{L^q_\omega(B(0,R))} &= \left(\int_{B(0,R)} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^{m} f_i(A_i(y)x) \omega_i^{\frac{1}{q_i}}(x) dy \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n} \left(\left\| \prod_{i=1}^{m} f_i(A_i(y)x) \omega_i^{\frac{1}{q_i}}(x) \right\|_{L^q(B(0,R))} \right) dy.
\end{aligned}$$

Từ $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{q_i} = \frac{1}{q}$ và áp dụng bất đẳng thức Hölder, dẫn đến

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{L^q_\omega(B(0,R))} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \left(\prod_{i=1}^{m} \|f_i(A_i(y)x)\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(B(0,R))} \right) dy.$$

Sử dụng phép đổi biến $z = A_i(y)x$ với $z \in A_i(y)B(0,R)$ ta được

$\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{L^q_\omega(B(0,R))}$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \left(\prod_{i=1}^{m} \int_{B(0,\|A_i(y)\|R)} |f_i(z)|^{q_i} |A^{-1}(y)z|^{\gamma_i} |\det A_i^{-1}(y)| dz \right)^{\frac{1}{q_i}} dy.$$

Từ (1.4), với mọi $\gamma_i \in \mathbb{R}$, ta có bất đẳng thức

$$|A_i^{-1}(y)z|^{\gamma_i} \leq \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i}, \|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}|z|^{\gamma_i}.$$

Do vậy

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{L^q_\omega(B(0,R))} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \left(\prod_{i=1}^{m} \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i}, \|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\} |\det A_i^{-1}(y)| \times \right.$$
$$\left. \times \int_{B(0,\|A_i(y)\|R)} |f_i(z)|^{q_i} \omega_i(z) dz \right)^{\frac{1}{q_i}} dy$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^{m} \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i}, \|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}} \|f_i\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(B(0,\|A_i(y)\|R))} dy. \tag{3.7}$$

Từ định nghĩa của không gian tâm Morrey có hai trọng, suy ra

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)} \leq \sup_{R>0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \frac{1}{v(B(0,R))^{\lambda+\frac{1}{q}}} \prod_{i=1}^{m} \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i}, \|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}} \times$$
$$\times |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}} \|f_i\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(B(0,\|A_i(y)\|R))} dy. \tag{3.8}$$

Với các điều kiện $\lambda + \frac{1}{q} > 0, \lambda_i + \frac{1}{q_i} > 0$, $i = 1, ..., m$ và $\sum_{i=1}^{m} (\beta_i + n)(\lambda_i + \frac{1}{q_i}) = (\beta + n)\left(\lambda + \frac{1}{q}\right)$, ta có

$$v(B(0,R))^{\lambda+\frac{1}{q}} \lesssim R^{(\beta+n)(\lambda+\frac{1}{q})},$$

và

$$\frac{\prod_{i=1}^{m} v_i(B(0,\|A_i(y)\|R))^{(\lambda_i+\frac{1}{q_i})}}{v(B(0,R))^{\lambda+\frac{1}{q}}} \lesssim \prod_{i=1}^{m} \|A_i(y)\|^{(\beta_i+n)(\lambda_i+\frac{1}{q_i})},$$

hay

$$\frac{1}{v(B(0,R))^{\lambda+\frac{1}{q}}} \lesssim \prod_{i=1}^{m} \frac{\|A_i(y)\|^{(\beta_i+n)(\lambda_i+\frac{1}{q_i})}}{v_i(B(0,\|A_i(y)\|R))^{(\lambda_i+\frac{1}{q_i})}}.$$

Từ các ước lượng trên, dẫn đến

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}\\
&\quad\leq \sup_{R>0}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Phi(y)}{|y|^n}\prod_{i=1}^m \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i},\|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}}|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}}\times\\
&\quad\times\prod_{i=1}^m\frac{\|A_i(y)\|^{(\beta_i+n)(\lambda_i+\frac{1}{q_i})}}{\nu_i(B(0,\|A_i(y)\|R))^{(\lambda_i+\frac{1}{q_i})}}\|f_i\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(B(0,\|A_i(y)\|R))}dy\\
&\quad\leq \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Phi(y)}{|y|^n}\prod_{i=1}^m \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i},\|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}}|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}}\times\\
&\quad\times\|A_i(y)\|^{(\beta_i+n)(\lambda_i+\frac{1}{q_i})}dy\cdot\prod_{i=1}^m\|f_i\|_{\dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Từ (1.4) và tính chất của ma trận khả nghịch, ta có

$$\begin{aligned}
|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}} &\leq \|A_i^{-1}(y)\|^{\frac{n}{q_i}},\\
\|A_i(y)\|^{(\beta_i+n)(\lambda_i+\frac{1}{q_i})} &\lesssim \|A_i^{-1}(y)\|^{-(\beta_i+n)(\lambda_i+\frac{1}{q_i})},
\end{aligned}$$

và

$$\prod_{i=1}^m \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i},\|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}}\lesssim\prod_{i=1}^m\|A_i^{-1}(y)\|^{\frac{\gamma_i}{q_i}}.$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^m \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i},\|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}}|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}}\|A_i(y)\|^{(\beta_i+n)(\lambda_i+\frac{1}{q_i})}\\
&\lesssim\prod_{i=1}^m\|A_i^{-1}(y)\|^{-(\beta_i+n)\lambda_i+(\gamma_i-\beta_i)\frac{1}{q_i}}. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Suy ra,

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}\lesssim\prod_{i=1}^m\|f_i\|_{\dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)}.\mathscr{C}_7.$$

Vì thế, toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m\dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ đến $\dot{M}^{\lambda,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Tiếp theo, ta chứng minh điều kiện cần của Định lí. Giả sử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ bị chặn từ tích các không gian $\prod_{i=1}^m\dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ đến $\dot{M}^{\lambda,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$. Ta chọn hàm

$$f_i(x)=|x|^{(\beta_i+n)\lambda_i+(\beta_i-\gamma_i)\frac{1}{q_i}}.$$

Rõ ràng là $\|f_i\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} > 0$, với mọi $i = 1,...,m$. Ta cần chứng tỏ rằng $\|f_i\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Thật vậy,

$$
\begin{aligned}
\|f_i\|_{\dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{R>0} \frac{1}{\nu_i(B(0,R))^{\lambda_i+\frac{1}{q_i}}} \left(\int_{B(0,R)} |x|^{(\beta_i+n)\lambda_i q_i+\beta_i} dx \right)^{\frac{1}{q_i}} \\
&= \sup_{R>0} \frac{1}{R^{(\beta_i+n)\left(\lambda_i+\frac{1}{q_i}\right)}} \left(\int_0^R \int_{S_{n-1}} |rx'|^{(\beta_i+n)\lambda_i q_i+\beta_i} r^{n-1} d\sigma(x') dr \right)^{\frac{1}{q_i}} \\
&\simeq \sup_{R>0} \frac{1}{R^{(\beta_i+n)\left(\lambda_i+\frac{1}{q_i}\right)}} \frac{R^{(\beta_i+n)\left(\lambda_i+\frac{1}{q_i}\right)}}{(\beta_i+n)(\lambda_i+\frac{1}{q_i})} \simeq \frac{1}{(\beta_i+n)(\lambda_i+\frac{1}{q_i})} < \infty.
\end{aligned}
$$

Từ việc chọn f_i và điều kiện (1.5), dẫn đến

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} &\gtrsim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m \|A_i^{-1}(y)\|^{-\left((\beta_i+n)\lambda_i+(\beta_i-\gamma_i)\frac{1}{q_i}\right)} dy \times \\
&\times \sup_{R>0} \frac{1}{\nu(B(0,R))^{\lambda+\frac{1}{q}}} \left(\int_{B(0,R)} |x|^{\sum\limits_{i=1}^m \left((\beta_i+n)\lambda_i+(\beta_i-\gamma_i)\frac{1}{q_i}\right)q+\gamma} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\gtrsim \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{\dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)} . \mathcal{C}_7.
\end{aligned}
$$

Định lí được chứng minh. □

Định lí 3.2. *Cho $\Phi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ và $\nu(x) = |x|^\beta, \omega(x) = |x|^\gamma$, $\nu_i(x) = |x|^{\beta_i}, \omega_i(x) = |x|^{\gamma_i}$, với mọi $i = 1,...,m$. Nếu các điều kiện sau thỏa mãn*

$$
\sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma}{q}, \text{ và } \sum_{i=1}^m \left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i = \left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha,
$$

thì $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ to $\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu

$$
\mathcal{C}_8 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m \|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i+\frac{n+\gamma_i}{q_i}} dy < \infty.
$$

Hơn nữa, $\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)\to\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathcal{C}_8$.

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh điều kiện đủ của Định lí. Tương tự như ước lượng (3.7). Ta có

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Phi(y)}{|y|^n}\prod_{i=1}^m \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i},\|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}}|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}}\|f_i\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(A_i(y)C_k)}dy,$$

ở đó, $A_i(y)C_k=\{A_i(y)z|z\in C_k\}$. Với điều kiện (1.3), tồn tại số nguyên lớn nhất $\kappa^*=\kappa^*(y)$ với hầu khắp $y\in\mathbb{R}^n$ sao cho

$$\max_{i=1,\dots,m}\{\|A_i(y)\|\|A_i^{-1}(y)\|\}<2^{-\kappa^*}.$$

Từ điều kiện $1\leq\|A_i(y)\|\|A_i^{-1}(y)\|\leq\rho_{\vec{A}}$, $i=1,\dots,m$, ta có $|\kappa^*(y)|\simeq 1$. Cố định $i\in\{1,2,\dots,m\}$. Vì $\|A_i(y)\|\neq 0$ nên có một số nguyên $\ell_i=\ell_i(y)$ sao cho $2^{\ell_i-1}<\|A_i(y)\|\leq 2^{\ell_i}$. Để đơn giản, ta kí hiệu

$$\rho^*_{\vec{A}}(y)=\max_{i=1,\dots,m}\{\|A_i(y)\|\cdot\|A_i^{-1}(y)\|\}.$$

Khi đó, đặt $t=A_i(y)z$, với $z\in C_k$ ta có

$$|t|\geq\|A_i^{-1}(y)\|^{-1}|z|\geq\frac{2^{k+\ell_i-2}}{\rho^*_{\vec{A}}(y)}>2^{k+\ell_i-2+\kappa^*},$$

và $|t|\leq\|A_i(y)\||z|\leq 2^{k+\ell_i}$. Ta đạt được

$$A_i(y)C_k\subset\{t\in\mathbb{R}^n:2^{k+\ell_i-2+\kappa^*}<|t|\leq 2^{k+\ell_i}\},$$

Từ đó, dẫn đến

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}\leq\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Phi(y)}{|y|^n}\prod_{i=1}^m\max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i},\|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}}\times$$
$$\times|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}}\left(\sum_{r=\kappa^*-1}^{0}\|f_i\chi_{k+\ell_i+r}\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)}\right)dy.\quad(3.10)$$

Mặt khác, từ định nghĩa không gian Herz có hai trọng và áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$

$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} v(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^{m} \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i}, \|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}} \left(\sum_{r=\kappa^*-1}^{0} \|f_i \chi_{k+\ell_i+r}\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)} \right) dy \right|^p_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^{m} \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i}, \|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} v(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}} \left(\prod_{i=1}^{m} \sum_{r=\kappa^*-1}^{0} \|f_i \chi_{k+\ell_i+r}\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

Với điều kiện $\sum\limits_{i=1}^{m}(n+\beta_i)\alpha_i = (n+\beta)\alpha$ ta nhận được $v(B_k)^{\alpha} \simeq \prod_{i=1}^m v_i(B_k)^{\alpha_i}$. Áp dụng bất đẳng thức Hölder, khi đó

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} v(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}} \left(\prod_{i=1}^{m} \sum_{r=\kappa^*-1}^{0} \|f_i \chi_{k+\ell_i+r}\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\simeq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{m} v_i(B_k)^{\frac{\alpha_i}{n}} \sum_{r=\kappa^*-1}^{0} \|f_i \chi_{k+\ell_i+r}\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lesssim \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} v_i(B_k)^{\frac{\alpha_i p_i}{n}} \left(\sum_{r=\kappa^*-1}^{0} \|f_i \chi_{k+\ell_i+r}\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}}. \quad (3.11)$$

Hơn nữa, sử dụng bất đẳng thức $\left(\sum_{i=1}^N |a_i|\right)^p \leq N^{p-1} \sum_{i=1}^N |a_i|^p$ với mọi $p \geq 1$. Với $p_i \geq 1$, ta có

$$\left(\sum_{r=\kappa^*-1}^{0} \|f_i \chi_{k+\ell_i+r}\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)} \right)^{p_i} \leq (2-\kappa^*)^{p_i-1} \sum_{r=\kappa^*-1}^{0} \|f_i \chi_{k+\ell_i+r}\|^{p_i}_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.12)$$

Do vậy

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}} \vec{f}\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} (2-\kappa^*)^{m-\frac{1}{p}} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^{m} \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i}, \|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}} \cdot \mathcal{H}_{1i} dy,$$

ở đó

$$\mathscr{H}_{1i} := \prod_{i=1}^{m} \sum_{r=\kappa^*-1}^{0} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu_i(B_k)^{\frac{\alpha_i p_i}{n}} \|f_i \chi_{k+\ell_i+r}\|^{p_i}_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Từ $2^{\ell_i - 1} < \|A_i(y)\| \leq 2^{\ell_i}$, dễ thấy

$$2^{-\ell_i} \lesssim \|A_i(y)\|^{-1} \Rightarrow 2^{-\ell_i\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i} \lesssim \|A_i(y)\|^{-\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i}.$$

Với chú ý, $\nu_i(B_k)^{\frac{\alpha_i p_i}{n}} = 2^{-(\ell_i+r)\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i p_i} \nu_i(B_{k+\ell_i+r})^{\frac{\alpha_i p_i}{n}}$ suy ra

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_{1i} &\leq \prod_{i=1}^{m} \sum_{r=\kappa^*-1}^{0} 2^{-(\ell_i+r)\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \nu_i(B_{k+\ell_i+r})^{\frac{\alpha_i p_i}{n}} \|f_i \chi_{k+\ell_i+r}\|^{p_i}_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p_i}} \\
&\lesssim \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{r=\kappa^*-1}^{0} 2^{-r\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i} \right) \|A_i(y)\|^{-\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i} \|f_i\|_{\dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} (2-\kappa^*)^{m-\frac{1}{p}} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^{m} \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i}, \|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}} \times \\
&\times \|A_i(y)\|^{-\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i} \left(\sum_{r=\kappa^*-1}^{0} 2^{-r\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i} \right) dy \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{\dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Từ (1.4), ta có

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{m} \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i}, \|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}} \|A_i(y)\|^{-\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i} \\
&\lesssim \prod_{i=1}^{m} \|A_i^{-1}(y)\|^{\frac{n}{q_i}} \|A_i^{-1}(y)\|^{\frac{\gamma_i}{q_i}} \|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i} = \prod_{i=1}^{m} \|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i + \frac{n+\gamma_i}{q_i}}.
\end{aligned}$$

Hơn nữa, do $\kappa^* = |\kappa^*(y)| \simeq 1$ với hầu khắp $y \in \mathbb{R}^n$, suy ra

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{\dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)}.\mathscr{C}_8.$$

Như vậy, $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^{m} \dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ đến $\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Tiếp theo, ta chứng minh điều kiện cần của Định lí. Giả sử $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}$ xác định và bị chặn từ $\prod_{i=1}^{m} \dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ đến $\dot{K}^{\alpha,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)$. Ta chọn hàm f_i như sau

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & |x| < \rho_{\vec{A}}^{-1}, \\ |x|^{-\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i - \frac{n}{q_i} - \frac{\gamma_i}{q_i} - \varepsilon}, & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Với bất kì số nguyên k thỏa mãn $k < -\frac{\ln(\rho_{\vec{A}})}{\ln 2}$ thì $\|f_i\chi_k\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)} = 0$ với mọi $i = 1, \ldots, m$. Ngoài ra, trong các trường hợp khác đối với k, ta có

$$\begin{aligned}
\|f_i\chi_k\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{C_k}\int_{S_{n-1}} r^{-\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i q_i - n - \gamma_i - q_i\varepsilon} r^{\gamma_i} r^{n-1} d\sigma(x') dr\right)^{\frac{1}{q_i}} \\
&= |S_{n-1}|^{\frac{1}{q_i}} \left(\int_{C_k} r^{-\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i q_i - q_i\varepsilon - 1} dr\right)^{\frac{1}{q_i}} \\
&\simeq 2^{-k\left(\varepsilon + \left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i\right)} \left(\frac{2^{q_i\left(\varepsilon+\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i\right)} - 1}{q_i\left(\varepsilon + \left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i\right)}\right)^{\frac{1}{q_i}}.
\end{aligned}$$

Từ $v_i(B_k) \simeq 2^{k(n+\beta_i)}$ dẫn đến

$$\begin{aligned}
&\|f_i\|_{\dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)} \\
&\simeq \left(\sum_{k\geq\theta}^{\infty} v_i(B_k)^{\frac{\alpha_i p_i}{n}} \left|2^{-k\left(\varepsilon+\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i\right)} \left(\frac{2^{q_i\left(\varepsilon+\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i\right)} - 1}{q_i\left(\varepsilon + \left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i\right)}\right)^{\frac{1}{q_i}}\right|^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}} \\
&\simeq \left(\sum_{k\geq\theta}^{\infty} 2^{-k\varepsilon p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}} \left(\frac{2^{q_i\left(\varepsilon+\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i\right)} - 1}{q_i\left(\varepsilon + \left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i\right)}\right)^{\frac{1}{q_i}} \\
&= \left(\frac{2^{(1-\theta)\varepsilon p_i}}{2^{\varepsilon p_i} - 1}\right)^{\frac{1}{p_i}} \left(\frac{2^{q_i\left(\varepsilon+\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i\right)} - 1}{q_i\left(\varepsilon + \left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i\right)}\right)^{\frac{1}{q_i}} < \infty,
\end{aligned}$$

ở đó θ là số nguyên nhỏ nhất sao cho $\theta \geq \frac{-\ln(\rho_{\vec{A}})}{\ln 2}$. Ta xét hai tập

$$D_x = \bigcap_{i=1}^{m} \{y \in \mathbb{R}^n : |A_i(y)x| \geq \rho_{\vec{A}}^{-1}\},$$

và $E = \{y \in \mathbb{R}^n : \|A_i(y)\| \geq \varepsilon, \text{ với mọi } i = 1, ..., m\}$. Nhận thấy rằng

$$E \subset D_x \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}^n \backslash B\left(0, \varepsilon^{-1}\right). \tag{3.13}$$

Thật vậy, khi $y \in E$ ta có $\|A_i(y)\||x| \geq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n \backslash B\left(0, \varepsilon^{-1}\right)$. Cùng với điều kiện (1.3), dẫn đến

$$|A_i(y)x| \geq \|A_i^{-1}(y)\|^{-1}|x| \geq \rho_{\vec{A}}^{-1}.$$

Vậy ta nhận được (3.13). Như vậy, do (1.3) và (3.13), với bất kì $x \in \mathbb{R}^n \backslash B\left(0, \varepsilon^{-1}\right)$, suy ra

$$\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}(x) \geq \int_{D_x} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m |A_i(y)x|^{-\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i - \frac{(n+\gamma_i)}{q_i} - \varepsilon} dy$$

$$\geq \int_E \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m |A_i(y)x|^{-\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i - \frac{(n+\gamma_i)}{q_i} - \varepsilon} dy$$

$$\gtrsim \left(\int_E \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m \|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i + \frac{n+\gamma_i}{q_i} + \varepsilon} dy\right) |x|^{-\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha - \frac{(n+\gamma)}{q} - m\varepsilon} \chi_{\mathbb{R}^n \backslash B\left(0, \varepsilon^{-1}\right)}.$$

Chọn k_0 là số nguyên nhỏ nhất sao cho $2^{k_0 - 1} \geq \varepsilon^{-1}$. Ta được

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{R}^n)}$$

$$\gtrsim \left(\int_{C_k} \left|\left(\int_E \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m \|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i + \frac{n+\gamma_i}{q_i} + \varepsilon} dy\right) |x|^{-\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha - \frac{(n+\gamma)}{q} - m\varepsilon}\right|^q \omega(x) dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\gtrsim \left(\int_E \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m \|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i + \frac{n+\gamma_i}{q_i} + \varepsilon} dy\right) \left(\int_{C_k} |x|^{-\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha q - n - m\varepsilon q} dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Kết hợp các đánh giá này ta nhận được

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\gtrsim \left(\sum_{k=k_0}^\infty v(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}} \left|\left(\int_E \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m \|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i + \frac{n+\gamma_i}{q_i} + \varepsilon} dy\right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(\int_{C_k} |x|^{-\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha q - n - m\varepsilon q} dx\right)^{\frac{1}{q}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\gtrsim \left(\int_E \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m \|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i + \frac{n+\gamma_i}{q_i} + \varepsilon} dy\right) \times$$

$$\times\left(\sum_{k=k_0}^{\infty}\nu(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}}\left(\int_{C_k}|x|^{-\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha q-n-m\varepsilon q}dx\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.14}$$

Vì $\nu(B_k)\simeq 2^{k(n+\beta)}$ ta có

$$\left(\int_{C_k}|x|^{-\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha q-n-m\varepsilon q}dx\right)^{\frac{p}{q}}\simeq 2^{-kp\left(m\varepsilon+\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha\right)}\left(\frac{2^{q\left(m\varepsilon+\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha\right)}-1}{q\left(m\varepsilon+\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha\right)}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Do đó

$$\sum_{k=k_0}^{\infty}\nu(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}}\left(\int_{C_k}|x|^{-\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha q-n-m\varepsilon q}dx\right)^{\frac{p}{q}}\simeq\left(\frac{2^{-k_0\varepsilon mp}}{1-2^{-\varepsilon mp}}\right)\left(\frac{2^{q\left(m\varepsilon+\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha\right)}-1}{q\left(m\varepsilon+\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha\right)}\right)^{\frac{p}{q}}. \tag{3.15}$$

Ta đặt

$$\theta^*(\varepsilon)=\frac{\left(\frac{2^{-k_0\varepsilon mp}}{1-2^{-\varepsilon mp}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{2^{q\left(m\varepsilon+\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha\right)}-1}{q\left(m\varepsilon+\left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha\right)}\right)^{\frac{1}{q}}}{\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{2^{(1-\theta)\varepsilon p_i}}{2^{\varepsilon p_i}-1}\right)^{\frac{1}{p_i}}\left(\frac{2^{q_i\left(\varepsilon+\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i\right)}-1}{q_i\left(\varepsilon+\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i\right)}\right)^{\frac{1}{q_i}}}.$$

Sử dụng điều kiện $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}=\frac{1}{p}$ và $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{q_i}=\frac{1}{q}$, suy ra

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-m\varepsilon}\theta^*(\varepsilon)=c>0.$$

Từ (3.14) và (3.15), dẫn đến

$$\begin{aligned}\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}&\gtrsim\varepsilon^{-m\varepsilon}\theta^*(\varepsilon)\prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_{\dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)}\times\\&\times\left(\int_E\frac{\Phi(y)}{|y|^n}\prod_{i=1}^{m}\|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i+\frac{n+\gamma_i}{q_i}}\prod_{i=1}^{m}\|A_i^{-1}(y)\|^{\varepsilon}\varepsilon^{m\varepsilon}dy\right).\end{aligned}$$

Chú ý rằng, $\left\|A_i(y)\right\|\geq\varepsilon$ với mọi $y\in E$, cùng với (1.3) ta được

$$\prod_{i=1}^{m}\left\|A_i^{-1}(y)\right\|^{\varepsilon}\varepsilon^{m\varepsilon}\leq\rho_{\vec{A}}^{\varepsilon}\lesssim 1, \tag{3.16}$$

với ε đủ nhỏ. Cho $\varepsilon \to 0$. Từ giả thiết về tính bị chặn của $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ đến $\dot{K}^{\alpha,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)$, áp dụng Định lí hội tụ bị chặn Lebesgue ta nhận được

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m \|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i+\frac{n+\gamma_i}{q_i}} dy < \infty.$$

Định lí được chứng minh. □

Định lí 3.3. *Cho $\Phi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $\lambda, \lambda_i > 0$ và $v(x) = |x|^\beta, \omega(x) = |x|^\gamma$, $v_i(x) = |x|^{\beta_i}, \omega_i(x) = |x|^{\gamma_i}$, với mọi $i = 1, ..., m$. Nếu các điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^m \left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\lambda_i = \left(1+\frac{\beta}{n}\right)\lambda,\ \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma}{q},\ \text{và}\ \sum_{i=1}^m \left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i = \left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha,$$

thì toán tử $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ đến $M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathcal{C}_9 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m \|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)(\alpha_i-\lambda_i)+\frac{n+\gamma_i}{q_i}} dy < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}\|_{\prod_{i=1}^m M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)\to M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathcal{C}_9$.

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh điều kiện đủ của Định lí. Chứng minh tương tự Định lí 3.2. Từ (3.10) và áp dụng bất đẳng thức Minkowski ta có

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} v(B_{k_0})^{-\frac{\lambda}{n}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i}, \|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}} \times\\
&\times \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} v(B_k)^{\frac{\alpha p}{n}} \prod_{i=1}^m \left(\sum_{r=\kappa^*-1}^{0} \|f_i\chi_{k+\ell_i+r}\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} dy.
\end{aligned}$$

Mặt khác, từ (3.11) và (3.12), suy ra

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} (2-\kappa^*)^{m-\frac{1}{p}} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i}, \|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}} \times
\end{aligned}$$

$$\times \prod_{i=1}^{m} \sum_{r=\kappa^*-1}^{0} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} \nu_i(B_{k_0})^{-\frac{\lambda_i}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} \nu_i(B_k)^{\frac{\alpha_i p_i}{n}} \|f_i\chi_{k+\ell_i+r}\|^{p_i}_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p_i}} dy.$$

Đặt

$$\mathscr{H}_{2i} := \prod_{i=1}^{m} \sum_{r=\kappa^*-1}^{0} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} \nu_i(B_{k_0})^{-\frac{\lambda_i}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} \nu_i(B_k)^{\frac{\alpha_i p_i}{n}} \|f_i\chi_{k+\ell_i+r}\|^{p_i}_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)} \right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Ước lượng tương tự $\mathscr{H}_{1i}$, ta có

$$\mathscr{H}_{2i} \lesssim \prod_{i=1}^{m} \|A_i(y)\|^{(\lambda_i-\alpha_i)\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)} \sum_{r=\kappa^*-1}^{0} 2^{r\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)(\lambda_i-\alpha_i)} \|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} (2-\kappa^*)^{m-\frac{1}{p}} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^{m} \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i}, \|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}} \times \\
&\times \|A_i(y)\|^{(\lambda_i-\alpha_i)\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)} \left(\sum_{r=\kappa^*-1}^{0} 2^{r\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)(\lambda_i-\alpha_i)} \right) dy \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Từ (1.4), ta có

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{m} \max\{\|A_i^{-1}(y)\|^{\gamma_i}, \|A_i(y)\|^{-\gamma_i}\}^{\frac{1}{q_i}} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{1}{q_i}} \|A_i(y)\|^{(\lambda_i-\alpha_i)\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)} \\
&\lesssim \prod_{i=1}^{m} \|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)(\alpha_i-\lambda_i)+\frac{n+\gamma_i}{q_i}}.
\end{aligned}$$

Khi đó,

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}.\mathscr{C}_9.$$

Như vậy, $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ đến $M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Tiếp theo, ta chứng minh điều kiện cần của Định lí. Giả sử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ đến $M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$. Với mỗi $i = 1, ..., m$, ta chọn

$$f_i(x) = |x|^{(\lambda_i-\alpha_i)\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)-\frac{(n+\gamma_i)}{q_i}}.$$

Khi đó, ta có được

$$\|f_i\chi_k\|_{L^{q_i}_{\omega_i}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \ln 2, \text{ với } (\lambda_i - \alpha_i)\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right) = 0, \\ 2^{k(\lambda_i-\alpha_i)\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)} \left(\frac{1-2^{-q_i(\lambda_i-\alpha_i)\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)}}{(\lambda_i-\alpha_i)\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)q_i}\right)^{\frac{1}{q_i}}, \text{ trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Từ đó, dẫn đến

$$0 < \|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)} \simeq \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\lambda_i} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\lambda_i p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}} < \infty.$$

Mặt khác, từ (1.5) và điều kiện $\sum_{i=1}^{m}(n+\beta_i)\,\alpha_i = (n+\beta)\,\alpha$, ta có

$$|A_i(y)x|^{\sum_{i=1}^{m}\left((\lambda_i-\alpha_i)\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)-\frac{(n+\gamma_i)}{q_i}\right)} \geq \prod_{i=1}^{m}\|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)(\alpha_i-\lambda_i)+\frac{(n+\gamma_i)}{q_i}}|x|^{(\lambda-\alpha)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)-\frac{(n+\gamma)}{q}}.$$

Do vậy

$$\begin{aligned}&\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}(x)\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)}\\ &\gtrsim \left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Phi(y)}{|y|^n}\prod_{i=1}^{m}\|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)(\alpha_i-\lambda_i)+\frac{(n+\gamma_i)}{q_i}}dy\right)\||x|^{(\lambda-\alpha)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)-\frac{(n+\gamma)}{q}}\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Hơn nữa

$$\mathscr{C}_9 \lesssim \|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\|_{\prod_{i=1}^{m} M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)\to M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Định lí được chứng minh. □

Nhận xét rằng, nếu $A_i(y) = \mathrm{diag}[s_i(y),...,s_i(y)]$, ở đó $s_1(y),...,$ $s_m(y) \neq 0$ hầu khắp trên $\mathbb{R}^n$ với mọi $i = 1,...,m$ thì $A_i(y)$ thỏa mãn điều kiện (1.3). Do đó, như là các trường hợp đặc biệt của Định lí 3.1, Định lí 3.2 và Định lí 3.3, chúng ta cũng có ước lượng chuẩn của toán tử $\mathscr{H}_{\phi,\vec{s}}$ trên các không gian có hai trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Hệ quả 3.1), không gian Herz (Hệ quả 3.2) và không gian Morrey-Herz (Hệ quả 3.3).

Hệ quả 3.1. *Cho* ϕ *là hàm không âm và* $v(x) = |x|^{\beta}, \omega(x) = |x|^{\gamma}$, $v_i(x) = |x|^{\beta_i}, \omega_i(x) = |x|^{\gamma_i}$, *với mọi* $i = 1, ..., m$. *Nếu các điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_i}{q_i} = \frac{\beta}{q}, \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{n+\beta_i}{n+\beta} \right) \lambda_i = \lambda \text{ và } \sum_{i=1}^{m} \frac{\gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma}{q}$$

thì $\mathscr{H}_{\phi,\vec{s}}$ *bị chặn từ* $\prod_{i=1}^{m} \dot{M}_{v_i,\omega_i}^{\lambda_i,q_i}(\mathbb{R}^n)$ *đến* $\dot{M}_{v,\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{7.1} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{i=1}^{m} |s_i(y)|^{(\beta_i+n)\lambda_i + (\beta_i - \gamma_i)\frac{1}{q_i}} \right) \phi(y) dy < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}_{\phi,\vec{s}}\|_{\prod_{i=1}^{m} \dot{M}_{v_i,\omega_i}^{\lambda_i,q_i}(\mathbb{R}^n) \to \dot{M}_{v,\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{7.1}$.

Hệ quả 3.2. *Cho* ϕ *là hàm không âm và* $v(x) = |x|^{\beta}, \omega(x) = |x|^{\gamma}$, $v_i(x) = |x|^{\beta_i}, \omega_i(x) = |x|^{\gamma_i}$, *với mọi* $i = 1, ..., m$. *Nếu các điều kiện sau thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma}{q} \text{ và } \sum_{i=1}^{m} \left(1 + \frac{\beta_i}{n} \right) \alpha_i = \left(1 + \frac{\beta}{n} \right) \alpha,$$

thì $\mathscr{H}_{\phi,\vec{s}}$ *bị chặn từ* $\prod_{i=1}^{m} \dot{K}_{v_i,\omega_i}^{\alpha_i,p_i,q_i}(\mathbb{R}^n)$ *đến* $\dot{K}_{v,\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{8.1} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{i=1}^{m} |s_i(y)|^{-\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i - \frac{(n+\gamma_i)}{q_i}} \right) \phi(y) dy < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}_{\phi,\vec{s}}\|_{\prod_{i=1}^{m} \dot{K}_{v_i,\omega_i}^{\alpha_i,p_i,q_i}(\mathbb{R}^n) \to \dot{K}_{v,\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{8.1}$.

Hệ quả 3.3. *Cho* ϕ *là hàm không âm,* $\lambda, \lambda_i > 0$ *và* $v(x) = |x|^{\beta}, \omega(x) = |x|^{\gamma}$, $v_i(x) = |x|^{\beta_i}, \omega_i(x) = |x|^{\gamma_i}$, *với mọi* $i = 1, ..., m$. *Nếu các điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^{m} \left(1 + \frac{\beta_i}{n} \right) \lambda_i = \left(1 + \frac{\beta}{n} \right) \lambda, \sum_{i=1}^{m} \frac{\gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma}{q}, \text{ và } \sum_{i=1}^{m} \left(1 + \frac{\beta_i}{n} \right) \alpha_i = \left(1 + \frac{\beta}{n} \right) \alpha,$$

thì $\mathscr{H}_{\phi,\vec{s}}$ *bị chặn từ* $\prod_{i=1}^{m} M\dot{K}_{v_i,\omega_i}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}(\mathbb{R}^n)$ *đến* $M\dot{K}_{v,\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{9.1} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{i=1}^{m} |s_i(y)|^{(\lambda_i - \alpha_i)\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right) - \frac{(n+\gamma_i)}{q_i}} \right) \phi(y) dy < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}_{\phi,\vec{s}}\|_{\prod_{i=1}^{m} M\dot{K}_{v_i,\omega_i}^{\alpha_i,p_i,q_i}(\mathbb{R}^n) \to M\dot{K}_{v,\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{9.1}$.

Từ Hệ quả 3.1, chúng tôi có ước lượng chuẩn của toán tử Hardy–Cesàro đa tuyến tính $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ đến $\dot{M}^{\lambda,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathscr{C}_{7.2} = \int_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^m |s_i(t)|^{(\beta_i+n)\lambda_i+(\beta_i-\gamma_i)\frac{1}{q_i}} \right) \psi(t)dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)\to \dot{M}^{\lambda,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{7.2}$.

Từ Hệ quả 3.2, chúng tôi có ước lượng chuẩn của toán tử Hardy–Cesàro đa tuyến tính $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ đến $\dot{K}^{\alpha,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathscr{C}_{8.2} = \int_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^m |s_i(t)|^{-\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i-\frac{(n+\gamma_i)}{q_i}} \right) \psi(t)dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)\to \dot{K}^{\alpha,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{8.2}$.

Hệ quả 3.2 là mở rộng của Định lí 3.2 trong [15] với hai trọng lũy thừa.

3.3. Toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ và lớp trọng Muckenhoupt

Trong mục này, chúng tôi đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên các không gian có hai trọng Muckenhoupt như: không gian tâm Morrey (Định lí 3.4), không gian Morrey-Herz (Định lí 3.5).

Định lí 3.4. *Cho $1 \le q^*, \xi, \eta < \infty, -\frac{1}{q_i} < \lambda_i < 0$, với mọi $i = 1, ..., m$ và $v \in A_\eta, \omega \in A_\xi$ với các chỉ số tới hạn r_v, r_ω cho điều kiện Hölder ngược sao cho $\omega(B(0,R)) \lesssim v(B(0,R))$ với mọi $R > 0$. Giả sử $q > q^*\xi r'_\omega, \delta_1 \in (1, r_\omega), \delta_2 \in (1, r_v), \lambda^* = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ và*

$$\mathscr{C}_{10} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n} \prod_{i=1}^m |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{\xi}{q_i}} \|A_i(y)\|^{\frac{\xi n}{q_i}} \mathscr{A}_i(y)dy < \infty,$$

ở đó

$$\mathscr{A}_i(y) = \left(\|A_i(y)\|^{n\left(\lambda_i+\frac{1}{q_i}\right)\frac{\delta_2-1}{\delta_2}} \chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|\le 1\}} + \|A_i(y)\|^{n\eta\left(\lambda_i+\frac{1}{q_i}\right)} \chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|>1\}} \right) \times$$

$$\times\left(\|A_i(y)\|^{-\frac{n}{q_i}\frac{\delta_1-1}{\delta_1}}\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|>1\}}+\|A_i(y)\|^{-\frac{\xi n}{q_i}}\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|\le 1\}}\right).$$

Khi đó, $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$ đến $\dot{M}^{\lambda^*,q^*}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski, ta có

$$\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{L^{q^*}_\omega(B(0,R))}\le\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}\left(\int_{B(0,R)}\prod_{i=1}^m\left|f_i(A_i(y)x)\right|^{q^*}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q^*}}dy.$$

Từ điều kiện $q>q^*\xi r'_\omega$, tồn tại $r\in(1,r_\omega)$ sao cho $\frac{q}{\xi}=q^*r'$. Áp dụng điều kiện Hölder ngược và bất đẳng thức Hölder với $\frac{\xi}{q}=\frac{\xi}{q_1}+\cdots+\frac{\xi}{q_m}$, suy ra

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{B(0,R)}\prod_{i=1}^m\left|f_i(A_i(y)x)\right|^{q^*}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q^*}}\\
&\qquad\le\left(\int_{B(0,R)}\prod_{i=1}^m\left|f_i(A_i(y)x)\right|^{\frac{q}{\xi}}dx\right)^{\frac{\xi}{q}}\left(\int_{B(0,R)}\omega(x)^r dx\right)^{\frac{1}{rq^*}}\\
&\qquad\le\left(\int_{B(0,R)}\prod_{i=1}^m\left|f_i(A_i(y)x)\right|^{\frac{q}{\xi}}dx\right)^{\frac{\xi}{q}}|B(0,R)|^{-\frac{\xi}{q}}\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q^*}}\\
&\qquad\le\prod_{i=1}^m\left(\int_{B(0,R)}\left|f_i(A_i(y)x)\right|^{\frac{q_i}{\xi}}dx\right)^{\frac{\xi}{q_i}}|B(0,R)|^{-\frac{\xi}{q}}\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q^*}}
\end{aligned}$$

Sử dụng phép đổi biến $z=A_i(y)x$, ta được

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{L^{q^*}_\omega(B(0,R))}\\
&\le\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q^*}}|B(0,R)|^{-\frac{\xi}{q}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}\prod_{i=1}^m|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{\xi}{q_i}}\|f_i\|_{L^{\frac{q_i}{\xi}}(B(0,\|A_i(y)\|R))}dy.
\end{aligned}$$

Từ Mệnh đề 1.2, ta có

$$\begin{aligned}
&\|f_i\|_{L^{\frac{q_i}{\xi}}(B(0,\|A_i(y)\|R))}\\
&\lesssim|B(0,\|A_i(y)\|R)|^{\frac{\xi}{q_i}}\left(\frac{1}{\omega(B(0,\|A_i(y)\|R)}\int_{B(0,\|A_i(y)\|R)}|f_i|^{q_i}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q_i}}
\end{aligned}$$

$$= |B(0,\|A_i(y)\|R)|^{\frac{\xi}{q_i}}\omega(B(0,\|A_i(y)\|R))^{-\frac{1}{q_i}}\|f_i\|_{L^{q_i}_\omega(B(0,\|A_i(y)\|R))}.$$

Khi đó,

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{L^{q^*}_\omega(B(0,R))}$$

$$\lesssim \omega(B(0,R))^{\frac{1}{q^*}}|B(0,R)|^{-\frac{\xi}{q}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}\left(\prod_{i=1}^m|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{\xi}{q_i}}|B(0,\|A_i(y)\|R)|^{\frac{\xi}{q_i}}\times\right.$$

$$\left.\times\,\omega(B(0,\|A_i(y)\|R))^{-\frac{1}{q_i}}\|f_i\|_{L^{q_i}_\omega(B(0,\|A_i(y)\|R))}\right)dy$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}\prod_{i=1}^m\left(|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{\xi}{q_i}}\|A_i(y)\|^{\frac{\xi n}{q_i}}\frac{1}{\omega(B(0,\|A_i(y)\|R))^{\frac{1}{q_i}}}\right)\times$$

$$\times\left(\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q^*}}\prod_{i=1}^m\|f_i\|_{L^{q_i}_\omega(B(0,\|A_i(y)\|R))}\right)dy.$$

Do vậy,

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{\dot{M}^{\lambda^*,q^*}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{R>0}\frac{1}{\nu(B(0,R))^{\lambda^*+\frac{1}{q^*}}}\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{L^{q^*}_\omega(B(0,R))}$$

$$\lesssim \sup_{R>0}\frac{1}{\nu(B(0,R))^{\lambda^*+\frac{1}{q^*}}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}\prod_{i=1}^m\left(|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{\xi}{q_i}}\|A_i(y)\|^{\frac{\xi n}{q_i}}\frac{1}{\omega(B(0,\|A_i(y)\|R))^{\frac{1}{q_i}}}\right)\times$$

$$\times\left(\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q^*}}\prod_{i=1}^m\|f_i\|_{L^{q_i}_\omega(B(0,\|A_i(y)\|R))}\right)dy$$

$$\lesssim \sup_{R>0}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}\prod_{i=1}^m|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{\xi}{q_i}}\|A_i(y)\|^{\frac{\xi n}{q_i}}\mathscr{A}_i(R)\prod_{i=1}^m\|f_i\|_{\dot{M}^{q_i,\lambda_i}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}dy,$$

ở đó,

$$\mathscr{A}_i(R) = \left(\frac{\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q^*}}}{\nu(B(0,R))^{\lambda^*+\frac{1}{q^*}}}\right)\left(\prod_{i=1}^m\frac{\nu(B(0,\|A_i(y)\|R))^{\lambda_i+\frac{1}{q_i}}}{\omega(B(0,\|A_i(y)\|R))^{\frac{1}{q_i}}}\right).$$

Từ $\frac{1}{q^*} > \frac{1}{q}$ và điều kiện $\omega(B(0,R)) \lesssim \nu(B(0,R))$ suy ra

$$\left(\frac{\omega(B(0,R))}{\nu(B(0,R))}\right)^{\frac{1}{q^*}} \lesssim \left(\frac{\omega(B(0,R))}{\nu(B(0,R))}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Mặt khác, từ $\lambda^* = \sum_{i=1}^m\lambda_i, \frac{1}{q} = \sum_{i=1}^m\frac{1}{q_i}$, dẫn đến

$$\mathscr{A}_i(R) \lesssim \prod_{i=1}^m\left(\frac{\nu(B(0,\|A_i(y)\|R))}{\omega(B(0,\|A_i(y)\|R))}\right)^{\frac{1}{q_i}}\prod_{i=1}^m\left(\frac{\nu(B(0,\|A_i(y)\|R))}{\nu(B(0,R))}\right)^{\lambda_i}\prod_{i=1}^m\left(\frac{\omega(B(0,R))}{\nu(B(0,R))}\right)^{\frac{1}{q_i}}$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{v(B(0,\|A_i(y)\|R))}{v(B(0,R))} \right)^{\lambda_i + \frac{1}{q_i}} \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{\omega(B(0,R))}{\omega(B(0,\|A_i(y)\|R))} \right)^{\frac{1}{q_i}}.$$

Từ các giả thiết $\omega \in A_\xi, v \in A_\eta, \delta_1 \in (1, r_\omega), \delta_2 \in (1, r_v), \frac{1}{q_i} + \lambda_i > 0$ và Mệnh đề 1.3, ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1: $0 < \|A_i(y)\| \leq 1$. Ta có

$$\left(\frac{v(B(0,\|A_i(y)\|R))}{v(B(0,R))} \right)^{\lambda_i + \frac{1}{q_i}} \lesssim \left(\frac{|B(0,\|A_i(y)\|R)|}{|B(0,R)|} \right)^{\left(\lambda_i + \frac{1}{q_i}\right) \frac{\delta_2 - 1}{\delta_2}} = \|A_i(y)\|^{n\left(\lambda_i + \frac{1}{q_i}\right) \frac{\delta_2 - 1}{\delta_2}},$$

$$\left(\frac{\omega(B(0,R))}{\omega(B(0,\|A_i(y)\|R))} \right)^{\frac{1}{q_i}} \lesssim \left(\frac{|B(0,R)|}{|B(0,\|A_i(y)\|R)|} \right)^{\frac{\xi}{q_i}} = \|A_i(y)\|^{-\frac{n\xi}{q_i}}.$$

Trường hợp 2. $\|A_i(y)\| > 1$. Ta có

$$\left(\frac{v(B(0,\|A_i(y)\|R))}{v(B(0,R))} \right)^{\lambda_i + \frac{1}{q_i}} \lesssim \left(\frac{|B(0,\|A_i(y)\|R)|}{|B(0,R)|} \right)^{\left(\lambda_i + \frac{1}{q_i}\right)\eta} = \|A_i(y)\|^{n\eta\left(\lambda_i + \frac{1}{q_i}\right)}$$

$$\left(\frac{\omega(B(0,R))}{\omega(B(0,\|A_i(y)\|R))} \right)^{\frac{1}{q_i}} \lesssim \left(\frac{|B(0,R)|}{|B(0,\|A_i(y)\|R)|} \right)^{\frac{1}{q_i}\left(\frac{\delta_1 - 1}{\delta_1}\right)} = \|A_i(y)\|^{-\frac{n}{q_i}\left(\frac{\delta_1 - 1}{\delta_1}\right)}.$$

Suy ra

$$\mathscr{A}_i(R) \lesssim \prod_{i=1}^{m} \left(\|A_i(y)\|^{n\left(\lambda_i + \frac{1}{q_i}\right)\frac{\delta_2 - 1}{\delta_2}} \chi_{\{y \in \mathbb{R}^n : \|A_i(y)\| \leq 1\}} + \|A_i(y)\|^{n\eta\left(\lambda_i + \frac{1}{q_i}\right)} \chi_{\{y \in \mathbb{R}^n : \|A_i(y)\| > 1\}} \right) \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{m} \left(\|A_i(y)\|^{-\frac{n}{q_i}\frac{\delta_1 - 1}{\delta_1}} \chi_{\{y \in \mathbb{R}^n : \|A_i(y)\| > 1\}} + \|A_i(y)\|^{-\frac{\xi n}{q_i}} \chi_{\{y \in \mathbb{R}^n : \|A_i(y)\| \leq 1\}} \right).$$

Khi đó, ta đạt được

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{\dot{M}^{\lambda^*,q^*}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$
$$\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n} \prod_{i=1}^{m} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{\xi}{q_i}} \|A_i(y)\|^{\frac{\xi n}{q_i}} \mathscr{A}_i(y) dy \right) \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{\dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)}.$$

Định lí được chứng minh. $\square$

Định lí 3.5. *Cho $1 \leq q^*, \xi, \eta < \infty, \alpha_i < 0$, $\lambda_i \geq 0$, với mọi $i = 1, ..., m$ và $\omega \in A_\xi, v \in A_\eta$ với các chỉ số tới hạn r_ω, r_v cho điều kiện Hölder ngược sao cho $\omega(B_k) \lesssim v(B_k)$, với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Giả sử $q >$*

$\max\{mq^*, q^*\xi r'_\omega\}, \delta_1 \in (1, r_\omega), \delta_2 \in (1, r_\nu)$ *và* α^*, λ^* *là các số thực thỏa mãn*

$$\lambda^* = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \text{ và } \frac{1}{m}\left(\frac{\alpha^*}{n} + \frac{1}{q^*}\right) = \frac{\alpha_i}{n} + \frac{1}{q_i}, \text{ với mọi } i = 1, ..., m.$$

Nếu $\frac{\alpha^*}{n} + \frac{1}{q^*} \leq 0$ *và*

$$\mathscr{C}_{11.1} = \prod_{i=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}} \|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}} \mathscr{B}_{1i}(y) dy\right)^{\frac{1}{m}} < \infty,$$

ở đó

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_{1i}(y) = \|A_i(y)\|^{-\left(\left(\frac{n}{q^*}+\alpha^*\right)\frac{\delta_1-1}{\delta_1}+(\alpha^*-m\lambda_i)\frac{\delta_2-1}{\delta_2}-\xi\alpha^*\right)}\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|<1\}} +\\ + \|A_i(y)\|^{-\left(\left(\frac{n}{q^*}+\alpha^*\right)\xi+\eta(\alpha^*-m\lambda_i)-\alpha^*\frac{\delta_1-1}{\delta_1}\right)}\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|\geq 1\}},\end{aligned}$$

hoặc $\frac{\alpha^*}{n} + \frac{1}{q^*} > 0$ *và*

$$\mathscr{C}_{11.2} = \prod_{i=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}} \|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}} \mathscr{B}_{2i}(y) dy\right)^{\frac{1}{m}} < \infty,$$

ở đó

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_{2i}(y) = \|A_i(y)\|^{-\left(\frac{\xi n}{q^*}+(\alpha^*-m\lambda_i)\frac{\delta_2-1}{\delta_2}\right)}\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|<1\}} +\\ + \|A_i(y)\|^{-\left(\frac{n}{q^*}\frac{\delta_1-1}{\delta_1}+\eta(\alpha^*-m\lambda_i)\right)}\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|\geq 1\}},\end{aligned}$$

thì toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ *bị chặn từ* $\prod_{i=1}^m M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$ *đến* $M\dot{K}^{\alpha^*,\lambda^*,p,q^*}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Chứng minh. Tương tự Định lí 3.4, ta có

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\chi_k\|_{L^{q^*}_\omega(\mathbb{R}^n)} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}\left(\int_{C_k}\prod_{i=1}^m \left|f_i(A_i(y)x)\right|^{q^*}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q^*}} dy,$$

và

$$\left(\int_{C_k}\prod_{i=1}^m \left|f_i(A_i(y)x)\right|^{q^*}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q^*}} \lesssim \left(\int_{C_k}\prod_{i=1}^m \left|f_i(A_i(y)x)\right|^{\frac{q}{\xi}}dx\right)^{\frac{\xi}{q}} |B_k|^{-\frac{\xi}{q}}\omega(B_k)^{\frac{1}{q^*}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder và phép đổi biến $z = A_i(y)x$, suy ra

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\chi_k\|_{L^{q^*}_\omega(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim |B_k|^{-\frac{\xi}{q}}\omega(B_k)^{\frac{1}{q^*}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}\prod_{i=1}^m|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{\xi}{q_i}}\|f_i\|_{L^{\frac{q_i}{\xi}}(B(0,\|A_i(y)\|2^k))}dy.$$

Mặt khác, từ Mệnh đề 1.2 ta có

$$\|f_i\|_{L^{\frac{q_i}{\xi}}(B(0,\|A_i(y)\|2^k))}$$

$$\lesssim |B(0,\|A_i(y)\|2^k)|^{\frac{\xi}{q_i}}\omega(B(0,\|A_i(y)\|2^k))^{-\frac{1}{q_i}}\|f_i\|_{L^{q_i}_\omega(B(0,\|A_i(y)\|2^k))}.$$

Vì vậy

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\chi_k\|_{L^{q^*}_\omega(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim |B_k|^{-\frac{\xi}{q}}\omega(B_k)^{\frac{1}{q^*}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}\Bigg(\prod_{i=1}^m|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{\xi}{q_i}}|B(0,\|A_i(y)\|2^k)|^{\frac{\xi}{q_i}}\times$$

$$\times\,\omega(B(0,\|A_i(y)\|2^k))^{-\frac{1}{q_i}}\|f_i\|_{L^{q_i}_\omega(B(0,\|A_i(y)\|2^k))}\Bigg)dy$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}\prod_{i=1}^m\left(|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{\xi}{q_i}}\|A_i(y)\|^{\frac{\xi n}{q_i}}\frac{\omega(B_k)^{\frac{1}{mq^*}}}{\omega(B(0,\|A_i(y)\|2^k))^{\frac{1}{q_i}}}\|f_i\|_{L^{q_i}_\omega(B(0,\|A_i(y)\|2^k))}\right)dy. \tag{3.17}$$

Do $\lambda^* = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$, áp dụng bất đẳng thức Minkowski và bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{M\dot{K}^{\alpha^*,\lambda^*,p,q^*}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}\prod_{i=1}^m\left(|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{\xi}{q_i}}\|A_i(y)\|^{\frac{\xi n}{q_i}}\right)\times$$

$$\times\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}\nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda^*}{n}}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\prod_{i=1}^m\frac{\nu(B_k)^{\frac{\alpha^*p}{mn}}\omega(B_k)^{\frac{p}{mq^*}}}{\omega(B(0,\|A_i(y)\|2^k))^{\frac{p}{q_i}}}\|f_i\|^p_{L^{q_i}_\omega(B(0,\|A_i(y)\|2^k))}\right)^{\frac{1}{p}}dy$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}\prod_{i=1}^m\left(|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{\xi}{q_i}}\|A_i(y)\|^{\frac{\xi n}{q_i}}\right)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^m\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}\nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda_i}{n}}\left(\sum_{k=-\infty}^{k_0}\frac{\nu(B_k)^{\frac{\alpha^*p_i}{mn}}\omega(B_k)^{\frac{p_i}{mq^*}}}{\omega(B(0,\|A_i(y)\|2^k))^{\frac{p_i}{q_i}}}\|f_i\|^{p_i}_{L^{q_i}_\omega(B(0,\|A_i(y)\|2^k))}\right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Do vậy,

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{M\dot{K}^{\alpha^*,\lambda^*p,q^*}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}\prod_{i=1}^m\left(|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{\xi}{q_i}}\|A_i(y)\|^{\frac{\xi n}{q_i}}\mathscr{C}_{1i}(y)\right)dy,$$

ở đó

$$\mathscr{C}_{1i}(y) := \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} \nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda_i}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} \left(\frac{\nu(B_k)^{\frac{\alpha^*}{mn}} \omega(B_k)^{\frac{1}{mq^*}}}{\omega(B(0,\|A_i(y)\|2^k))^{\frac{1}{q_i}}} \|f_i\|_{L^{q_i}_\omega(B(0,\|A_i(y)\|2^k))} \right)^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder với $\underbrace{\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}}_{m \text{ lần}}=1$, ta có

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{M\dot{K}^{\alpha^*,\lambda^*,p,q^*}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$
$$\lesssim \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}} \|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}} \mathscr{C}_{1i}(y)^m dy \right)^{\frac{1}{m}} =: \prod_{i=1}^m \mathscr{E}_{1i}^{\frac{1}{m}}.$$

Cố định $i \in \{1,...,m\}$. Vì $\|A_i(y)\| \neq 0$, nên có $j=j(i,y)$ sao cho $2^{j-1} \le \|A_i(y)\| < 2^j$. Do đó, $B_{k+j-1} \subseteq B(0,\|A_i(y)\|2^k) \subset B_{k+j}$. Điều này suy ra $\omega(B_{k+j-1}) \le \omega(B(0,\|A_i(y)\|2^k))$ và $B(0,\|A_i(y)\|2^k) \subset \cup_{\ell=-\infty}^{j} C_{k+\ell}$. Kết hợp điều này với bất đẳng thức $\left(\sum |a_\ell|\right)^\theta \le \sum |a_\ell|^\theta$ với mọi $0<\theta\le 1$, ta có

$$\mathscr{C}_{1i}(y) \le \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} \nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda_i}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} \left(\frac{\nu(B_k)^{\frac{\alpha^*}{mn}} \omega(B_k)^{\frac{1}{mq^*}}}{\omega(B(0,\|A_i(y)\|2^k))^{\frac{1}{q_i}}} \|f_i\|_{L^{q_i}_\omega(B_{k+j})} \right)^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

$$\le \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} \nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda_i}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} \left(\frac{\nu(B_k)^{\frac{\alpha^*}{mn}} \omega(B_k)^{\frac{1}{mq^*}}}{\omega(B(0,\|A_i(y)\|2^k))^{\frac{1}{q_i}} \nu(B_{k+j})^{\frac{\alpha_i}{n}}} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \sum_{\ell=-\infty}^{j} \left(\frac{\nu(B_{k+j})}{\nu(B_{k+\ell})} \right)^{\frac{\alpha_i}{n}} \nu(B_{k+\ell})^{\frac{\alpha_i}{n}} \|f_i\|_{L^{q_i}_\omega(C_{k+\ell})} \right)^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}}$$

$$\le \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} \nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda_i}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} \left(\mathscr{D}_k^j \sum_{\ell=-\infty}^{j} \left(\frac{\nu(B_{k+j})}{\nu(B_{k+\ell})} \right)^{\frac{\alpha_i}{n}} \nu(B_{k+\ell})^{\frac{\alpha_i}{n}} \|f_i\|_{L^{q_i}_\omega(C_{k+\ell})} \right)^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}},$$

ở đó

$$\mathscr{D}_k^j := \frac{\nu(B_k)^{\frac{\alpha^*}{mn}} \omega(B_k)^{\frac{1}{mq^*}}}{\omega(B_{k+j-1})^{\frac{1}{q_i}} \nu(B_{k+j})^{\frac{\alpha_i}{n}}}.$$

Từ Mệnh đề 1.3 và $\ell \le j$, $\alpha_i < 0$ dẫn đến

$$\left(\frac{\nu(B_{k+j})}{\nu(B_{k+\ell})}\right)^{\frac{\alpha_i}{n}} \lesssim \left(\frac{|B_{k+j}|}{|B_{k+\ell}|}\right)^{\frac{\alpha_i}{n}\frac{\delta_2-1}{\delta_2}} = 2^{(j-\ell)\alpha_i\frac{\delta_2-1}{\delta_2}}. \tag{3.18}$$

Nhận xét rằng

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_k^j &= \frac{\nu(B_k)^{\frac{\alpha^*}{mn}}\omega(B_k)^{\frac{1}{mq^*}}}{\omega(B_{k+j-1})^{\frac{1}{q_i}}\nu(B_{k+j})^{\frac{\alpha_i}{n}}} = \left(\frac{\omega(B_{k+j})}{\omega(B_{k+j-1})}\right)^{\frac{1}{q_i}} \frac{\nu(B_k)^{\frac{\alpha^*}{mn}}\omega(B_k)^{\frac{1}{mq^*}}}{\omega(B_{k+j})^{\frac{1}{q_i}}\nu(B_{k+j})^{\frac{\alpha_i}{n}}} \\
&\lesssim \left(\frac{|B_{k+j}|}{|B_{k+j-1}|}\right)^{\frac{\xi}{q_i}} \frac{\nu(B_k)^{\frac{\alpha^*}{mn}}\omega(B_k)^{\frac{1}{mq^*}}}{\omega(B_{k+j})^{\frac{1}{q_i}}\nu(B_{k+j})^{\frac{\alpha_i}{n}}} \lesssim \frac{\nu(B_k)^{\frac{\alpha^*}{mn}}\omega(B_k)^{\frac{1}{mq^*}}}{\omega(B_{k+j})^{\frac{1}{q_i}}\nu(B_{k+j})^{\frac{\alpha_i}{n}}} \\
&= \frac{\omega(B_k)^{\frac{1}{mq^*}+\frac{\alpha^*}{mn}}}{\omega(B_{k+j})^{\frac{1}{q_i}+\frac{\alpha_i}{n}}} \frac{\omega(B_{k+j})^{\frac{\alpha_i}{n}}}{\omega(B_k)^{\frac{\alpha^*}{mn}}} \frac{\nu(B_k)^{\frac{\alpha^*}{mn}}}{\nu(B_{k+j})^{\frac{\alpha_i}{n}}} \\
&= \left(\frac{\omega(B_k)}{\omega(B_{k+j})}\right)^{\frac{1}{mq^*}+\frac{\alpha^*}{mn}} \left(\frac{\omega(B_{k+j})}{\nu(B_{k+j})}\right)^{\frac{\alpha_i}{n}} \left(\frac{\nu(B_k)}{\omega(B_k)}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}}.
\end{aligned}$$

Từ điều kiện $\frac{\alpha^*}{mn} + \frac{1}{mq^*} = \frac{\alpha_i}{n} + \frac{1}{q_i}$ và $q > mq^*$ có được $\frac{1}{mq^*} > \frac{1}{q} > \frac{1}{q_i}$ và $\frac{\alpha^*}{mn} < \frac{\alpha_i}{n}$, với mọi $i = 1, \dots, m$. Mặt khác, $\omega(B_k) \lesssim \nu(B_k)$, với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$$\left(\frac{\omega(B_{k+j})}{\nu(B_{k+j})}\right)^{\frac{\alpha_i}{n}} \lesssim \left(\frac{\omega(B_{k+j})}{\nu(B_{k+j})}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}}.$$

Suy ra

$$\mathscr{D}_k^j \lesssim \left(\frac{\omega(B_k)}{\omega(B_{k+j})}\right)^{\frac{1}{mq^*}+\frac{\alpha^*}{mn}} \left(\frac{\omega(B_{k+j})}{\omega(B_k)}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}} \left(\frac{\nu(B_k)}{\nu(B_{k+j})}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}}.$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $\frac{\alpha^*}{n} + \frac{1}{q^*} \le 0$. Với $j \ge 1$, ta có

$$\left(\frac{\omega(B_k)}{\omega(B_{k+j})}\right)^{\frac{1}{mq^*}+\frac{\alpha^*}{mn}} \lesssim \left(\frac{|B_k|}{|B_{k+j}|}\right)^{\left(\frac{1}{mq^*}+\frac{\alpha^*}{mn}\right)\xi} = 2^{-j\xi n\left(\frac{1}{mq^*}+\frac{\alpha^*}{mn}\right)}$$

$$\left(\frac{\omega(B_{k+j})}{\omega(B_k)}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}} \lesssim \left(\frac{|B_{k+j}|}{|B_k|}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}\frac{\delta_1-1}{\delta_1}} = 2^{jn\frac{\alpha^*}{mn}\frac{\delta_1-1}{\delta_1}} = 2^{j\frac{\alpha^*}{m}\frac{\delta_1-1}{\delta_1}}$$

$$\left(\frac{\nu(B_k)}{\nu(B_{k+j})}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}} \gtrsim \left(\frac{|B_k|}{|B_{k+j}|}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}\eta} = 2^{-j\eta n\frac{\alpha^*}{mn}} = 2^{-j\eta\frac{\alpha^*}{m}}.$$

Với $j \leq 0$, ta có

$$\left(\frac{\omega(B_k)}{\omega(B_{k+j})}\right)^{\frac{1}{mq^*}+\frac{\alpha^*}{mn}} \lesssim \left(\frac{|B_k|}{|B_{k+j}|}\right)^{\left(\frac{1}{mq^*}+\frac{\alpha^*}{mn}\right)\frac{\delta_1-1}{\delta_1}} = 2^{-jn\left(\frac{1}{mq^*}+\frac{\alpha^*}{mn}\right)\frac{\delta_1-1}{\delta_1}}$$

$$\left(\frac{\omega(B_{k+j})}{\omega(B_k)}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}} \lesssim \left(\frac{|B_{k+j}|}{|B_k|}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}\xi} = 2^{j\xi\frac{\alpha^*}{m}}$$

$$\left(\frac{\nu(B_k)}{\nu(B_{k+j})}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}} \lesssim \left(\frac{|B_k|}{|B_{k+j}|}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}\frac{\delta_2-1}{\delta_2}} = 2^{-j\frac{\alpha^*}{m}\frac{\delta_2-1}{\delta_2}}.$$

Khi đó,

$$\mathscr{D}_k^j \lesssim \begin{cases} 2^{\frac{1}{m}\left(-\frac{jn}{q^*}\frac{\delta_1-1}{\delta_1}-j\alpha^*\frac{\delta_1-1}{\delta_1}-j\alpha^*\frac{\delta_2-1}{\delta_2}+j\xi\alpha^*\right)}, & j \leq 0 \\ 2^{\frac{1}{m}\left(-j\xi\alpha^*-j\eta\alpha^*-\frac{j\xi n}{q^*}+j\alpha^*\frac{\delta_1-1}{\delta_1}\right)}, & j \geq 1. \end{cases}$$

Trường hợp 2: $\frac{\alpha^*}{n} + \frac{1}{q^*} > 0$. Với $j \geq 1$, ta có

$$\left(\frac{\omega(B_k)}{\omega(B_{k+j})}\right)^{\frac{1}{mq^*}+\frac{\alpha^*}{mn}} \gtrsim \left(\frac{|B_k|}{|B_{k+j}|}\right)^{\left(\frac{1}{mq^*}+\frac{\alpha^*}{mn}\right)\frac{\delta_1-1}{\delta_1}} = 2^{-jn\left(\frac{1}{mq^*}+\frac{\alpha^*}{mn}\right)\frac{\delta_1-1}{\delta_1}}$$

$$\left(\frac{\omega(B_{k+j})}{\omega(B_k)}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}} \lesssim \left(\frac{|B_{k+j}|}{|B_k|}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}\frac{\delta_1-1}{\delta_1}} = 2^{j\frac{\alpha^*}{m}\frac{\delta_1-1}{\delta_1}}$$

$$\left(\frac{\nu(B_k)}{\nu(B_{k+j})}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}} \lesssim \left(\frac{|B_k|}{|B_{k+j}|}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}\eta} = 2^{-j\eta\frac{\alpha^*}{m}}.$$

Với $j \leq 0$, ta có

$$\left(\frac{\omega(B_k)}{\omega(B_{k+j})}\right)^{\frac{1}{mq^*}+\frac{\alpha^*}{mn}} \lesssim \left(\frac{|B_k|}{|B_{k+j}|}\right)^{\left(\frac{1}{mq^*}+\frac{\alpha^*}{mn}\right)\xi} = 2^{-j\xi n\left(\frac{1}{mq^*}+\frac{\alpha^*}{mn}\right)}$$

$$\left(\frac{\omega(B_{k+j})}{\omega(B_k)}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}} \lesssim \left(\frac{|B_{k+j}|}{|B_k|}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}\xi} = 2^{j\xi\frac{\alpha^*}{m}}$$

$$\left(\frac{\nu(B_k)}{\nu(B_{k+j})}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}} \lesssim \left(\frac{|B_k|}{|B_{k+j}|}\right)^{\frac{\alpha^*}{mn}\frac{\delta_2-1}{\delta_2}} = 2^{-j\frac{\alpha^*}{m}\frac{\delta_2-1}{\delta_2}}.$$

Khi đó,

$$\mathscr{D}_k^j \lesssim \begin{cases} 2^{\frac{1}{m}\left(-\frac{j\xi n}{q^*}-j\alpha^*\frac{\delta_2-1}{\delta_2}\right)}, & j\le 0\\ 2^{\frac{1}{m}\left(-\frac{jn}{q^*}\frac{\delta_1-1}{\delta_1}-j\eta\alpha^*\right)}, & j\ge 1.\end{cases}$$

Tiếp theo, ta ước lượng $\mathscr{E}_{1i}$ cho Trường hợp 1. Ta có

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_{1i} &\lesssim \int_{\{y:\|A_i(y)\|<1\}} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}}\|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}}\times\\
&\times\left(\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}\nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda_i}{n}}\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(2^{\frac{1}{m}\left(-\frac{jn}{q^*}\frac{\delta_1-1}{\delta_1}-j\alpha^*\frac{\delta_1-1}{\delta_1}-j\alpha^*\frac{\delta_2-1}{\delta_2}+j\xi\alpha^*\right)}\times\right.\right.\\
&\left.\left.\times\sum_{\ell=-\infty}^{j}2^{(j-\ell)\alpha_i\frac{\delta_2-1}{\delta_2}}\nu(B_{k+\ell})^{\frac{\alpha_i}{n}}\|f_i\|_{L^{q_i}_\omega(C_{k+\ell})}\right)^{p_i}\right)^{\frac{m}{p_i}}dy\\
&+\int_{\{y:\|A_i(y)\|\ge 1\}} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}}\|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}}\times\\
&\times\left(\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}\nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda_i}{n}}\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(2^{\frac{1}{m}\left(-j\xi\alpha^*-j\eta\alpha^*-\frac{j\xi n}{q^*}+j\alpha^*\frac{\delta_1-1}{\delta_1}\right)}\times\right.\right.\\
&\left.\left.\times\sum_{\ell=-\infty}^{j}2^{(j-\ell)\alpha_i\frac{\delta_2-1}{\delta_2}}\nu(B_{k+\ell})^{\frac{\alpha_i}{n}}\|f_i\|_{L^{q_i}_\omega(C_{k+\ell})}\right)^{p_i}\right)^{\frac{m}{p_i}}dy\\
&\lesssim \int_{\{y:\|A_i(y)\|<1\}} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}}\|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}}\|A_i(y)\|^{-\left(\left(\frac{n}{q^*}+\alpha^*\right)\frac{\delta_1-1}{\delta_1}+\alpha^*\frac{\delta_2-1}{\delta_2}-\xi\alpha^*\right)}\times\\
&\times\left(\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}\nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda_i}{n}}\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{\ell=-\infty}^{j}2^{(j-\ell)\alpha_i\frac{\delta_2-1}{\delta_2}}\nu(B_{k+\ell})^{\frac{\alpha_i}{n}}\|f_i\|_{L^{q_i}_\omega(C_{k+\ell})}\right)^{p_i}\right)^{\frac{m}{p_i}}dy+\\
&+\int_{\{y:\|A_i(y)\|\ge 1\}} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}}\|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}}\|A_i(y)\|^{-\left(\left(\frac{n}{q^*}+\alpha^*\right)\xi+\eta\alpha^*-\alpha^*\frac{\delta_1-1}{\delta_1}\right)}\times\\
&\times\left(\sup_{k_0\in\mathbb{Z}}\nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda_i}{n}}\sum_{k=-\infty}^{k_0}\left(\sum_{\ell=-\infty}^{j}2^{(j-\ell)\alpha_i\frac{\delta_2-1}{\delta_2}}\nu(B_{k+\ell})^{\frac{\alpha_i}{n}}\|f_i\|_{L^{q_i}_\omega(C_{k+\ell})}\right)^{p_i}\right)^{\frac{m}{p_i}}dy.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng, $\|A_i(y)\|^{-1}\simeq 2^{-j}$ và $\sum\limits_{\ell=-\infty}^{j}2^{(j-\ell)\alpha_i\frac{\delta_2-1}{\delta_2}}=\frac{1}{1-2^{\alpha_i\frac{\delta_2-1}{\delta_2}}}$, với mọi

$\alpha_i < 0$ và

$$\nu(B_{k_0})^{-\frac{\lambda_i}{n}} = \left(\frac{\nu(B_{k_0+\ell})}{\nu(B_{k_0})}\right)^{\frac{\lambda_i}{n}} \nu(B_{k_0+\ell})^{-\frac{\lambda_i}{n}} \leq \left(\frac{\nu(B_{k_0+j})}{\nu(B_{k_0})}\right)^{\frac{\lambda_i}{n}} \nu(B_{k_0+\ell})^{-\frac{\lambda_i}{n}},$$

với mọi $\ell \leq j$. Suy ra

$$\left(\frac{\nu(B_{k_0+j})}{\nu(B_{k_0})}\right)^{\frac{\lambda_i}{n}} \lesssim \begin{cases} 2^{j\lambda_i\frac{\delta_2-1}{\delta_2}}, & j \leq 0 \\ 2^{j\eta\lambda_i}, & j \geq 1. \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski với $p_i \geq 1$ ta được

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_{1i} &\lesssim \int_{\{y:\|A_i(y)\|<1\}} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}} \|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}} \|A_i(y)\|^{-\left(\left(\frac{n}{q^*}+\alpha^*\right)\frac{\delta_1-1}{\delta_1}+(\alpha^*-m\lambda_i)\frac{\delta_2-1}{\delta_2}-\xi\alpha^*\right)} \times \\
&\times \left(\sup_{k_0\in\mathbb{Z}} \sum_{\ell=-\infty}^{j} 2^{(j-\ell)\alpha_i\frac{\delta_2-1}{\delta_2}} \left(\nu(B_{k_0+\ell})^{-\frac{\lambda_i}{n}} \sum_{k=-\infty}^{k_0} \nu(B_{k+\ell})^{\frac{\alpha_i p_i}{n}} \|f_i\|^{p_i}_{L^{q_i}_\omega(C_{k+\ell})}\right)^{\frac{1}{p_i}}\right)^m dy + \\
&+ \int_{\{y:\|A_i(y)\|\geq 1\}} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}} \|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}} \|A_i(y)\|^{-\left(\xi(\frac{n}{q^*}+\alpha^*)+\eta(\alpha^*-m\lambda_i)-\alpha^*\frac{\delta_1-1}{\delta_1}\right)} \times \\
&\times \left(\sup_{k_0\in\mathbb{Z}} \sum_{\ell=-\infty}^{j} 2^{(j-\ell)\alpha_i\frac{\delta_2-1}{\delta_2}} \nu(B_{k_0+\ell})^{-\frac{\lambda_i}{n}} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} \nu(B_{k+\ell})^{\frac{\alpha_i p_i}{n}} \|f_i\|^{p_i}_{L^{q_i}_\omega(C_{k+\ell})}\right)^{\frac{1}{p_i}}\right)^m dy \\
&\lesssim \Bigg(\int_{\{y:\|A_i(y)\|<1\}} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}} \|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}} \|A_i(y)\|^{-\left(\left(\frac{n}{q^*}+\alpha^*\right)\frac{\delta_1-1}{\delta_1}+(\alpha^*-m\lambda_i)\frac{\delta_2-1}{\delta_2}-\xi\alpha^*\right)} dy \\
&+ \int_{\{y:\|A_i(y)\|\geq 1\}} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}} \|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}} \|A_i(y)\|^{-\left(\xi(\frac{n}{q^*}+\alpha^*)+\eta(\alpha^*-m\lambda_i)-\alpha^*\frac{\delta_1-1}{\delta_1}\right)} dy\Bigg) \times \\
&\times \|f_i\|^m_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Do vậy, ta đạt được

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{M\dot{K}^{\alpha^*,\lambda^*,p,q^*}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}} \|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}} \mathscr{B}_{1i}(y) dy\right)^{\frac{1}{m}} \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \\
&\lesssim \mathscr{C}_{11.1} \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Tương tự Trường hợp 1, ta có ước lượng cho Trường hợp 2 với điều kiện $\frac{\alpha^*}{n} + \frac{1}{q^*} > 0$

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\vec{f}\|_{M\dot{K}^{\alpha^*,\lambda^*,p,q^*}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim \prod_{i=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}}\|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}}\mathscr{B}_{2i}(y)dy\right)^{\frac{1}{m}}\prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim \mathscr{C}_{11.2}\prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_{M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)}.$$

Định lí được chứng minh. □

Đặc biệt, khi $\nu = \omega$ thì toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ bị chặn trên không gian Morrey–Herz có trọng Muckenhoupt. Phần chứng minh tương tự như Định lí 3.5.

Định lí 3.6. *Cho $1 \le q^*, \xi < \infty, \alpha_i < 0,\ \lambda_i \ge 0$, với mọi $i = 1,\dots,m$ và $\omega \in A_\xi$ với chỉ số tới hạn r_ω cho điều kiện Hölder ngược. Giả sử $q > q^*\xi r'_\omega, \delta \in (1, r_\omega)$ và α^*, λ^* là các số thực thỏa mãn*

$$\lambda^* = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \text{ và } \frac{\alpha^*}{n} + \frac{1}{q^*} = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i}{n} + \frac{1}{q}.$$

Nếu $\frac{\alpha_i}{n} + \frac{1}{q_i} \le 0$, với mọi $i = 1,\dots,m$ và

$$\mathscr{C}_{12.1} = \prod_{i=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}}\|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}}\Psi_{1i}(y)dy\right)^{\frac{1}{m}} < \infty,$$

ở đó

$$\Psi_{1i}(y) = \|A_i(y)\|^{m\left(\lambda_i - n\left(\frac{\alpha_i}{n}+\frac{1}{q_i}\right)\left(\frac{\delta-1}{\delta}\right)\right)}\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|<1\}} + \\ + \|A_i(y)\|^{m\xi\left(\lambda_i - n\left(\frac{\alpha_i}{n}+\frac{1}{q_i}\right)\right)}\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|\ge 1\}},$$

hoặc $\frac{\alpha_i}{n} + \frac{1}{q_i} > 0$, với mọi $i = 1,\dots,m$ và

$$\mathscr{C}_{12.2} = \prod_{i=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}}\|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}}\Psi_{2i}(y)dy\right)^{\frac{1}{m}} < \infty,$$

ở đó

$$\Psi_{2i}(y) = \|A_i(y)\|^{m\left(\lambda_i\left(\frac{\delta-1}{\delta}\right) - n\xi\left(\frac{\alpha_i}{n}+\frac{1}{q_i}\right)\right)}\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|<1\}} + \\ + \|A_i(y)\|^{m\left(\lambda_i\xi - n\left(\frac{\alpha_i}{n}+\frac{1}{q_i}\right)\left(\frac{\delta-1}{\delta}\right)\right)}\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|\ge 1\}},$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ đến $M\dot{K}^{\alpha^*,\lambda^*,p,q^*}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Từ Định lí 3.5 và Định lí 3.6, khi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ chúng tôi đạt được điều kiện đủ cho tính bị chặn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên không gian Herz có trọng Muckenhoupt.

Kết luận Chương 3

Trong Chương 3, chúng tôi thu được các kết quả sau:

• Trình bày kết quả về ước lượng chuẩn cho toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian có hai trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Định lí 3.1), không gian Herz (Định lí 3.2), không gian Morrey-Herz (Định lí 3.3).

• Chọn $A_i(y) = \text{diag}[s_i(y), ..., s_i(y)]$, ở đó $s_1(y), ..., s_m(y) \neq 0$ hầu khắp trên $\mathbb{R}^n$ với mọi $i = 1, ..., m$ và $A_i(y)$ thỏa mãn điều kiện (1.3). Khi đó, chúng tôi đưa ra các Hệ quả về ước lượng chuẩn của toán tử $\mathscr{H}_{\phi,\vec{s}}$ trên các không gian có hai trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Hệ quả 3.1), không gian Herz (Hệ quả 3.2), không gian Morrey-Herz (Hệ quả 3.3). Hệ quả 3.2 là mở rộng của Định lí 3.2 trong [15] với hai trọng lũy thừa.

• Ước lượng chuẩn của toán tử Hardy-Cesàro đa tuyến tính $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ trên tích các không gian có hai trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey, không gian Herz.

• Đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên các không gian có hai trọng Muckenhoupt như: không gian tâm Morrey (Định lí 3.4), không gian Morrey-Herz (Định lí 3.5).

• Đặc biệt, khi $\nu = \omega$, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ từ Định lí 3.5 và Định lí 3.6 chúng tôi đạt được điều kiện đủ cho tính bị chặn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên không gian Herz có trọng Muckenhoupt.

Chương 4

TÍNH BỊ CHẶN CHO GIAO HOÁN TỬ CỦA TOÁN TỬ HAUSDORFF TRÊN NHÓM HEISENBERG

Trong chương này, chúng tôi đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathcal{H}^b_{\Phi,\Omega}$, giao hoán tử $\mathcal{H}^b_{\Phi,A}$ trên nhóm Heisenberg với biểu trưng thuộc không gian ℓ-tâm BMO, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng lũy thừa hoặc trọng Muckenhoupt.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo [3] trong danh mục công trình đã công bố.

4.1. Giới thiệu

Toán tử Hausdorff thường được nghiên cứu trên không gian Euclidean n-chiều (xem [4], [9], [12], [13], [30], [34], [54], [57], [58], [59], [78]). Một câu hỏi tự nhiên là các kĩ thuật nghiên cứu toán tử Hausdorff trên $\mathbb{R}^n$ có phù hợp với các không gian khác nhau không. Chẳng hạn, có nhiều công trình nghiên cứu về toán tử Hardy, toán tử trung bình Hardy-Littlewood, toán tử Hardy-Cesàro, toán tử Hausdorff trên trường p-adic (xem [10], [19], [26], [47], [74], [80]). Do vậy, việc mở rộng nghiên cứu lớp toán tử Hausdorff và giao hoán tử của nó trên nhóm Heisenberg là cần thiết.

Năm 2017, Ruan, Fan và Wu [72] đã giới thiệu toán tử Hausdorff trên nhóm Heisenberg $\mathbb{H}^n$ có dạng

$$\mathcal{H}_{\Phi,A}f(x) = \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q} f(A(y)x)dy,\ x \in \mathbb{H}^n, \tag{4.1}$$

ở đó, Φ là hàm khả tích trên $\mathbb{H}^n$. Ma trận $A(y)$ có $\det A(y) \neq 0$ hầu khắp trên giá của Φ. Hơn nữa, họ cũng giới thiệu và nghiên cứu giao hoán tử kiểu Coifman-Rochberg-Weiss của $\mathscr{H}_{\Phi,A}$ trên $\mathbb{H}^n$, với biểu trưng $b \in CMO_{\omega}^{p_2}(\mathbb{H}^n)$. Công thức của $\mathscr{H}_{\Phi,A}^b$ cho bởi

$$\mathscr{H}_{\Phi,A}^b f(x) = \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q}\Big(b(x) - b(A(y)x)\Big) f(A(y)x)dy,\ x \in \mathbb{H}^n. \quad (4.2)$$

Các tác giả đã chứng minh được $\mathscr{H}_{\Phi,A}^b$ bị chặn từ không gian $\dot{M}_{\omega}^{\lambda,p_1}(\mathbb{H}^n)$ đến không gian $\dot{M}_{\omega}^{\lambda,p}(\mathbb{H}^n), 1 \le p, p_1, p_2 < \infty$ với Φ là hàm khả tích địa phương trên $\mathbb{H}^n$ và trọng ω là trọng Muckenhoup hoặc trọng lũy thừa.

Gần đây, N. M. Chương, D. V. Dương và K. H. Dũng [27] cũng giới thiệu và nghiên cứu toán tử Hausdorff thô trên nhóm Heisenberg. Cho $\Phi : \mathbb{H}^n \to [0,\infty)$ là hàm bán kính đo được và $\Omega : S_{Q-1} \to \mathbb{C}$ là hàm đo được sao cho $\Omega(y) \neq 0$ với hầu khắp y trên S_{Q-1}. Toán tử Hausdorff thô trên $\mathbb{H}^n$ có dạng

$$\mathscr{H}_{\Phi,\Omega} f(x) = \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\Phi(\delta_{|y|_h^{-1}} x)}{|y|_h^Q} \Omega(\delta_{|y|_h^{-1}} y) f(y)dy, \qquad x \in \mathbb{H}^n. \quad (4.3)$$

Sử dụng phép đổi biến trong hệ tọa độ cực và trên nhóm Heisenberg ta được

$$\mathscr{H}_{\Phi,\Omega} f(x) = \int_0^\infty \int_{S_{Q-1}} \frac{\Phi(t)}{t} \Omega(y') f(\delta_{t^{-1}|x|_h} y')dy'dt,\ \ x \in \mathbb{H}^n. \quad (4.4)$$

Nhận thấy, khi chọn $\Phi(t) = t^{-Q}\chi_{(1,\infty)}(t)$ và $\Omega \equiv 1$, toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trở thành toán tử Hardy trên nhóm Heisenberg. Tương tự, nếu $\Phi(t) = \chi_{(0,1)}(t)$ và $\Omega \equiv 1$, thì $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trở thành toán tử Hardy liên hợp (xem [83]).

Trong [27], các tác giả giới thiệu giao hoán tử của toán tử Hausdorff thô kiểu Coifman-Rochberg-Weiss trên nhóm Heisenberg có dạng

$$\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^b f(x) = \int_0^\infty \int_{S_{Q-1}} \frac{\Phi(t)}{t} \Omega(y')(b(x) - b(\delta_{t^{-1}|x|_h} y')) f(\delta_{t^{-1}|x|_h} y')dy'dt. \quad (4.5)$$

Ứng dụng của lý thuyết về giao hoán tử có đóng góp quan trọng trong nghiên cứu tính chính quy nghiệm của phương trình đạo hàm riêng (xem [8], [28], [77]).

4.2. Giao hoán tử $\mathcal{H}^b_{\Phi,\Omega}$ và lớp trọng lũy thừa

Trong mục này, chúng tôi trình bày các kết quả về điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathcal{H}^b_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian có trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Định lí 4.1), không gian Morrey-Herz (Định lí 4.2).

Trước khi đưa ra kết quả chính, chúng tôi giới thiệu bổ đề về tính bị chặn của $\mathcal{H}^b_{\Phi,\Omega}$ trên không gian Lebesgue có trọng trên các hình cầu. Bổ đề được dùng trong chứng minh của Định lí 4.1 và Định lí 4.2.

Bổ đề 4.1. *Cho $1 \le q < \infty$, $1 < q_1, r_1 < \infty$ và $\omega(x) = |x|_h^\gamma$, $\gamma > -Q$. Giả sử $\Omega \in L^{q'}(S_{Q-1})$, $b \in C\dot{M}O^{\ell,r_1}_\omega(\mathbb{H}^n), \ell < \frac{1}{Q}$. Nếu $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1}$ thì với mọi $R > 0$ ta có*

$$\|\mathcal{H}^b_{\Phi,\Omega} f\|_{L^q_\omega(B(0,R))} \lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{Q-1})}\|b\|_{C\dot{M}O^{\ell,r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)} R^{(Q+\gamma)(\frac{1}{r_1}+\ell)} \times$$
$$\times \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{Q+\gamma}{q_1}}}(1+\Psi(t)+t^{-(Q+\gamma)\ell})\|f\|_{L^{q_1}_\omega(B(0,t^{-1}R))}dt,$$

ở đó $\Psi(t) = t^{-(Q+\gamma)(1+\ell)}\chi_{(0,1]}(t) + t^{(Q+\gamma)}\chi_{(1,\infty)}(t)$.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski và bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\|\mathcal{H}^b_{\Phi,\Omega} f\|_{L^q_\omega(B(0,R))}$$
$$\le \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t}\int_{S_{Q-1}}|\Omega(y')|\left(\int_{B(0,R)}|b(x)-b(\delta_{t^{-1}|x|_h}y')|^q.|f(\delta_{t^{-1}|x|_h}y')|^q\omega(x)dx\right)^{1/q}dy'dt$$
$$\le \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t}\int_{S_{Q-1}}|\Omega(y')|.\|b(\cdot)-b(\delta_{t^{-1}|\cdot|_h}y')\|_{L^{r_1}_\omega(B(0,R))}.\|f(\delta_{t^{-1}|\cdot|_h}y')\|_{L^{q_1}_\omega(B(0,R))}dy'dt.$$

Từ đó, áp dụng bất đẳng thức Hölder, dẫn đến

$$\|\mathcal{H}^b_{\Phi,\Omega} f\|_{L^q_\omega(B(0,R))} \le \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{Q-1})}\int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t}\left(\int_{S_{Q-1}}\|b(\cdot)-b(\delta_{t^{-1}|\cdot|_h}y')\|^{r_1}_{L^{r_1}_\omega(B(0,R))}dy'\right)^{\frac{1}{r_1}} \times$$
$$\times\left(\int_{S_{Q-1}}\|f(\delta_{t^{-1}|\cdot|_h}y')\|^{q_1}_{L^{q_1}_\omega(B(0,R))}dy'\right)^{\frac{1}{q_1}}dt. \tag{4.6}$$

Ta cần chỉ ra rằng

$$\left(\int_{S_{Q-1}} \|b(\cdot) - b(\delta_{t^{-1}|\cdot|_h} y')\|^{r_1}_{L^{r_1}_\omega(B(0,R))} dy'\right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\lesssim \left(1 + \Psi(t) + t^{-(Q+\gamma)\ell}\right) R^{(Q+\gamma)(\frac{1}{r_1}+\ell)} \|b\|_{C\dot{M}O^{\ell,r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}. \quad (4.7)$$

Thật vậy,

$$\left(\int_{S_{Q-1}} \|b(\cdot) - b(\delta_{t^{-1}|\cdot|_h} y')\|^{r_1}_{L^{r_1}_\omega(B(0,R))} dy'\right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\leq \left(\int_{S_{Q-1}} \|b(\cdot) - b_{\omega,B(0,R)}\|^{r_1}_{L^{r_1}_\omega(B(0,R))} dy'\right)^{\frac{1}{r_1}} + \left(\int_{S_{Q-1}} \|b_{\omega,B(0,R)} - b_{\omega,B(0,t^{-1}R)}\|^{r_1}_{L^{r_1}_\omega(B(0,R))} dy'\right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$+ \left(\int_{S_{Q-1}} \|b_{\omega,B(0,t^{-1}R)} - b(\delta_{t^{-1}|\cdot|_h} y')\|^{r_1}_{L^{r_1}_\omega(B(0,R))} dy'\right)^{\frac{1}{r_1}} := I_1 + I_2 + I_3. \quad (4.8)$$

Từ định nghĩa không gian $C\dot{M}O^{\ell,r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)$ ta có

$$I_1 = \left(\omega(B(0,R))^{1+\ell r_1} \int_{S_{Q-1}} \frac{1}{\omega(B(0,R))^{1+\ell r_1}} \|b(\cdot) - b_{\omega,B(0,R)}\|^{r_1}_{L^{r_1}_\omega(B(0,R))} dy'\right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\leq \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}+\ell} \|b\|_{C\dot{M}O^{\ell,r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}. \quad (4.9)$$

Tiếp theo, ta có

$$I_2 \lesssim \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}}.|b_{\omega,B(0,R)} - b_{\omega,B(0,t^{-1}R)}|. \quad (4.10)$$

Với $t \leq 1$, áp dụng bất đẳng thức Hölder ta được

$$|b_{\omega,B(0,R)} - b_{\omega,B(0,t^{-1}R)}| \quad (4.11)$$
$$\leq \frac{1}{\omega(B(0,R))} \int_{B(0,t^{-1}R)} |b(x) - b_{\omega,B(0,t^{-1}R)}| \omega(x) dx$$
$$\leq \frac{\omega(B(0,t^{-1}R))^{\frac{1}{r_1'}}}{\omega(B(0,R))} \left(\int_{B(0,t^{-1}R)} |b(x) - b_{\omega,B(0,t^{-1}R)}|^{r_1} \omega(x) dx\right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\leq \frac{\omega(B(0,t^{-1}R))^{1+\ell}}{\omega(B(0,R))} \left(\frac{1}{\omega(B(0,t^{-1}R))^{1+\ell r_1}} \int_{B(0,t^{-1}R)} |b(x) - b_{\omega,B(0,t^{-1}R)}|^{r_1} \omega(x) dx\right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\leq \frac{\omega(B(0,t^{-1}R))^{1+\ell}}{\omega(B(0,R))} \|b\|_{C\dot{M}O^{\ell,r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}. \quad (4.12)$$

Trong trường hợp $t > 1$, lập luận tương tự như trên ta nhận được

$$|b_{\omega,B(0,R)} - b_{\omega,B(0,t^{-1}R)}| \lesssim \frac{\omega(B(0,R))^{1+\ell}}{\omega(B(0,t^{-1}R))}\|b\|_{C\dot{M}O_{\omega}^{\ell,r_1}(\mathbb{H}^n)}.$$

Từ đó, do (4.10) và (4.11) ta có

$$I_2 \lesssim \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}+\ell}\left(\frac{\omega(B(0,t^{-1}R))^{1+\ell}}{\omega(B(0,R))^{1+\ell}}\chi_{(0,1]}(t) + \frac{\omega(B(0,R))}{\omega(B(0,t^{-1}R))}\chi_{(1,\infty)}(t)\right).\|b\|_{C\dot{M}O_{\omega}^{\ell,r_1}(\mathbb{H}^n)}. \tag{4.13}$$

Mặt khác, từ $\gamma > -Q$ nên

$$\omega(B(0,R)) = \int_{B(0,R)} |x|_h^{\gamma} dx = \int_0^R \int_{S_{Q-1}} |\delta_{ry'}|_h^{\gamma} r^{Q-1} dy' dr = \int_0^R \int_{S_{Q-1}} r^{Q-1+\gamma} dy' dr \simeq R^{Q+\gamma},$$

và

$$\omega(B(0,t^{-1}R)) \simeq (t^{-1}R)^{Q+\gamma}. \tag{4.14}$$

Điều này suy ra

$$\begin{aligned} I_2 &\lesssim R^{(Q+\gamma)(\frac{1}{r_1}+\ell)}\left(\frac{(t^{-1}R)^{(Q+\gamma)(1+\ell)}}{R^{(Q+\gamma)(1+\ell)}}\chi_{(0,1]}(t) + \frac{R^{Q+\gamma}}{(t^{-1}R)^{Q+\gamma}}\chi_{(1,\infty)}(t)\right)\|b\|_{C\dot{M}O_{\omega}^{r_1}(\mathbb{H}^n)} \\ &\lesssim R^{(Q+\gamma)(\frac{1}{r_1}+\ell)}.\Psi(t).\|b\|_{C\dot{M}O_{\omega}^{\ell,r_1}(\mathbb{H}^n)}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Tiếp theo, ta ước lượng cho I_3.

$$\begin{aligned} I_3 &= \left(\int_{S_{Q-1}}\int_{B(0,R)} |b_{\omega,B(0,t^{-1}R)} - b(\delta_{t^{-1}|x|_h}y')|^{r_1}\omega(x)dxdy'\right)^{\frac{1}{r_1}} \\ &= \left(\int_{S_{Q-1}}\int_0^R\int_{S_{Q-1}} |b_{\omega,B(0,t^{-1}R)} - b(\delta_{t^{-1}r}y')|^{r_1} r^{Q+\gamma-1}du'drdy'\right)^{\frac{1}{r_1}} \\ &\lesssim \left(t^{Q+\gamma}\int_0^{t^{-1}R}\int_{S_{Q-1}} |b_{\omega,B(0,t^{-1}R)} - b(\delta_z y')|^{r_1} z^{Q+\gamma-1}dy'dz\right)^{\frac{1}{r_1}} \\ &= t^{\frac{Q+\gamma}{r_1}}\left(\int_{B(0,t^{-1}R)} |b(x) - b_{\omega,B(0,t^{-1}R)}|^{r_1}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{r_1}}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Do vậy

$$I_3 \lesssim t^{\frac{Q+\gamma}{r_1}}\omega(B(0,t^{-1}R))^{\frac{1}{r_1}+\ell}\left(\frac{1}{\omega(B(0,t^{-1}R))^{1+\ell r_1}}\int_{B(0,t^{-1}R)} |b(x) - b_{\omega,B(0,t^{-1}R)}|^{r_1}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{r_1}}$$

$$\lesssim t^{\frac{Q+\gamma}{r_1}}\omega(B(0,t^{-1}R))^{\frac{1}{r_1}+\ell}\|b\|_{C\dot{M}O_{\omega}^{\ell,r_1}(\mathbb{H}^n)} \lesssim R^{(Q+\gamma)(\frac{1}{r_1}+\ell)}.t^{-(Q+\gamma)\ell}\|b\|_{C\dot{M}O_{\omega}^{\ell,r_1}(\mathbb{H}^n)}.$$

Từ đây, bởi (4.9) và (4.13), bất đẳng thức (4.7) được chứng minh. Với ước lượng (4.16) ở trên, ta đạt được

$$\left(\int_{S_{Q-1}}\|f(\delta_{t^{-1}|x|_h}y')\|^{q_1}_{L^{q_1}_{\omega}(B(0,R))}dy'\right)^{\frac{1}{q_1}} \lesssim t^{\frac{Q+\gamma}{q_1}}\|f\|_{L^{q_1}_{\omega}(B(0,t^{-1}R))}.$$

Do đó, từ (4.6) và (4.7), bổ đề được chứng minh. □

Định lí 4.1. *Cho $1 \leq q < \infty$, $1 < q_1, r_1 < \infty$ và $\omega(x) = |x|_h^{\gamma}$, $\gamma > -Q$. Giả sử $\Omega \in L^{q'}(S_{Q-1})$, $b \in C\dot{M}O_{\omega}^{\ell,r_1}(\mathbb{H}^n), \ell < \frac{1}{Q}$ và $\lambda \in (-\frac{1}{q}, 0)$, $\lambda_1 \in (-\frac{1}{q_1}, 0)$, $\lambda_1 = \lambda - \ell$. Nếu $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1}$ và*

$$\mathscr{C}_{13} = \int_0^{\infty}\frac{\Phi(t)}{t^{1+(Q+\gamma)\lambda_1}}\left(1 + \Psi(t) + t^{-(Q+\gamma)\ell}\right)dt < \infty,$$

thì $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ bị chặn từ $\dot{M}^{\lambda_1,q_1}_{\omega}(\mathbb{H}^n)$ đến $\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{H}^n)$.

Chứng minh. Với bất kì $R > 0$, áp dụng Bổ đề 4.1 ta có

$$\frac{1}{\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q}+\lambda}}\|\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}f\|_{L^q_{\omega}(B(0,R))}$$
$$\lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{Q-1})}\|b\|_{CMO_{\omega}^{\ell,r_1}(\mathbb{H}^n)}\int_0^{\infty}\frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{Q+\gamma}{q_1}}}\left(1+\Psi(t)+t^{-(Q+\gamma)\ell}\right)\times$$
$$\times\frac{R^{(Q+\gamma)(\frac{1}{r_1}+\ell)}\omega(B(0,t^{-1}R))^{\frac{1}{q_1}+\lambda_1}}{\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q}+\lambda}}\frac{1}{\omega(B(0,t^{-1}R))^{\frac{1}{q_1}+\lambda_1}}\|f\|_{L^{q_1}_{\omega}(B(0,t^{-1}R))}dt.$$

Từ (4.14) và giả thiết cho λ_1 suy ra

$$\frac{R^{(Q+\gamma)(\frac{1}{r_1}+\ell)}\omega(B(0,t^{-1}R))^{\frac{1}{q_1}+\lambda_1}}{\omega(B_R)^{\frac{1}{q}+\lambda}} \simeq \frac{R^{(Q+\gamma)(\frac{1}{r_1}+\ell)}(t^{-1}R)^{(Q+\gamma)(\frac{1}{q_1}+\lambda_1)}}{R^{(Q+\gamma)(\frac{1}{q}+\lambda)}} = t^{-(Q+\gamma)(\frac{1}{q_1}+\lambda_1)}.$$

Do vậy

$$\|\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{H}^n)} \lesssim \mathscr{C}_{13}.\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{Q-1})}\|b\|_{CMO_{\omega}^{\ell,r_1}(\mathbb{H}^n)}\|f\|_{\dot{M}^{\lambda_1,q_1}_{\omega}(\mathbb{H}^n)}.$$

Định lí được chứng minh. □

Định lí 4.2. *Cho $1 \le p, q < \infty$, $1 < q_1, r_1 < \infty$ và $\omega(x) = |x|_h^{\gamma}$, $\gamma > -Q$. Giả sử $\Omega \in L^{q'}(S_{Q-1})$, $b \in C\dot{M}O_{\omega}^{\ell, r_1}(\mathbb{H}^n)$, $\ell < \frac{1}{Q}$, $\lambda \ge 0$ và $\alpha_1 = \alpha + (Q + \gamma)(\frac{1}{r_1} + \ell)$. Nếu $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1}$ và*

$$\mathscr{C}_{15} = \int_0^{\infty} \frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{Q+\gamma}{q_1}+\lambda-\alpha_1}} \left(1 + \Psi(t) + t^{-(Q+\gamma)\ell}\right) dt < \infty,$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^b$ bị chặn từ $M\dot{K}_{\omega}^{\alpha_1,\lambda,p,q_1}(\mathbb{H}^n)$ đến $M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{H}^n)$.

Chứng minh. Với mỗi $t > 0$, ta có số nguyên $\kappa := \kappa(t)$ sao cho $2^{\kappa-1} < t^{-1} \le 2^{\kappa}$. Đặt $\delta_{t^{-1}C_k} = \{z \in \mathbb{H}^n : \frac{2^{k-1}}{t} < |z|_h \le \frac{2^k}{t}\}$, dẫn đến

$$\delta_{t^{-1}C_k} \subset \{z \in \mathbb{H}^n : 2^{k+\kappa-2} < |z|_h \le 2^{k+\kappa}\}.$$

Từ đó, với mọi $k \in \mathbb{Z}$, sử dụng Bổ đề 4.1 ta được

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^b f\chi_k\|_{L_{\omega}^q(\mathbb{H}^n)} \\
&\lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{Q-1})}\|b\|_{CMO_{\omega}^{\ell,r_1}(\mathbb{H}^n)} 2^{k(Q+\gamma)(\frac{1}{r_1}+\ell)} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{Q+\gamma}{q_1}}} \left(1+\Psi(t)+t^{-(Q+\gamma)\ell}\right) \|f\chi_{\delta_{t^{-1}C_k}}\|_{L_{\omega}^{q_1}(\mathbb{H}^n)} dt \\
&\lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{Q-1})}\|b\|_{CMO_{\omega}^{\ell,r_1}(\mathbb{H}^n)} 2^{k(Q+\gamma)(\frac{1}{r_1}+\ell)} \times \\
&\times \int_0^{\infty} \frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{Q+\gamma}{q_1}}} \left(1+\Psi(t)+t^{-(Q+\gamma)\ell}\right).\left(\|f\chi_{k+\kappa-1}\|_{L_{\omega}^{q_1}(\mathbb{H}^n)} + \|f\chi_{k+\kappa}\|_{L_{\omega}^{q_1}(\mathbb{H}^n)}\right) dt.
\end{aligned}$$

Từ $\alpha_1 = \alpha + (Q+\gamma)(\frac{1}{r_1} + \ell)$ và áp dụng bất đẳng thức Minkowski, suy ra

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^b f\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{H}^n)} = \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^b(f)\chi_k\|_{L_{\omega}^q(\mathbb{H}^n)}^p\Big)^{1/p} \\
&\le \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{Q-1})}\|b\|_{CMO_{\omega}^{\ell,r_1}(\mathbb{H}^n)} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{Q+\gamma}{q_1}}} \left(1+\Psi(t)+t^{-(Q+\gamma)\ell}\right) \times \\
&\times 2^{-k_0\lambda} \Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p} \left(\|f\chi_{k+\kappa-1}\|_{L_{\omega}^{q_1}(\mathbb{H}^n)} + \|f\chi_{k+\kappa}\|_{L_{\omega}^{q_1}(\mathbb{H}^n)}\right)^p\Big)^{\frac{1}{p}} dt. \\
&\le \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{Q-1})}\|b\|_{CMO_{\omega}^{\ell,r_1}(\mathbb{H}^n)} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{Q+\gamma}{q_1}}} \left(1+\Psi(t)+t^{-(Q+\gamma)\ell}\right)\Big(\sup_{k_0\in\mathbb{Z}} E_1 + \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} E_2\Big) dt,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

ở đó,

$$E_1 = 2^{-k_0\lambda} \Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p} \|f\chi_{k+\kappa-1}\|_{L_{\omega}^{q_1}(\mathbb{H}^n)}^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$E_2 = 2^{-k_0\lambda}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p}\|f\chi_{k+\kappa}\|^p_{L^{q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Chú ý rằng, $t^{-1} \simeq 2^\kappa$ và từ định nghĩa của không gian Morrey-Herz ta có

$$\begin{aligned}
E_1 &= 2^{(\kappa-1)\lambda}2^{-(k_0+\kappa-1)\lambda}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k_0+\kappa-1} 2^{(j-\kappa+1)\alpha_1 p}\|f\chi_j\|^p_{L^{q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&= 2^{(\kappa-1)(\lambda-\alpha_1)}2^{-(k_0+\kappa-1)\lambda}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k_0+\kappa-1} 2^{j\alpha_1 p}\|f\chi_j\|^p_{L^{q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}\Big)^{\frac{1}{p}} \lesssim t^{\alpha_1-\lambda}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}.
\end{aligned}$$

Lập luận tương tự trên, có được $E_2 \lesssim t^{\alpha_1-\lambda}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}$. Do đó, từ (4.17) suy ra

$$\|\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_\omega(\mathbb{H}^n)} \lesssim \mathscr{C}_{15}.\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{Q-1})}\|b\|_{CMO^{\ell,r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}.$$

Định lí được chứng minh. $\square$

Chú ý rằng khi $\lambda = 0$ thì không gian Herz là một trường hợp đặc biệt của không gian Morrey-Herz, do đó chúng tôi có kết quả dưới đây.

Hệ quả 4.1. *Cho giả thiết của Bổ đề 4.1,* $1 \le p < \infty$ *và* $\alpha_1 = \alpha + (Q+\gamma)(\frac{1}{r_1}+\ell)$*. Nếu*

$$\mathscr{C}_{15.1} = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{Q+\gamma}{q_1}-\alpha_1}}\Big(1+\Psi(t)+t^{-(Q+\gamma)\ell}\Big)dt < \infty,$$

thì

$$\|\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}f\|_{K^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{H}^n)} \lesssim \mathscr{C}_{15.1}.\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{Q-1})}\|b\|_{CMO^{\ell,r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}\|f\|_{K^{\alpha_1,p,q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}.$$

4.3. Giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ và lớp trọng Muckenhoupt

Trong mục này, chúng tôi trình bày kết quả về điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ trên không gian tâm Morrey có trọng Muckenhoupt (Định lí 4.3).

Trước khi đưa ra kết quả chính, chúng tôi giới thiệu bổ đề về tính bị chặn của $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ trên không gian Lebesgue có trọng trên các hình cầu. Bổ đề được dùng trong chứng minh của Định lí 4.3.

Bổ đề 4.2. *Cho* $1 \le q, q_1^*, r_1^*, \zeta < \infty$, $0 \le \ell < \frac{1}{Q}$, $\omega \in A_\zeta$ *với chỉ số tới hạn hữu hạn* r_ω *cho điều kiện Hölder ngược. Giả sử* $\Omega \in L^{q'}(S_{Q-1})$, $b \in C\dot{M}O_\omega^{r_1^*,\ell}(\mathbb{H}^n)$, $\delta \in (1, r_\omega)$ *và điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\frac{1}{q} > \left(\frac{1}{q_1^*} + \frac{1}{r_1^*}\right)\zeta\frac{r_\omega}{r_\omega - 1}. \tag{4.18}$$

Khi đó, với bất kì $R > 0$ *ta có*

$$\begin{aligned}&\|\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega} f\|_{L^q_\omega(B(0,R))}\\ &\lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{Q-1})}\|b\|_{C\dot{M}O_\omega^{r_1^*,\ell}(\mathbb{H}^n)}\int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t}(1+\Psi_1(t))\frac{\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q}+\ell}}{\omega(B(0,t^{-1}R))^{\frac{1}{q_1^*}}}\|f\|_{L^{q_1^*}_\omega(B(0,t^{-1}R))}dt,\end{aligned}$$

ở đó, $\Psi_1(t) = \left(t^{-Q\zeta(1+\ell)} + t^{-Q\zeta\ell}\right)\chi_{(0,1]}(t) + \left(t^{Q\zeta} + t^{-Q\frac{(\delta-1)\ell}{\delta}}\right)\chi_{(1,\infty)}(t)$.

Chứng minh. Từ (4.18), tồn tại r_1, q_1 sao cho

$$\frac{1}{q_1} > \frac{\zeta}{q_1^*}\frac{r_\omega}{r_\omega - 1},\quad \frac{1}{r_1} > \frac{\zeta}{r_1^*}\frac{r_\omega}{r_\omega - 1},\quad \text{và}\quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1} = \frac{1}{q}. \tag{4.19}$$

Do đó, ta có bất đẳng thức (4.6). Từ (4.9) ở trên và $r_1 < r_1^*$, suy ra

$$I_1 \le \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}+\ell}\|b\|_{C\dot{M}O_\omega^{\ell,r_1}(\mathbb{H}^n)} \le \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}+\ell}\|b\|_{C\dot{M}O_\omega^{\ell,r_1^*}(\mathbb{H}^n)}. \tag{4.20}$$

Tiếp theo, ta ước lượng I_2 và I_3 như trong Bổ đề 4.1. Vì $\omega \in A_\zeta$ và bởi Mệnh đề 1.3, ta được

$$\begin{cases}\left(\frac{\omega(B(0,t^{-1}R))}{\omega(B(0,R))}\right)^{1+\ell} \lesssim \left(\frac{|B(0,t^{-1}R)|}{|B(0,R)|}\right)^{\zeta(1+\ell)} \lesssim t^{-Q\zeta(1+\ell)}, & \text{nếu } t \le 1,\\ \frac{\omega(B(0,R))}{\omega(B(0,t^{-1}R))} \lesssim \left(\frac{|B(0,R)|}{|B(0,t^{-1}R)|}\right)^{\zeta} \lesssim t^{Q\zeta}, & \text{trường hợp còn lại.}\end{cases}$$

Do vậy, từ (4.13) dẫn đến

$$I_2 \lesssim \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}+\ell}.\left(t^{-Q\zeta(1+\ell)}\chi_{(0,1]}(t) + t^{Q\zeta}\chi_{(1,\infty)}(t)\right).\|b\|_{C\dot{M}O_\omega^{\ell,r_1^*}(\mathbb{H}^n)}. \tag{4.21}$$

Từ $\frac{1}{r_1} > \frac{1}{r_1^*}\zeta\frac{r_\omega}{r_\omega-1}$, có $r \in (1, r_\omega)$ sao cho $\frac{r_1^*}{\zeta} = r_1.r'$. Áp dụng bất đẳng thức Hölder và điều kiện Hölder ngược, ta có

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \int_{S_{Q-1}} \left(\int_{B(0,R)} |b_{\omega,B(0,t^{-1}R)} - b(\delta_{t^{-1}|x|_h}y')|^{\frac{r_1^*}{\zeta}}dx\right)^{\frac{\zeta r_1}{r_1^*}} \left(\int_{B(0,R)} \omega(x)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} dy' \\
&\lesssim |B(0,R)|^{\frac{-1}{r'}}\omega(B(0,R)) \left(\int_{S_{Q-1}}\int_{B(0,R)} |b_{\omega,B(0,t^{-1}R)} - b(\delta_{t^{-1}|x|_h}y')|^{\frac{r_1^*}{\zeta}}dxdy'\right)^{\frac{\zeta r_1}{r_1^*}}.
\end{aligned}$$

Bằng cách ước lượng như (4.16) và sử dụng Mệnh đề 1.2, suy ra

$$\begin{aligned}
I_3 &\lesssim |B(0,R)|^{\frac{-\zeta}{r_1^*}}\omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}} \left(\int_{S_{Q-1}}\int_{B(0,R)} |b_{\omega,B(0,t^{-1}R)} - b(\delta_{t^{-1}|x|_h}y')|^{\frac{r_1^*}{\zeta}}dxdy'\right)^{\frac{\zeta}{r_1^*}} \\
&\lesssim |B(0,R)|^{\frac{-\zeta}{r_1^*}}\omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}} \left(t^Q\int_{B(0,t^{-1}R)} |b(x) - b_{\omega,B(0,t^{-1}R)}|^{\frac{r_1^*}{\zeta}}dx\right)^{\frac{\zeta}{r_1^*}} \\
&\lesssim \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}}\left(\frac{|B(0,t^{-1}R)|}{|B(0,R)|}\right)^{\frac{\zeta}{r_1^*}} t^{\frac{Q\zeta}{r_1^*}} \times \\
&\times \left(\frac{1}{\omega(B(0,t^{-1}R))}\int_{B(0,t^{-1}R)} |b(x) - b_{\omega,B(0,t^{-1}R)}|^{r_1^*}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{r_1^*}} \\
&\lesssim \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}}\left(\frac{1}{\omega(B(0,t^{-1}R))}\int_{B(0,t^{-1}R)} |b(x) - b_{\omega,B(0,t^{-1}R)}|^{r_1^*}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{r_1^*}}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}
I_3 &\lesssim \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}+\ell}\left(\frac{\omega(B(0,t^{-1}R))}{\omega(B(0,R))}\right)^{\ell} \times \\
&\times \left(\frac{1}{\omega(B(0,t^{-1}R))^{1+\ell r_1^*}}\int_{B(0,t^{-1}R)} |b(x) - b_{\omega,B(0,t^{-1}R)}|^{r_1^*}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{r_1^*}} \\
&\leq \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}+\ell}.\left(\frac{\omega(B(0,t^{-1}R))}{\omega(B(0,R))}\right)^{\ell}.\|b\|_{C\dot{M}O_\omega^{{r_1}^*,\ell}(\mathbb{H}^n)}.
\end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng Mệnh đề 1.3, ta có

$$\left(\frac{\omega(B(0,t^{-1}R))}{\omega(B(0,R))}\right)^{\ell} \lesssim \begin{cases} \left(\frac{|B(0,t^{-1}R)|}{|B(0,R)|}\right)^{\zeta\ell} \lesssim t^{-Q\zeta\ell}, & \text{nếu } t \leq 1, \\ \left(\frac{|B(0,t^{-1}R)|}{|B_R|}\right)^{\frac{(\delta-1)\ell}{\delta}} \lesssim t^{-Q\frac{(\delta-1)\ell}{\delta}}, & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Do đó,

$$I_3 \lesssim \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}+\ell}.\Big(t^{-Q\zeta\ell}\chi_{(0,1]}(t)+t^{-Q\frac{(\delta-1)\ell}{\delta}}\chi_{(1,\infty)}(t)\Big).\|b\|_{C\dot{M}O_\omega^{{r_1}^*,\ell}(\mathbb{H}^n)}.$$

Do vậy, bởi (4.8), (4.20) và (4.21) suy ra

$$\begin{aligned}\Big(\int_{S_{Q-1}}\|b(\cdot)-b(\delta_{t^{-1}|\cdot|_h}y')\|^{r_1}_{L^{r_1}_\omega(B(0,R))}dy'\Big)^{\frac{1}{r_1}}&\\ \lesssim \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}+\ell}\Big(1+\Psi_1(t)\Big).\|b\|_{C\dot{M}O_\omega^{{r_1}^*,\ell}(\mathbb{H}^n)}.&\quad (4.23)\end{aligned}$$

Mặt khác, từ $\frac{1}{q_1}>\frac{1}{q_1^*}\zeta\frac{r_\omega}{r_\omega-1}$ và lập luận tương tự (4.22), ta được

$$\begin{aligned}\Big(\int_{S_{Q-1}}\|f(\delta_{t^{-1}|\cdot|_h}y')\|^{q_1}_{L^{q_1}_\omega(B(0,R))}dy'\Big)^{\frac{1}{q_1}}&\\ \lesssim \omega(B(0,R))^{\frac{1}{q_1}}\omega(B(0,t^{-1}R))^{\frac{-1}{q_1^*}}\|f\|_{L^{q_1^*}_\omega(B(0,t^{-1}R))}.&\end{aligned}$$

Do vậy, từ (4.6), (4.23) và $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{r_1}=\frac{1}{q}$, bổ đề được chứng minh. □

Định lí 4.3. *Cho $1\le q,q_1^*,r_1^*,\zeta<\infty$, $0\le\ell<\frac{1}{Q}$, $\omega\in A_\zeta$ với chỉ số tới hạn r_ω cho điều kiện Hölder ngược. Giả sử $\Omega\in L^{q'}(S_{Q-1})$, $b\in C\dot{M}O_\omega^{r_1^*,\ell}(\mathbb{H}^n)$, $\delta\in(1,r_\omega)$, $\lambda\in(-\frac{1}{q},0)$, $\lambda_1\in(-\frac{1}{q_1},0)$ và $\lambda_1=\lambda-\ell$. Nếu $\frac{1}{q}>\Big(\frac{1}{q_1^*}+\frac{1}{r_1^*}\Big)\zeta\frac{r_\omega}{r_\omega-1}$ và*

$$\mathscr{C}_{14}=\int_0^\infty\frac{\Phi(t)}{t}\Big(t^{-Q\frac{(\delta-1)\lambda_1}{\delta}}\chi_{(0,1]}(t)+t^{-Q\zeta\lambda_1}\chi_{(1,\infty)}(t)\Big)\left(1+\Psi_1(t)\right)dt<\infty,$$

thì $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ bị chặn từ $\dot{M}^{\lambda_1,q_1^*}_\omega(\mathbb{H}^n)$ đến $\dot{M}^{\lambda,q}_\omega(\mathbb{H}^n)$.

Chứng minh. Với $R>0$, từ Bổ đề 4.2 ta có

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q}+\lambda}}\|\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}f\|_{L^q_\omega(B(0,R))}\\ &\lesssim\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{Q-1})}\|b\|_{C\dot{M}O_\omega^{\ell,r_1^*}(\mathbb{H}^n)}\int_0^\infty\frac{\Phi(t)}{t}\left(1+\Psi_1(t)\right)\times\\ &\times\Big(\frac{\omega(B(0,t^{-1}R))}{\omega(B(0,R))}\Big)^{\lambda_1}.\frac{1}{\omega(B(0,t^{-1}R))^{\frac{1}{q_1^*}+\lambda_1}}\|f\|_{L^{q_1^*}_\omega(B(0,t^{-1}R))}dt.\quad(4.24)\end{aligned}$$

Tiếp theo, bởi $\lambda_1 < 0$ và sử dụng Mệnh đề 1.3. Suy ra

$$\left(\frac{\omega(B(0,t^{-1}R))}{\omega(B(0,R))}\right)^{\lambda_1} \lesssim \begin{cases} \left(\frac{|B(0,t^{-1}R)|}{|B(0,R)|}\right)^{\zeta\lambda_1} \lesssim t^{-Q\zeta\lambda_1}, & \text{nếu } t > 1, \\ \left(\frac{|B(0,t^{-1}R)|}{|B_R|}\right)^{\frac{(\delta-1)\lambda_1}{\delta}} \lesssim t^{-Q\frac{(\delta-1)\lambda_1}{\delta}}, & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

$$= t^{-Q\frac{(\delta-1)\lambda_1}{\delta}}\chi_{(0,1]}(t) + t^{-Q\zeta\lambda_1}\chi_{(1,\infty)}(t).$$

Từ định nghĩa của không gian tâm Morrey, ta được

$$\|\mathcal{H}^b_{\Phi,\Omega}f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{H}^n)} \lesssim \mathcal{C}_{14}.\|\Omega\|_{L^{q'}(S_{Q-1})}\|b\|_{CMO^{\ell,r_1^*}_{\omega}(\mathbb{H}^n)}\|f\|_{\dot{M}^{\lambda_1,q_1^*}_{\omega}(\mathbb{H}^n)}.$$

Định lí được chứng minh. □

4.4. Giao hoán tử $\mathcal{H}^b_{\Phi,A}$ và lớp trọng lũy thừa

Trong mục này, chúng tôi trình bày các kết quả về điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathcal{H}^b_{\Phi,A}$ trên các không gian có trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Định lí 4.4), không gian Morrey-Herz (Định lí 4.5)

Bổ đề dưới đây dùng để chứng minh Định lí 4.4, Định lí 4.5.

Bổ đề 4.3. *Cho $1 \leq q < \infty$, $1 < q_1, r_1 < \infty$, $\gamma > -Q$, $\omega(x) = |x|_h^{\gamma}$ và $b \in C\dot{M}O^{r_1}_{\omega}(\mathbb{H}^n)$. Giả sử điều kiện $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1}$ được thỏa mãn. Khi đó, với bất kì $R > 0$ ta có*

$$\|\mathcal{H}^b_{\Phi,A}f\|_{L^q_{\omega}(B(0,R))} \lesssim \|b\|_{C\dot{M}O^{r_1}_{\omega}(\mathbb{H}^n)}R^{\frac{Q+\gamma}{r_1}}\int_{\mathbb{H}^n}\frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q}.\psi(y).\mu(y).\|f\|_{L^{q_1}_{\omega}(B(0,\|A(y)\|.R))}dy,$$

ở đó

$$\psi(y) = \max\{\log(2\|A(y)\|), \log\frac{1}{\|A(y)\|}\} + \frac{2\|A(y)\|^{Q+\gamma}}{\min\{\|A(y)\|^{\gamma}, \|A^{-1}(y)\|^{-\gamma}\}|\det A(y)|} + \left(\max\{\|A^{-1}(y)\|^{\gamma}, \|A(y)\|^{-\gamma}\}|\det A^{-1}(y)|\right)^{\frac{1}{r_1}}\|A(y)\|^{\frac{Q+\gamma}{r_1}},$$

$$\mu(y) = \left(\max\{\|A^{-1}(y)\|^{\gamma}, \|A(y)\|^{-\gamma}\}|\det A^{-1}(y)|\right)^{\frac{1}{q_1}}.$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski và bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\left\|\mathcal{H}^b_{\Phi,A}f\right\|_{L^q_{\omega}(B(0,R))}$$

$$\lesssim \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q} \left\| b(\cdot) - b(A(y)\cdot) \right\|_{L^{r_1}_\omega(B(0,R))} \left\| f(A(y)\cdot) \right\|_{L^{q_1}_\omega(B(0,R))} dt. \quad (4.25)$$

Ta cần chứng minh

$$\left\| b(\cdot) - b(A(y)\cdot) \right\|_{L^{r_1}_\omega(B(0,R))} \lesssim R^{\frac{Q+\gamma}{r_1}}.\psi(y).\left\| b \right\|_{C\dot{M}O^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}. \quad (4.26)$$

Thật vậy, ta kí hiệu

$$\begin{aligned} J_1 &= \| b(\cdot) - b_{\omega,B(0,R)} \|_{L^{r_1}_\omega(B(0,R))}, \\ J_2 &= \| b(A(y)\cdot) - b_{\omega,A(y)B(0,R)} \|_{L^{r_1}_\omega(B(0,R))}, \\ J_3 &= \| b_{\omega,B(0,R)} - b_{\omega,A(y)B(0,R)} \|_{L^{r_1}_\omega(B(0,R))}. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\left\| b(\cdot) - b(A(y)\cdot) \right\|_{L^{r_1}_\omega(B(0,R))} \leq J_1 + J_2 + J_3. \quad (4.27)$$

Để ước lượng cho J_1, từ định nghĩa của không gian $C\dot{M}O^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)$ ta được

$$J_1 \leq \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}}.\left\| b \right\|_{C\dot{M}O^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)} \lesssim R^{\frac{Q+\gamma}{r_1}}.\left\| b \right\|_{C\dot{M}O^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}. \quad (4.28)$$

Tiếp theo, với J_2 ta có

$$\begin{aligned} J_2 &= \left(\int_{B(0,R)} |b(A(y)x) - b_{\omega,A(y)B(0,R)}|^{r_1} \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{r_1}} \\ &\leq \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}} \left| b_{\omega,A(y)B(0,R)} - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)} \right| + \\ &\quad + \left(\int_{B(0,R)} |b(A(y)x) - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}|^{r_1} \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{r_1}}. \quad (4.29) \end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức Hölder dẫn đến

$$\begin{aligned} &|b_{\omega,A(y)B(0,R)} - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}| \\ &\leq \frac{1}{\omega(A(y)B(0,R))} \int_{A(y)B(0,R)} |b(x) - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}| \omega(x) dx \\ &\leq \frac{\omega(B(0,\|A(y)\|.R))^{\frac{1}{r_1'}}}{\omega(A(y)B(0,R))} \left(\int_{B(0,\|A(y)\|.R)} |b(x) - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}|^{r_1} \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{r_1}} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\omega(B(0,\|A(y)\|.R))}{\omega(A(y)B(0,R))}\|b\|_{C\dot{M}O^{r_1}_{\omega}(\mathbb{H}^n)}. \tag{4.30}$$

Bằng phương pháp đổi biến và từ bất đẳng thức (1.6) suy ra

$$\begin{aligned}\omega(A(y)B(0,R)) &= \int_{B(0,R)} |A(y)z|^{\gamma}|\det A(y)|dz\\ &\geq \min\{\|A(y)\|^{\gamma}, \|A^{-1}(y)\|^{-\gamma}\}|\det A(y)|\int_{B(0,R)}|z|^{\gamma}dz\\ &\simeq \min\{\|A(y)\|^{\gamma}, \|A^{-1}(y)\|^{-\gamma}\}|\det A(y)|.R^{Q+\gamma}. \end{aligned}\tag{4.31}$$

Vì vậy, từ (4.30) suy ra

$$\begin{aligned}|b_{\omega,A(y)B(0,R)} - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}| &\lesssim \frac{(\|A(y)\|.R)^{Q+\gamma}.\|b\|_{C\dot{M}O^{r_1}_{\omega}(\mathbb{H}^n)}}{\min\{\|A(y)\|^{\gamma}, \|A^{-1}(y)\|^{-\gamma}\}|\det A(y)|.R^{Q+\gamma}}\\ &= \frac{\|A(y)\|^{Q+\gamma}.\|b\|_{C\dot{M}O^{r_1}_{\omega}(\mathbb{H}^n)}}{\min\{\|A(y)\|^{\gamma}, \|A^{-1}(y)\|^{-\gamma}\}|\det A(y)|}.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Sử dụng phương pháp đổi biến và công thức (1.6) lần nữa, ta được

$$\begin{aligned}&\left(\int_{B(0,R)}|b(A(y)x) - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}|^{r_1}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{r_1}}\\ &= \left(\int_{A(y)B(0,R)}|b(z) - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}|^{r_1}|A^{-1}(y)z|^{\gamma}|\det A^{-1}(y)|dz\right)^{\frac{1}{r_1}}\\ &\leq \left(\max\{\|A^{-1}(y)\|^{\gamma}, \|A(y)\|^{-\gamma}\}|\det A^{-1}(y)|\omega(B(0,\|A(y)\|.R))\right)^{\frac{1}{r_1}}\times\\ &\times\left(\frac{1}{\omega(B(0,\|A(y)\|.R))}\int_{B(0,\|A(y)\|.R)}|b(z) - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}|^{r_1}\omega(z)dz\right)^{\frac{1}{r_1}}.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Do đó

$$\begin{aligned}&\left(\int_{B(0,R)}|b(A(y)x) - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}|^{r_1}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{r_1}}\\ &\lesssim R^{\frac{Q+\gamma}{r_1}}.\left(\max\{\|A^{-1}(y)\|^{\gamma}, \|A(y)\|^{-\gamma}\}|\det A^{-1}(y)|\right)^{\frac{1}{r_1}}\|A(y)\|^{\frac{Q+\gamma}{r_1}}.\big\|b\big\|_{C\dot{M}O^{r_1}_{\omega}(\mathbb{H}^n)}.\end{aligned}$$

Từ (4.29) và (4.32), suy ra

$$J_2 \lesssim \Big(\frac{\|A(y)\|^{Q+\gamma}}{\min\{\|A(y)\|^{\gamma}, \|A^{-1}(y)\|^{-\gamma}\}|\det A(y)|} + \\ + \big(\max\{\|A^{-1}(y)\|^{\gamma}, \|A(y)\|^{-\gamma}\}|\det A^{-1}(y)|\big)^{\frac{1}{r_1}}\|A(y)\|^{\frac{Q+\gamma}{r_1}}\Big).R^{\frac{Q+\gamma}{r_1}}.\big\|b\big\|_{C\dot{M}O^{r_1}_{\omega}(\mathbb{H}^n)} \tag{4.34}$$

Tiếp theo, ta ước lượng cho J_3. Trước tiên, thấy rằng

$$J_3 \le \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}}\big|b_{\omega,B(0,R)} - b_{\omega,A(y)B(0,R)}\big|. \tag{4.35}$$

Từ điều kiện $\|A(y)\| \neq 0$, ta có một số nguyên $\kappa = \kappa(y)$ thỏa mãn $2^{\kappa-1} < \|A(y)\| \le 2^{\kappa}$. Đặt

$$S(\kappa) = \begin{cases} \{j \in \mathbb{Z} : 1 \le j \le \kappa\}, & \text{nếu } \kappa \ge 1, \\ \{j \in \mathbb{Z} : \kappa + 1 \le j \le 0\}, & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} &\big|b_{\omega,B(0,R)} - b_{\omega,A(y)B(0,R)}\big| \\ &\qquad \le \sum_{j\in S(\kappa)} \big|b_{\omega,B_{2^{j-1}.R}} - b_{\omega,B_{2^j.R}}\big| + \big|b_{\omega,B_{2^{\kappa}.R}} - b_{\omega,A(y)B(0,R)}\big| \\ &\qquad \lesssim |\kappa|.\big\|b\big\|_{C\dot{M}O^{r_1}_{\omega}(\mathbb{H}^n)} + \big|b_{\omega,B_{2^{\kappa}.R}} - b_{\omega,A(y)B(0,R)}\big|. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Mặt khác, vì $\|A(y)\| \simeq 2^{\kappa}$, nên

$$\begin{aligned} |\kappa| &\lesssim \begin{cases} \log(2\|A(y)\|), & \text{nếu } \kappa \ge 0, \\ \log\frac{1}{\|A(y)\|}, & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases} \\ &\lesssim \max\{\log(2\|A(y)\|), \log\frac{1}{\|A(y)\|}\}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Áp dụng bất đẳng thức Hölder ta có

$$\begin{aligned} &\big|b_{\omega,B_{2^{\kappa}.R}} - b_{\omega,A(y)B(0,R)}\big| \\ &\qquad \le \frac{1}{\omega(A(y)B(0,R))}\int_{A(y)B(0,R)} \big|b(x) - b_{\omega,B_{2^{\kappa}.R}}\big|\omega(x)dx \\ &\qquad \le \frac{\omega(B_{2^{\kappa}.R})^{\frac{1}{r_1'}}}{\omega(A(y)B(0,R))}\bigg(\int_{B_{2^{\kappa}.R}} \big|b(x) - b_{\omega,B_{2^{\kappa}R}}\big|^{r_1}\omega(x)dx\bigg)^{\frac{1}{r_1}} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\omega(B_{2^\kappa.R})}{\omega(A(y)B(0,R))}\|b\|_{C\dot{M}O^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}. \tag{4.38}$$

Từ ước lượng (4.31) và vì $\|A(y)\| \simeq 2^\kappa$ ta có

$$\begin{aligned}
&\left|b_{\omega,B_{2^\kappa.R}} - b_{\omega,A(y)B(0,R)}\right|\\
&\qquad \lesssim \frac{\left(2^\kappa.R\right)^{Q+\gamma}}{\min\{\|A(y)\|^\gamma, \|A^{-1}(y)\|^{-\gamma}\}|\det A(y)|.R^{Q+\gamma}}.\|b\|_{C\dot{M}O^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}\\
&\qquad \lesssim \frac{\|A(y)\|^{Q+\gamma}}{\min\{\|A(y)\|^\gamma, \|A^{-1}(y)\|^{-\gamma}\}|\det A(y)|}.\|b\|_{C\dot{M}O^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}.
\end{aligned}$$

Từ (4.35)-(4.37) suy ra

$$\begin{aligned}
J_3 \lesssim R^{\frac{Q+\gamma}{r_1}}\Big(&\max\{\log(2\|A(y)\|), \log\frac{1}{\|A(y)\|}\} +\\
&+ \frac{\|A(y)\|^{Q+\gamma}}{\min\{\|A(y)\|^\gamma, \|A^{-1}(y)\|^{-\gamma}\}|\det A(y)|}\Big).\|b\|_{C\dot{M}O^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}.
\end{aligned}$$

Như vậy, bởi (4.28) và (4.34), ta đã hoàn thành chứng minh bất đẳng thức (4.26). Tiếp theo, ước lượng cho (4.33). Ta có

$$\begin{aligned}
&\|f(A(y)\cdot)\|_{L^{q_1}_\omega(B(0,R))}\\
&\leq \left(\max\{\|A^{-1}(y)\|^\gamma, \|A(y)\|^{-\gamma}\}|\det A^{-1}(y)|\right)^{\frac{1}{q_1}}\|f\|_{L^{q_1}_\omega(B(0,\|A(y)\|.R))}\\
&= \mu(y).\|f\|_{L^{q_1}_\omega(B(0,\|A(y)\|.R))}.
\end{aligned}$$

Từ (4.25) và (4.26), bổ đề đã được chứng minh. □

Định lí 4.4. *Cho* $1 \leq q < \infty$, $1 < q_1, r_1 < \infty$, $\gamma > -Q$, $\omega(x) = |x|_h^\gamma$, $b \in C\dot{M}O^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)$ *và* $\lambda \in (-\frac{1}{q_1}, 0)$. *Nếu* $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1}$ *và*

$$\mathscr{C}_{16} = \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q}.\psi(y).\mu(y)\|A(y)\|^{(Q+\gamma)(\frac{1}{q_1}+\lambda)}dy < \infty,$$

thì $\mathscr{H}^b_{\Phi,A}$ *bị chặn từ* $\dot{M}^{\lambda,q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)$ *đến* $\dot{M}^{\lambda,q}_\omega(\mathbb{H}^n)$.

Chứng minh. Với bất kì $R > 0$, áp dụng Bổ đề 4.3 ta có

$$\frac{1}{\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q}+\lambda}}\|\mathscr{H}^b_{\Phi,A}f\|_{L^q_\omega(B(0,R))} \lesssim \|b\|_{C\dot{M}O^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}\int_{\mathbb{H}^n}\frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q}\psi(y)\mu(y)\times$$

$$\times \frac{R^{\frac{Q+\gamma}{r_1}}\omega(B(0,\|A(y)\|.R))^{\frac{1}{q_1}+\lambda}}{\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q}+\lambda}} \frac{1}{\omega(B(0,\|A(y)\|.R))^{\frac{1}{q_1}+\lambda}} \|f\|_{L^{q_1}_\omega(B(0,\|A(y)\|.R))} dy,$$

Từ ước lượng (4.14) và điều kiện $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1}$, suy ra

$$\frac{R^{\frac{Q+\gamma}{r_1}}\omega(B(0,\|A(y)\|.R))^{\frac{1}{q_1}+\lambda}}{\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q}+\lambda}} \simeq \frac{R^{\frac{Q+\gamma}{r_1}}(\|A(y)\|R)^{(Q+\gamma)(\frac{1}{q_1}+\lambda)}}{R^{(Q+\gamma)(\frac{1}{q}+\lambda)}} = \|A(y)\|^{(Q+\gamma)(\frac{1}{q_1}+\lambda)}.$$

Do vậy,

$$\|\mathscr{H}^b_{\Phi,A} f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_\omega(\mathbb{H}^n)} \lesssim \mathscr{C}_{16}.\|b\|_{CMO^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}\|f\|_{\dot{M}^{\lambda,q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}.$$

Định lí được chứng minh. □

Định lí 4.5. *Cho $1 \le p, q < \infty$, $1 < q_1, r_1 < \infty$, $\gamma > -Q$, $\omega(x) = |x|_h^\gamma$, $b \in C\dot{M}O^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)$, $\lambda \ge 0$, $\alpha_2 = \alpha + \frac{Q+\gamma}{r_1}$. Nếu $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1}$ và*

$$\mathscr{C}_{18} = \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q}.\psi(y).\mu(y)(2-\kappa^*)^{1-\frac{1}{p}}\|A(y)\|^{\lambda-\alpha_2}\Big(\sum_{i=\kappa^*-1}^{0} 2^{i(\lambda-\alpha_2)}\Big)dy < \infty,$$

với $\kappa^* = \kappa^*(y)$ là số nguyên lớn nhất sao cho

$$\|A(y)\|.\|A^{-1}(y)\| < 2^{-\kappa^*}, \text{ với mọi hầu khắp } y \in \mathbb{H}^n,$$

thì $\mathscr{H}^b_{\Phi,A}$ bị chặn từ $M\dot{K}^{\alpha_2,\lambda,p,q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)$ đến $M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_\omega(\mathbb{H}^n)$.

Chứng minh. Với mọi $k \in \mathbb{Z}$, từ Bổ đề 4.3. Ta có

$$\|\mathscr{H}^b_{\Phi,A} f\chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{H}^n)} \lesssim \|b\|_{CMO^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)} 2^{\frac{k(Q+\gamma)}{r_1}} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q}.\psi(y).\mu(y).\|f\|_{L^{q_1}_\omega(A(y)C_k)}dy.$$

Với số nguyên $\kappa := \kappa(y)$ sao cho $2^{\kappa-1} < \|A(y)\| \le 2^\kappa$. Từ đó, đặt $u = A(y).z$ với $z \in C_k$, suy ra

$$|u|_h \ge \|A^{-1}(y)\|^{-1}.|z|_h \ge \frac{\|A(y)\|.|z|_h}{\|A(y)\|.\|A^{-1}(y)\|} > 2^{k+\kappa-2+\kappa^*},$$

và

$$|u|_h \le \|A(y)\|.|z|_h \le 2^{k+\kappa}.$$

Do vậy

$$A(y)C_k \subset \{z \in \mathbb{H}^n : 2^{k+\kappa-2+\kappa^*} < |z|_h \le 2^{k+\kappa}\}.$$

Từ đó, ta được

$$
\begin{aligned}
&\|\mathscr{H}^b_{\Phi,A} f\chi_k\|_{L^q_\omega(\mathbb{H}^n)}\\
&\lesssim \|b\|_{CMO^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)} 2^{\frac{k(Q+\gamma)}{r_1}} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q}.\psi(y).\mu(y)\Big(\sum_{i=\kappa^*-1}^{0} \|f\chi_{k+\kappa+i}\|_{L^{q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}\Big)dy.
\end{aligned}
$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski và $\alpha_2 = \alpha + \frac{Q+\gamma}{r_1}$, suy ra

$$
\begin{aligned}
\|\mathscr{H}^b_{\Phi,A} f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_\omega(\mathbb{H}^n)} &= \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p}\|\mathscr{H}^b_{\Phi,A}(f)\chi_k\|^p_{L^q_\omega(\mathbb{H}^n)}\Big)^{1/p}\\
&\le \|b\|_{CMO^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)} \sup_{k_0\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q}.\psi(y).\mu(y).K dy, \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

ở đó $K = 2^{-k_0\lambda}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 p}\big(\sum_{i=\kappa^*-1}^{0} \|f\chi_{k+\kappa+i}\|_{L^{q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}\big)^p\Big)^{\frac{1}{p}}$. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski và $\|A(y)\| \simeq 2^\kappa$, dẫn đến

$$
\begin{aligned}
K &\le (2-\kappa^*)^{1-\frac{1}{p}} \sum_{i=\kappa^*-1}^{0} 2^{-k_0\lambda}\Big(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 p}\|f\chi_{k+\kappa+i}\|^p_{L^{q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&= (2-\kappa^*)^{1-\frac{1}{p}} \sum_{i=\kappa^*-1}^{0} 2^{(\kappa+i)(\lambda-\alpha_2)} 2^{-(k_0+\kappa+i)\lambda}\Big(\sum_{j=-\infty}^{k_0+\kappa+i} 2^{j\alpha_2 p}\|f\chi_j\|^p_{L^{q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\le (2-\kappa^*)^{1-\frac{1}{p}} \sum_{i=\kappa^*-1}^{0} 2^{i(\lambda-\alpha_2)}.2^{\kappa(\lambda-\alpha_2)}\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_2,\lambda,p,q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}\\
&\lesssim (2-\kappa^*)^{1-\frac{1}{p}} \|A(y)\|^{\lambda-\alpha_2}\Big(\sum_{i=\kappa^*-1}^{0} 2^{i(\lambda-\alpha_2)}\Big)\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_2,\lambda,p,q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}.
\end{aligned}
$$

Khi đó, từ (4.39) suy ra

$$
\|\mathscr{H}^b_{\Phi,A} f\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_\omega(\mathbb{H}^n)} \lesssim \mathscr{C}_{18}.\|b\|_{CMO^{r_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}.\|f\|_{M\dot{K}^{\alpha_2,\lambda,p,q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)}.
$$

Định lí đã được chứng minh. □

Như trường hợp đặc biệt của Định lí 4.5, chúng tôi có được điều kiện đủ cho tính bị chặn của $\mathscr{H}^b_{\Phi,A}$ trên nhóm Heisenberg, trên không gian Herz có trọng lũy thừa như sau.

Hệ quả 4.2. *Cho $1 \leq p < \infty$ và $\alpha_2 = \alpha + \frac{Q+\gamma}{r_1}$. Theo giả thiết của Bổ đề 4.3, nếu*

$$\mathscr{C}_{18.1} = \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q}.\psi(y).\mu(y)(2-\kappa^*)^{1-\frac{1}{p}}\|A(y)\|^{-\alpha_2}\Big(\sum_{i=\kappa^*-1}^{0} 2^{-i\alpha_2}\Big)dy < \infty,$$

thì

$$\|\mathscr{H}^b_{\Phi,A}f\|_{K_\omega^{\alpha,p,q}(\mathbb{H}^n)} \lesssim \mathscr{C}_{18.1}.\|b\|_{CMO_\omega^{r_1}(\mathbb{H}^n)}\|f\|_{K_\omega^{\alpha_2,p,q_1}(\mathbb{H}^n)}.$$

4.5. Giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,A}$ và lớp trọng Muckenhoupt

Trong mục này, chúng tôi trình bày kết quả về điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,A}$ trên không gian tâm Morrey có trọng Muckenhoupt (Định lí 4.6).

Bổ đề dưới đây dùng để chứng minh Định lí 4.6.

Bổ đề 4.4. *Cho $1 \leq q, q_1^*, r_1^*, \zeta < \infty$, $\omega \in A_\zeta$ với chỉ số tới hạn hữu hạn r_ω cho điều kiện Hölder ngược, $b \in C\dot{M}O_\omega^{r_1^*}(\mathbb{H}^n)$. Nếu $\frac{1}{q} > \left(\frac{1}{q_1^*} + \frac{1}{r_1^*}\right)\zeta\frac{r_\omega}{r_\omega - 1}$ thì*

$$\|\mathscr{H}^b_{\Phi,A}f\|_{L^q_\omega(B(0,R))}$$
$$\lesssim \big\|b\big\|_{C\dot{M}O_\omega^{r_1^*}(\mathbb{H}^n)}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q}\psi_1(y)\mu_1(y)\frac{\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q}}}{\omega(B(0,\|A(y)\|.R))^{\frac{1}{q_1^*}}}\|f\|_{L_\omega^{q_1^*}(B(0,\|A(y)\|.R))}dy,$$

ở đó

$$\psi_1(y) = 1 + \frac{2\|A(y)\|^{Q\zeta}}{|\det A(y)|^\zeta} + |\det A^{-1}(y)|^{\frac{\zeta}{r_1^*}}\|A(y)\|^{\frac{Q\zeta}{r_1^*}} + \max\{\log(2\|A(y)\|), \log\frac{1}{\|A(y)\|}\},$$
$$\mu_1(y) = |\det A^{-1}(y)|^{\frac{\zeta}{q_i^*}}\|A(y)\|^{\frac{Q\zeta}{q_1^*}}.$$

Chứng minh. Từ (4.19), áp dụng bất đẳng thức Minkowski và bất đẳng thức Hölder, ta đạt được bất đẳng thức (4.25). Ta đã có J_1, J_2, J_3 trong Bổ đề 4.3. Tiếp theo, J_1, J_2 và J_3 có ước lượng như sau:
Với $r_1 < r_1^*$, ta có

$$J_1 \leq \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}}\|b\|_{C\dot{M}O_\omega^{r_1^*}(\mathbb{H}^n)}. \tag{4.40}$$

Kết hợp (4.29) và (4.30), ta được

$$J_2 \le \omega(B)^{\frac{1}{r_1}} \frac{\omega(B(0,\|A(y)\|.R))}{\omega(A(y)B(0,R))} \|b\|_{C\dot{M}O_{\omega}^{r_1^*}(\mathbb{H}^n)}$$

$$+ \left(\int_{B(0,R)} |b(A(y)x) - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}|^{r_1} \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{r_1}}. \qquad (4.41)$$

Áp dụng Mệnh đề 1.3 và (4.31), suy ra

$$\frac{\omega(B(0,\|A(y)\|.R))}{\omega(A(y)B(0,R))} \lesssim \left(\frac{|B(0,\|A(y)\|.R)|}{|A(y)B(0,R)|} \right)^{\zeta} \simeq \left(\frac{|\|A(y)\|^Q R^Q}{|\det A(y)|R^Q} \right)^{\zeta} = \frac{\|A(y)\|^{Q\zeta}}{|\det A(y)|^{\zeta}}. \qquad (4.42)$$

Từ (4.19), tồn tại $\beta_1 \in (1, r_\omega)$ thỏa mãn $\frac{r_1^*}{\zeta} = r_1 \beta_1'$. Áp dụng bất đẳng thức Hölder và điều kiện Hölder ngược ta có

$$\left(\int_{B(0,R)} |b(A(y)x) - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}|^{r_1} \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{r_1}}$$

$$\le \left(\int_{B(0,R)} |b(A(y)x) - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}|^{\frac{r_1^*}{\zeta}} dx \right)^{\frac{\zeta}{r_1^*}} \left(\int_{B(0,R)} \omega(x)^{\beta_1} dx \right)^{\frac{1}{\beta_1 r_1}}$$

$$\lesssim |B(0,R)|^{\frac{-\zeta}{r_1^*}} \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}} \left(\int_{B(0,R)} |b(A(y)x) - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}|^{\frac{r_1^*}{\zeta}} dx \right)^{\frac{\zeta}{r_1^*}}.$$

Từ Mệnh đề 1.2, dẫn đến

$$\left(\int_{B(0,R)} |b(A(y)x) - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}|^{\frac{r_1^*}{\zeta}} dx \right)^{\frac{\zeta}{r_1^*}}$$

$$\le |\det A^{-1}(y)|^{\frac{\zeta}{r_1^*}} \left(\int_{B(0,\|A(y)\|.R)} |b(z) - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}|^{\frac{r_1^*}{\zeta}} dz \right)^{\frac{\zeta}{r_1^*}}$$

$$\le |\det A^{-1}(y)|^{\frac{\zeta}{r_1^*}} \frac{|B(0,\|A(y)\|.R)|^{\frac{\zeta}{r_1^*}}}{\omega(B(0,\|A(y)\|.R))^{\frac{1}{r_1^*}}} \left(\int_{B(0,\|A(y)\|.R)} |b(z) - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}|^{r_1^*} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{r_1^*}}.$$

Mặt khác, $\frac{|B(0,\|A(y)\|.R)|}{|B(0,R)|} \simeq \|A(y)\|^Q$. Do vậy

$$\left(\int_{B(0,R)} |b(A(y)x) - b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}|^{r_1} \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{r_1}}$$

$$\lesssim \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}}|\det A^{-1}(y)|^{\frac{\zeta}{r_1^*}}\|A(y)\|^{\frac{Q\zeta}{r_1^*}}$$

$$\times\left(\frac{1}{\omega(B(0,\|A(y)\|.R))}\int_{B(0,\|A(y)\|.R)}|b(z)-b_{\omega,B(0,\|A(y)\|.R)}|^{r_1^*}\omega(z)dz\right)^{\frac{1}{r_1^*}}$$

$$\lesssim \omega(B)^{\frac{1}{r_1}}|\det A^{-1}(y)|^{\frac{\zeta}{r_1^*}}\|A(y)\|^{\frac{Q\zeta}{r_1^*}}.\|b\|_{C\dot{M}O_{\omega}^{r_1^*}(\mathbb{H}^n)}. \tag{4.43}$$

Do đó, từ (4.41) và (4.42) suy ra

$$J_2 \lesssim \omega(B)^{\frac{1}{r_1}}\left(\frac{\|A(y)\|^{Q\zeta}}{|\det A(y)|^{\zeta}}+|\det A^{-1}(y)|^{\frac{\zeta}{r_1^*}}\|A(y)\|^{\frac{Q\zeta}{r_1^*}}\right).\|b\|_{C\dot{M}O_{\omega}^{r_1^*}(\mathbb{H}^n)}. \tag{4.44}$$

Mặt khác, do $\|A(y)\|\simeq 2^{\kappa}$, sử dụng Mệnh đề 1.3 ta được

$$\frac{\omega(B_{2^{\kappa}.R})}{\omega(A(y)B)}\lesssim\left(\frac{|B_{2^{\kappa}.R}|}{|A(y)B(0,R)|}\right)^{\zeta}\lesssim\frac{(2^{\kappa}R)^{Q\zeta}}{|\det A(y)|^{\zeta}R^{Q\zeta}}\simeq\frac{\|A(y)\|^{Q\zeta}}{|\det A(y)|^{\zeta}}.$$

Từ (4.35)-(4.37), ta được

$$\begin{aligned}J_3 &\lesssim \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}}\Big(\max\{\log(2\|A(y)\|),\log\frac{1}{\|A(y)\|}\}+\frac{\omega(B_{2^{\kappa}.R})}{\omega(A(y)B(0,R))}\Big)\big\|b\big\|_{C\dot{M}O_{\omega}^{r_1}(\mathbb{H}^n)}\\ &\lesssim \omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}}\Big(\max\{\log(2\|A(y)\|),\log\frac{1}{\|A(y)\|}\}+\frac{\|A(y)\|^{Q\zeta}}{|\det A(y)|^{\zeta}}\Big)\big\|b\big\|_{C\dot{M}O_{\omega}^{r_1^*}(\mathbb{H}^n)}.\end{aligned}$$

Do vậy, từ (4.27), (4.40) và (4.44), ta có

$$\|b(\cdot)-b(A(y)\cdot)\|_{L_{\omega}^{r_1}(B(0,R))}\lesssim\omega(B(0,R))^{\frac{1}{r_1}}.\psi_1(y).\big\|b\big\|_{C\dot{M}O_{\omega}^{r_1^*}(\mathbb{H}^n)}. \tag{4.45}$$

Bên cạnh đó, bởi (4.19) và ước lượng (4.43) ở trên, dẫn đến

$$\begin{aligned}&\left(\int_{B(0,R)}|f(A(y)x)|^{q_1}\omega(x)dx\right)^{\frac{1}{q_1}}\\ &\lesssim \omega(B(0,R))^{\frac{1}{q_1}}|\det A^{-1}(y)|^{\frac{\zeta}{q_1^*}}\|A(y)\|^{\frac{Q\zeta}{q_1^*}}\omega(B(0,\|A(y)\|.R))^{\frac{-1}{q_1^*}}\|f\|_{L_{\omega}^{q_1^*}(B(0,\|A(y)\|.R))}\\ &=\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q_1}}.\mu_1(y).\omega(B(0,\|A(y)\|.R))^{\frac{-1}{q_1^*}}\|f\|_{L_{\omega}^{q_1^*}(B(0,\|A(y)\|.R))}.\end{aligned}$$

Từ (4.25) và (4.45), bổ đề đã được chứng minh. □

Định lí 4.6. *Cho $1\le q,q_1^*,r_1^*,\zeta<\infty$, $\omega\in A_{\zeta}$ với chỉ số tới hạn r_{ω} cho điều kiện Hölder ngược, $b\in C\dot{M}O_{\omega}^{r_1^*}(\mathbb{H}^n)$, $\lambda\in(-\frac{1}{q_1^*},0)$ và $\delta\in(1,r_{\omega})$.*

Nếu $\frac{1}{q} > \left(\frac{1}{q_1^*} + \frac{1}{r_1^*}\right) \zeta \frac{r_\omega}{r_\omega - 1}$ *và*

$$\mathscr{C}_{17} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q}.\psi_1(y).\mu_1(y) \times$$
$$\times \left(\|A(y)\|^{Q\zeta\lambda}\chi_{\{y\in\mathbb{H}^n:\|A(y)\|\le 1\}} + \|A(y)\|^{Q\frac{(\delta-1)\lambda}{\delta}}\chi_{\{y\in\mathbb{H}^n:\|A(y)\|>1\}}\right)dy < \infty,$$

thì $\mathscr{H}^b_{\Phi,A}$ *bị chặn từ* $\dot{M}^{\lambda,q_1^*}_\omega(\mathbb{H}^n)$ *đến* $\dot{M}^{\lambda,q}_\omega(\mathbb{H}^n)$.

Chứng minh. Với bất kì $R > 0$, từ Bổ đề 4.4 suy ra

$$\frac{1}{\omega(B(0,R))^{\frac{1}{q}+\lambda}}\|\mathscr{H}^b_{\Phi,A}(f)\|_{L^q_\omega(B(0,R))} \lesssim \|b\|_{C\dot{M}O^{r_1^*}_\omega(\mathbb{H}^n)} \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q}.\psi_1(y).\mu_1(y) \times$$
$$\times \left(\frac{\omega(B(0,\|A(y)\|.R))}{\omega(B(0,R))}\right)^\lambda \frac{1}{\omega(B(0,\|A(y)\|.R))^{\frac{1}{q_1^*}+\lambda}}\|f\|_{L^{q_1^*}_\omega(B(0,\|A(y)\|.R))}dy,$$

Mặt khác, vì $\lambda < 0$, từ Mệnh đề 1.3 ta suy ra

$$\left(\frac{\omega(B(0,\|A(y)\|.R))}{\omega(B(0,R))}\right)^\lambda$$
$$\lesssim \begin{cases} \left(\frac{|B(0,\|A(y)\|.R)|}{|B(0,R)|}\right)^{\zeta\lambda} \lesssim \|A(y)\|^{Q\zeta\lambda}, & \text{nếu } \|A(y)\| \le 1, \\ \left(\frac{|B(0,\|A(y)\|.R)|}{|B(0,R)|}\right)^{\frac{(\delta-1)\lambda}{\delta}} \lesssim \|A(y)\|^{Q\frac{(\delta-1)\lambda}{\delta}}, & \text{trường hợp còn lại.} \end{cases}$$
$$= \|A(y)\|^{Q\zeta\lambda}\chi_{\{y\in\mathbb{H}^n:\|A(y)\|\le 1\}} + \|A(y)\|^{Q\frac{(\delta-1)\lambda}{\delta}}\chi_{\{y\in\mathbb{H}^n:\|A(y)\|>1\}}$$

Do đó, ta được

$$\|\mathscr{H}^b_{\Phi,A}f\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_\omega(\mathbb{H}^n)} \lesssim \mathscr{C}_{17}.\|b\|_{C\dot{M}O^{r_1^*}_\omega(\mathbb{H}^n)}\|f\|_{\dot{M}^{\lambda,q_1^*}_\omega(\mathbb{H}^n)}.$$

Định lí đã được chứng minh. □

Kết luận Chương 4

Trong Chương 4, chúng tôi thu được các kết quả sau:

• Trình bày các kết quả về điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian có trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Định lí 4.1), không gian Morrey-Herz (Định lí 4.2).

• Trình bày kết quả về điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ trên không gian tâm Morrey có trọng Muckenhoupt (Định lí 4.3).

• Trình bày các kết quả về điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,A}$ trên các không gian có trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Định lí 4.4), không gian Morrey-Herz (Định lí 4.5)

• Trình bày kết quả về điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,A}$ trên không gian tâm Morrey có trọng Muckenhoupt (Định lí 4.6).

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được

Luận án ước lượng chuẩn, nghiên cứu điều kiện đủ cho tính bị chặn của một số lớp toán tử Hausdorff và giao hoán tử của chúng trên trường thực và nhóm Heisenberg. Các kết quả bao gồm:

1) Đưa ra điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng thuần nhất. Sau đó, có ước lượng chuẩn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ và kết luận mới về ước lượng chuẩn của toán tử Hardy, toán tử Hardy liên hợp cho các không gian trên với trọng lũy thừa. Đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có hai trọng thuần nhất.

2) Ước lượng chuẩn của toán tử Hausdorff đa tuyến tính $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian hàm tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có hai trọng lũy thừa. Sau đó, có kết luận ước lượng chuẩn cho toán tử Hardy-Ceàro đa tuyến tính trên tích các không gian ở trên. Đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian tâm Morrey, không gian Morrey-Herz có hai trọng Muckenhoupt.

3) Đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$, giao hoán tử của toán tử ma trận Hausdorff $\mathscr{H}^b_{\Phi,A}$ trên nhóm Heisenberg với biểu trưng thuộc không gian ℓ-tâm BMO, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng lũy thừa hoặc trọng Muckenhoupt.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở cần được tiếp tục nghiên cứu bao gồm:

1) Tính được chuẩn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ và giao hoán tử $\mathscr{H}^{b}_{\Phi,\Omega}$ với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz, trên các không gian hàm kiểu Morrey-Herz có trọng thuần nhất. Thiết lập được mối liên hệ giữa toán tử tích phân kì dị và toán tử Hausdorff.

2) Tính được chuẩn của giao hoán tử toán tử Hausdorff đa tuyến tính $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$, với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz, trên tích các không gian kiểu Morrey-Herz có hai trọng Muckenhoupt.

3) Tính được chuẩn của một số lớp toán tử Hausdorff trên nhóm Heisenberg, trên các không gian kiểu Morrey-Herz có hai trọng lũy thừa hoặc trọng Muckenhoupt.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ

[1] N. M. Chuong, D. V. Duong, N. D. Duyet, (2020), Weighted Morrey-Herz space estimates for rough Hausdorff operator and its commutators, *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.* Vol. 11, No. 2, 753–787. (SCIE)

[2] N. M. Chuong, D. V. Duong, N. D. Duyet, (2020), Two Weighted estimates for multilinear Hausdorff Operators on the Morrey-Herz Spaces, *Adv. Oper. Theory.* Vol. 5, No. 4, 1780–1813. (ESCI/Scopus)

[3] N. M. Chuong, D. V. Duong, N. D. Duyet, (2020), Weighted Estimates for Commutators of Hausdorff Operators on the Heisenberg Group, *Russian Mathematics.* Vol. 64, No. 2, 35–55. (ESCI/Scopus)

Tài liệu tham khảo

[1] J. Alvarez, J. Lakey, M. Guzmán-Partida, (2000), Spaces of bounded λ-central mean oscillation, Morrey spaces, and λ-central Carleson measures, *Collect. Math.* 51(1), 1–47.

[2] K. F. Andersen, B. Muckenhoupt, (1982), Weighted weak type Hardy inequalities with applications to Hilbert transforms and maximal functions, *Studia Math.* 72(1), 9–26.

[3] K. Andersen, E. Sawyer, (1988), Weighted norm inequalities for the Riemann-Liouville and Weyl fractional integral operators, *Trans. Amer. Math. Soc.* 308, 547–558.

[4] K. F. Andersen, (2003), Boundedness of Hausdorff operators on $L^p(\mathbb{R}^n)$, $H^1(\mathbb{R}^n)$, and $BMO(\mathbb{R}^n)$, *Acta Sci. Math. (Szeged)*. 69, No. 1, 409–418.

[5] R. Bandaliyev, P. Gorka, (2019), Hausdorff operator in Lebesgue spaces, *Math. Inequal. Appl.* 22, 657–676 .

[6] G. Brown, F. Móricz, (2002), Multivariate Hausdorff operators on the spaces $L^p(\mathbb{R}^n)$, *J. Math. Anal. Appl*. 271, 443–454.

[7] V. I. Burenkov, E. Liflyand, (2020), Hausdorff operators on Morrey-type spaces. *Kyoto J. Math*. 60, 93–106.

[8] A. P. Calderón, (1965), Commutators of singular integral operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A*. 53, 1092–1099.

[9] N. M. Chuong, D. V. Duong, H. D. Hung, (2016), Bounds for the weighted Hardy–Cesàro operator and its commutator on Morrey–Herz type spaces, *Z. Anal. Anwend*. 35, 489–504.

[10] N. M. Chuong, D. V. Duong, K. H. Dung, (2019), Some estimates for p-adic rough multilinear Hausdorff operators and commuta-

tors on weighted Morrey-Herz type spaces, *Russian J. Math. Phys.* 26, No. 1, 9–31.

[11] J. Chen, J. Dai, D. Fan, X. Zhu, (2018), Boundedness of Hausdorff operators on Lebesgue spaces and Hardy spaces, *Sci. China Math.* 61, 1647–1664.

[12] J. Chen, D. Fan, J. Li, (2012), Hausdorff operators on function spaces, *Chin. Ann. Math.* 33B, 537–556.

[13] M. Christ, L. Grafakos, (1995), Best constants for two non-convolution inequalities, *Proc. Amer. Math. Soc.* 123, 1687–1693.

[14] N. M. Chuong, H. D. Hung, (2014), Bounds of weighted Hardy-Cesáro operators on weighted Lebesgue and BMO spaces, *Integral Transforms Spec. Funct.* 25, 697–710.

[15] N. M. Chuong, N. T. Hong, H. D. Hung, (2017), Multilinear Hardy–Cesàro operator and commutator on the product of Morrey–Herz spaces, *Analysis Math*. 43, 547–565.

[16] N. M. Chuong, D. V. Duong, K. H. Dung, (2019), Multilinear Hausdorff operator on variable exponent Morrey–Herz type spaces, *Integral Transforms Spec Funct*. 31(1), 62–86.

[17] N. M. Chuong, D. V. Duong, K. H. Dung, (2019), Two-weighted inequalities for Hausdorff operators in Herz-type Hardy spaces, *Math. Notes*. 106, 20–37.

[18] N. M. Chuong, D. V. Duong, (2013), Weighted Hardy–Littlewood operators and commutators on p-adic functional spaces, *p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl*. 5, 65–82.

[19] N. M. Chuong, D. V. Duong, (2016), The p-adic weighted Hardy–Cesàro operators on weighted Morrey–Herz space, *p-Adic Numbers, Ultrametric Anal. Appl*. 8, 204–216.

[20] N. M. Chuong, D. V. Duong, K. H. Dung, (2019), Weighted Lebesgue and central Morrey estimates for p-adic multilinear Hausdorff operators and its commutators, *Ukrain Mat. Zh*, to appear.

[21] J. Y. Chu, Z. W. Fu, Q. Y. Wu, (2016), L^p and BMO bounds for weighted Hardy operators on the Heisenberg group, *J. Inequal. Appl.* 282.

[22] C. Lebrun, M. Fosset, (1984), Moyennes et quotients de Taylor dans BMO, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liége*. 53, 85–87.

[23] R. R. Coifman, R. Rochberg, G. Weiss, (1976), Factorization theorems for Hardy spaces in several variables, *Ann. of Math.* 103(2), 611–635.

[24] R. R. Coifman, G. Weiss, (1977), Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, *Bull. Amer. Math. Soc*. 83(4), 569–645.

[25] R. R. Coifman, Y. Meyer, (1975), On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals, *Trans. Amer. Math. Soc*. 212, 315–331.

[26] N. M. Chuong, (2018), *Pseudodifferential Operators And Wavelets Over Real And p-adic Fields*, Springer-Basel.

[27] N. M. Chuong, D. V. Duong, K. H. Dung, (2018), Weighted norm inequalities for rough Hausdorff operator and its commutators on the Heisenberg group, (*submitted*).

[28] H. J. Dong, D. Y. Kim, (2010), Elliptic equations in divergence form with partially BMO coefficients, *Arch. Rational Mech. Anal.* 196(1), 25–70.

[29] D. E. Edmunds, W. D. Evans, (2004), *Hardy Operators, Function Spaces And Embeddings*, Springer-Verlag, Berlin.

[30] Z. W. Fu, S. L. Gong, S. Z. Lu, W. Yuan, (2015), Weighted multilinear Hardy operators and commutators, *Forum Math.* 27, 2825–2851.

[31] Z. W. Fu, S. Z. Lu, (2008), A remark on weighted Hardy-Littlewood averages on Herz-type spaces, *Adv. Math. (China)*. 37, 632–636.

[32] Z. W. Fu, S. Z. Lu, F. Y. Zhao, (2011), Commutators of n-dimensional rough Hardy operators, *Sci. China Math.* 54, 95–104.

[33] G. B. Folland, (1999), *Real Analysis: Modern Techniques And Their Applications*, A Wiley-Interscience Publication.

[34] Z. W. Fu, Z. G. Liu, S. Z. Lu, (2009), Commutators of weighted Hardy operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* 137(10), 3319–3328.

[35] G. Gao, (2012), Boundedness for commutators of n-dimensional rough Hardy operators on Morrey-Herz spaces, *Comput. Math. Appl.* 64, 544–549.

[36] L. Grafakos, (2008), *Modern Fourier Analysis*, Second Edition, Springer.

[37] L. Grafakos, S. M. Smith, (1997), Best constants for uncentred maximal functions, *Bull. Lond. Math. Soc.* 29(1),60–64.

[38] A. Gogatishvili, V. D. Stepanov, (2013), Reduction theorems for weighted integral inequalities on the cone of monotone functions, *Uspekhi Mat. Nauk*. 68, 3–68 (2013)(Russian) English transl. in Russian Math. Surveys, 68, 597–664.

[39] J. H. Guo, (2015), Hausdorff Operators on the Heisenberg Group, *Acta Math. Sin, Engl. Ser*. 31(11), 1703–1714.

[40] G. H. Hardy, (1920), Note on a theorem of Hilbert, *Math Z.* 6, 314–317.

[41] G. H. Hardy, (1949), *Divergent Series*, Oxford University Press, Oxford.

[42] A. Hussain, G. Gao, (2013), Multidimensional Hausdorff operators and commutators on Herz-type spaces, *J. Ineq. Appl.* 2013: 594, 12 pages.

[43] A. Hussain, M. Ahmed, (2017), Weak and strong estimates for the commutators of Hausdorff operators, *Math. Ineq. Appl.* 20, 49–56.

[44] T. Hytönen, C. P. érez, E. Rela, (2012), Sharp reverse Hölder property for A_∞ weights on spaces of homogeneous type, *J. Funct. Anal.* 263, 3883–3899.

[45] C. Herz, (1968), Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms, *J. Math. Mech.* 18, 283–324.

[46] H. D. Hung, L. D. Ky, (2015), New weighted multilinear operators and commutators of Hardy–Cesàro type, *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed*. 35, 1411–1425.

[47] H. D. Hung, (2014), The p-adic weighted Hardy-Cesàro operator and an application to discrete Hardy inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* 409, 868–879.

[48] S. Indratno, D. Maldonado, S. Silwal, (2015), A visual formalism for weights satisfying reverse inequalities, *Expo. Math*. 33, 1–29.

[49] Y. Kanjin, (2001), The Hausdorff operators on the real Hardy spaces $H^p(\mathbb{R})$, *Studia Math.* 148, 37–45.

[50] Y. Komori, S. Shirai, (2009), Weighted Morrey spaces and a singular integral operator, *Math. Nachr.* 282(2), 219–231.

[51] J. C. Kuang, (2012), Generalized Hausdorff operators on weighted Morrey–Herz spaces (in Chinese), *Acta Math. Sinica (Chin. Ser.)* 55, 895–902.

[52] S. Lu, Y. Ding, D. Yan, (2007), *Singular Integrals And Related Topics*, World Scientific Publishing Company, Singapore.

[53] D. Lukkassena, A. Meidella, L. E. Persson, N. Samko, (2012), Hardy and singular operators in weighted generalized Morrey spaces with applications to singular integral equations, *Math. Meth. Appl. Sci.* 35, 1300–1311.

[54] A. Lerneran, E. Liflyand, (2007), Multidimensional Hausdorff operators on real Hardy spaces, *J. Austr. Math. Soc*. 83, 79–86.

[55] E. Liflyand, (2008), Boundedness of multidimensional Hausdorff operators on $H^1(\mathbb{R}^n)$, *Acta. Sci. Math. (Szeged)*. 74, 845–851.

[56] E. Liflyand, (2013), Hausdorff operators on Hardy spaces, *Eurasian Math. J.* 4(4), 101–141.

[57] E. Liflyand, F. Móricz, (2000), The Hausdorff operator is bounded on the real Hardy space $H^1(\mathbb{R})$, *Proc. Amer. Math. Soc*. 128, 1391–1396.

[58] E. Liflyand, A. Miyachi, (2009), Boundedness of the Hausdorff operators in H^p spaces,$0 < p < 1$, *Studia Math.* 194, 279–292.

[59] E. Liflyand, A. Miyachi, (2019), Boundedness of multidimensional Hausdorff operators in H^p spaces, $0 < p < 1$, *Trans. Amer. Math. Soc.* 371, 4793–4814.

[60] E. Liflyand, (2019), Hardy type inequalities in the category of Hausdorff operators, Modern methods in operator theory and harmonic analysis, *Springer Proc. Math. Stat.* 291, Springer, Cham., 81–91.

[61] S. Z. Lu, L. F. Xu, (2005), Boundedness of rough singular integral operators on the homogeneous Morrey-Herz spaces, *Hokkaido Math. J.* 34, 299–314.

[62] S. Z. Lu, D. C. Yang, (1995), The weighted Herz-type Hardy space and its Applications, *Beijing Sci. China Ser. A*. 38, 662–673.

[63] S. Z. Lu, D. C. Yang, G. E. Hu, (2008), *Herz type spaces and their applications*, Beijing Sci. Press, Beijing.

[64] D. Melas, (2003), The best constant for the centered Hardy–Littlewood maximal inequality, *Annals of Mathematics*. 157, 647–688.

[65] A. Miyachi, (2004), Boundedness of the Cesàro operator in Hardy space, *J. Fourier Anal. Appl.* 10, 83–92.

[66] C. B. Morrey, (1938), On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 43, 126–166.

[67] F. Móricz, (2005), Multivariate Hausdorff operators on the spaces $H^1(\mathbb{R}^n)$ and $BMO(\mathbb{R}^n)$, *Analysis Math.* 31, 31–41.

[68] B. Muckenhoupt, (1972), Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc*. 165, 207–226.

[69] N. Samko, (2009), Weighted Hardy and singular operators in Morrey spaces, *J. Math. Anal. Appl*. 250, 56–72.

[70] G. O. Okikiolu, (1971), *Aspects Of The Theory Of Bounded Integral Operators In L^p-Spaces*, Academic Press, London, New-York.

[71] J. Ruan, D. Fan, (2016), Hausdorff operators on the power weighted Hardy spaces, *J. Math. Anal. Appl*. 433, 31–48.

[72] J. Ruan, D. Fan, Q. Wu, (2017), Weighted Herz space estimates for Hausdorff operators on the Heisenberg group, *Banach J. Math. Anal.* 11(3), 513–535.

[73] J. Ruan, D. Fan, Q. Wu, (2019), Weighted Morrey estimates for Hausdorff operator and its commutator on the Heisenberg group, *Math. Inequal. Appl.* 22(1), 303–329.

[74] K. S. Rim, J. Lee, (2006), Estimates of weighted Hardy-Littlewood averages on the p-adic vector space, *J. Math. Anal. Appl.* 324(2), 1470–1477.

[75] P. Sjögren, F. Soria, (1997), Rough maximal functions and rough singular integral operators applied to integrable radial functions, *Rev. Mat. Iberoamericana*. 13, 1–18.

[76] E. M. Stein, (1993), *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality And Oscillatory Integrals*, Princeton University Press. Princeton.

[77] Y. Z. Sun, C. Wang, Z. F. Zhang, (2011), A Beale-Kato-Majda blow up criterion for the 3-D compressible Navier-Stokes equations, *J. Math. Pures Appl.* 95(1), 36–47.

[78] C. Tang, F. Xue, Y. Zhou, (2011), Commutators of weighted Hardy operators on Herz-type spaces, *Annales Polonici Mathematici.* 101(3), 267–273.

[79] S. Thangavelu, (1998), *Harmonic Analysis On The Heisenberg Group*, Birkhäuser, Boston.

[80] S. S. Volosivets, (2013), Hausdorff operators on p-adic linear spaces and their properties in Hardy, BMO, and Hölder spaces, *Mathematical Notes.* 93(3-4), 382–391.

[81] S. S. Volosivets, (2017), Weighted Hardy and Cesàro operators on Heisenberg group and their norms, *Integr. Transforms And Special Funct.* 28(12), 940–952.

[82] Q. Wu, D. Fan, (2017), Hardy space estimates of Hausdorff operators on the Heisenberg group, *Nonlinear Analysis.* 164, 135–154.

[83] Q. Wu, Z. Fu, (2016), Sharp estimates for Hardy operators on Heisenberg group, *Front. Math. China.* 11(1), 155–172.

[84] J. Xiao, (2001), L^p and BMO bounds of weighted Hardy-Littlewood Averages, *J. Math. Anal. Appl*. 262, 660–666.

[85] A. Zygmund, (1960), Trigonometric series, *Bull. Amer. Math. Soc*. 66, 6–12.