BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

NGUYỄN ĐỨC DUYỆT

TÍNH BỊ CHẶN CỦA TOÁN TỬ LOẠI HAUSDORFF TRÊN MỘT SỐ KHÔNG GIAN HÀM

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Toán giải tích**
Mã số: **9 46 01 02**

Hà Nội, 2021

Công trình được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2

Người hướng dẫn khoa học: GS. TSKH Nguyễn Minh Chương

TS Nguyễn Văn Tuấn

Phản biện 1: ....
....

Phản biện 2: ....
....

Phản biện 3: ....
....

Luận án sẽ được bảo vệ tại Hội đồng chấm luận án tiến sĩ cấp Trường họp tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 vào hồi ... giờ ... ngày ... tháng ... năm 2021.

Có thể tìm hiểu luận án tại:

- Thư viện Quốc gia Việt Nam;
- Thư viện Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2.

MỞ ĐẦU

1. Lịch sử vấn đề và lí do chọn đề tài

Một trong những chủ đề quan trọng của giải tích điều hòa là nghiên cứu tính bị chặn của các toán tử T trên các không gian. Cụ thể hơn, chúng ta có bài toán chứng minh bất đẳng thức

$$\|Tf\|_Y \leq C\|f\|_X, \tag{1}$$

ở đó C là hằng số dương, và X, Y là hai không gian với chuẩn tương ứng $\|\cdot\|_X$ và $\|\cdot\|_Y$. Để thấy được tầm quan trọng của bài toán này, chúng ta nhắc lại một số bài toán quan trọng sau.

• Định lý khả vi Lebesgue phát biểu rằng: với mọi hàm khả tích địa phương f trong không gian $\mathbb{R}^n$, chúng ta có

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x),$$

với hầu khắp x trong $\mathbb{R}^n$. Để chứng minh bài toán này, người ta nghiên cứu hàm cực đại Hardy–Littlewood có tâm sau đây

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy,$$

và chứng minh rằng hàm cực đại Hardy–Littlewood có tâm là bị chặn yếu $(1,1)$. Chúng ta cũng có định nghĩa hàm cực đại Hardy–Littlewood như sau

$$\mathscr{M}f(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|dy,$$

trong đó sup được lấy trên tất cả các hình cầu B trong không gian $\mathbb{R}^n$.

• Xét bài toán Dirichlet sau đây

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}^2 u(x,t) + \partial_t^2 u(x,t) = 0, & \text{với} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = f(x), & \text{hầu khắp} \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

trong đó f thuộc không gian $L^p(\mathbb{R}^n)$ với $1 \leq p < \infty$. Để giải bài toán này, người ta xét

$$u(x,t) = (f * P_t)(x),$$

trong đó $P_t(x) = t^{-n}P(t^{-1}x)$, và

$$P(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

là hạch Poisson. Rõ ràng $P_t(x_1, ..., x_n, t)$ là hàm điều hòa theo các biến $(x_1, ..., x_n, t)$, nghĩa là

$$\sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 P_t + \frac{d^2}{dt^2} P_t = 0.$$

Do đó hàm $u(x,t)$ cũng là một hàm điều hòa trong không gian $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ và hội tụ đến f trong không gian $L^p(\mathbb{R}^n)$ khi t dần về 0. Để giải quyết bài toán Dirichlet bên trên, ta còn chỉ ra sự hội tụ từng điểm hầu khắp của $u(x,t)$ về f khi t tiến về 0. Tuy nhiên, điều này dễ dàng nhận được từ bất đẳng thức

$$\sup_{t>0} |u(x,t)| \leq \mathscr{M} f(x),$$

và tính bị chặn yếu (p,p) của hàm cực đại Hardy–Littlewood.

• Chúng ta xét thêm một bài toán Cauchy cho phương trình Schrödinger như sau

$$\begin{cases} i\partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Như chúng ta biết, nghiệm $u(x,t)$ của bài toán này được cho bởi công thức $u(x,t) = (e^{-it\Delta}u_0)(x)$, ở đó $u(x,t) = (e^{-it\Delta}u_0)(x)$ xác định thông qua biến đổi Fourier

$$(\widehat{e^{-it\Delta}u_0})(\xi) = e^{it|\xi|^2}\hat{u_0}(\xi).$$

Để nghiên cứu tính chính quy nghiệm, chúng ta cần đánh giá

$$\|e^{-it\Delta}(u_0 - v_0)\|_Y \leq C\|u_0 - v_0\|_X,$$

Do đó, ta đưa bài toán về việc xét tính bị chặn của toán tử tuyến tính $e^{-it\Delta}$ thông qua bất đẳng thức

$$\|e^{-it\Delta}f\|_Y \leq C\|f\|_X.$$

Qua các trường hợp trên, chúng ta thấy được phần nào tầm quan trọng của việc nghiên cứu tính bị chặn của toán tử, trên các không gian để giải các bài toán trong giải tích hay trong lĩnh vực phương trình đạo hàm riêng.

Ngoài việc chứng minh bất đẳng thức (1), bài toán quan trọng và thú vị nữa là đưa ra các điều kiện cần và đủ để bất đẳng thức (1) đúng, và nếu có thể, xác định hằng số C tốt nhất. Với một số lớp toán tử quan trọng trong giải tích điều hòa, chẳng hạn như các hàm cực đại Hardy–Littlewood, đây là một bài rất khó. Chẳng hạn, có thể xem L. Grafakos và S. Montgomery-Smith (1997), D. Melas (2003) và các tài liệu trích dẫn bên trong đó.

Năm 1920, G. H. Hardy đã thiết lập một bất đẳng thức tích phân

$$\|\mathscr{H}f\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^+)},$$

với $1 < p < \infty$ và f là hàm đo được không âm trên $(0;\infty)$. Hơn nữa, hằng số $\frac{p}{p-1}$ thu được là tốt nhất. Ở đây, $\mathscr{H}$ là toán tử Hardy được định nghĩa bởi

$$\mathscr{H}f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Bất đẳng thức Hardy và các dạng mở rộng của chúng giữ một vai trò quan trọng trong lý thuyết phương trình đạo hàm riêng, lý thuyết xấp xỉ, lý thuyết các không gian phiếm hàm (xem K. F. Andersen và B. Muckenhoupt (1982), D. E. Edmunds và W. D. Evans (2004), D. Lukkassena, A. Meidella, L. E. Persson và N. Samko (2012)).

Một trong những toán tử quan trọng trong giải tích điều hòa là toán tử Hausdorff mà liên quan mật thiết đến bài toán về tính khả tổng của chuỗi Fourier cổ điển. Cho Φ là hàm khả tích địa phương trên $(0,\infty)$. Toán tử Hausdorff một chiều được định nghĩa như sau

$$\mathscr{H}_\Phi f(x) = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) dt. \tag{2}$$

Rõ ràng, khi chọn $\Phi(t) = \frac{\chi_{(1,\infty)}(t)}{t}$, toán tử Hausdorff trở thành toán tử Hardy bên trên. Hơn nữa, với các hàm Φ thích hợp, toán tử Hausdorff trở thành một số toán tử quan trọng trong giải tích như: toán tử Cesàro, toán tử Hardy–Littlewood–Pólya, toán tử tích phân phân số Riemann–Liouville (xem K. Andersen và E. Sawyer (1988), J. Chen, D. Fan và J. Li (2012), M. Christ và L. Grafakos (1995), Z. W. Fu, S. L. Gong, S. Z. Lu và W. Yuan (2015), A. Miyachi (2004)).

Toán tử Hausdorff được mở rộng đến không gian $\mathbb{R}^n$ bởi Brown và Móricz (2002), độc lập nghiên cứu là A. Lerneran và E. Liflyand (2007). Cụ thể hơn, cho φ là một hàm khả tích địa phương trên không gian $\mathbb{R}^n$. Toán tử Hausdorff $\mathscr{H}_{\varphi,A}$ tương ứng với hàm hạch φ được định nghĩa bởi

$$\mathscr{H}_{\varphi,A}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t) f(A(t)x) dt, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó $A(t)$ là một ma trận vuông cấp n thỏa mãn $\det A(t) \neq 0$ với hầu khắp t thuộc giá của φ. Nếu lấy ma trận $A(t)$ và hàm φ thích hợp thì $\mathscr{H}_{\varphi,A}$ sẽ trở thành một số toán tử quen thuộc trong giải tích. Chi tiết hơn xem bài báo tổng quan E. Liflyand (2013) và các tài liệu tham khảo được trích dẫn bên trong đó.

Trong những năm gần đây, toán tử Hausdorff và các giao hoán tử của chúng, kể cả trường hợp tuyến tính và đa tuyến tính đã được nhiều nhà toán học trong nước và trên thế giới quan tâm nghiên cứu. Chi tiết hơn, có thể tham khảo trong các công trình K. F. Andersen (2003), R. Bandaliyev và P. Gorka (2019), G. Brown và F. Móricz (2002), E. Liflyand và cộng sự (2007, 2020), N. M. Chuong, D. V. Duong và K. H. Dung (2018, 2019), J. Chen, D. Fan và các cộng sự (2012, 2017, 2018), J. H. Guo (2015), A. Hussain và cộng sự (2013, 2017), Y. Kanjin (2001), J. C. Kuang (2012), S. S. Volosivets (2013, 2017).

2. Mục đích nghiên cứu

Luận án này nghiên cứu điều kiện đủ cho tính bị chặn, ước lượng chuẩn của một số lớp toán tử Hausdorff và giao hoán tử của chúng trên trường thực và nhóm Heisenberg. Hơn nữa, chúng tôi ước lượng được chuẩn của toán tử trong mỗi trường hợp.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của Luận án là lớp toán tử Hausdorff và giao hoán tử của chúng trên trường thực và nhóm Heisenberg. Phạm vi nghiên cứu thể hiện thông qua các nội dung sau:

• **Nội dung 1:** Chúng tôi nghiên cứu điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz. Hơn nữa, chúng tôi đánh giá được tính bị chặn cho giao hoán tử của toán tử rough Hausdorff trên không gian có hai trọng kiểu Morrey-Herz với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz.

• **Nội dung 2:** Chúng tôi nghiên cứu điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff đa tuyến tính $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian có hai trọng mũ và hai trọng Muckenhoupt như không gian Morrey, không gian Herz và không gian Morrey-Herz.

• **Nội dung 3:** Chúng tôi nghiên cứu điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử của toán tử rough Hausdorff $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ và giao hoán tử của toán tử Hausdorff ma trận $\mathscr{H}^b_{\Phi,A}$ trên nhóm Heisenberg với biểu trưng thuộc không gian ℓ-tâm BMO có trọng, trên các không gian Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng thuần nhất hoặc trọng Muckenhoupt.

4. Phương pháp nghiên cứu

• Để nghiên cứu tính bị chặn của toán tử Hausdorff trên trường số thực và nhóm Heisenberg, chúng tôi dựa vào các phương pháp được Coifman-Rochberg-Weiss (1976) xây dựng trên các không gian thuần nhất với các biến đổi đặc trưng của trọng lũy thừa và trọng Muckenhoupt. Chiều ngược lại, chúng tôi sử dụng lược đồ mà Xiao (2001) đã phát triển. Trong đó, các hàm thử được lựa chọn để đưa ra các ước lượng dưới cho chuẩn của toán tử.

• Đối với các nghiên cứu về giao hoán tử, dựa trên phương pháp nổi tiếng của Coifman-Rochberg-Weiss (1976). Trong đó, mấu chốt là đưa về ước lượng giao động trung bình kết hợp với một số kĩ thuật đặc trưng được khi tiếp cận toán tử Hausdorff được xây dựng bởi D. Fan, Chen, Li, Fu, Lu và các cộng sự (2011, 2012, 2018).

5. Kết quả của luận án

Luận án đã đạt được các kết quả chính sau đây:

• Nghiên cứu điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng thuần nhất. Ngoài ra, chúng tôi ước lượng được chuẩn của toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ và kết luận mới về ước lượng chuẩn của toán tử Hardy, toán tử Hardy liên hợp cho các không gian trên với trọng lũy thừa. Hơn nữa, chúng tôi đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}^{b}_{\Phi,\Omega}$ với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có hai trọng thuần nhất. Đó là nội dung chính của Chương 2.

• Ước lượng được chuẩn của toán tử Hausdorff đa tuyến tính $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có hai trọng lũy thừa. Ngoài ra, chúng tôi ước lượng được chuẩn của toán tử Hardy-Ceàro đa tuyến tính trên tích các không gian ở trên. Hơn nữa, đưa ra được điều kiện đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff đa tuyến tính $\mathcal{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian tâm Morrey, không gian Morrey-Herz có hai trọng Muckenhoupt. Đó là nội dung chính của Chương 3.

• Nghiên cứu điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử toán tử Hausdorff thô $\mathcal{H}^b_{\Phi,\Omega}$ trên nhóm Heisenberg với biểu trưng thuộc không gian ℓ-tâm BMO, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng lũy thừa hoặc trọng Muckenhoupt. Đồng thời, chúng tôi đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử toán tử ma trận Hausdorff $\mathcal{H}^b_{\Phi,A}$ trên nhóm Heisenberg với biểu trưng thuộc không gian ℓ-tâm BMO, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng lũy thừa hoặc trọng Muckenhoupt. Đó là nội dung chính của Chương 4.

6. Cấu trúc của luận án

Ngoài phần mở đầu, kết luận, kiến nghị, danh mục các công trình công bố và danh mục tài liệu tham khảo. Luận án gồm 4 chương:

• Chương 1 trình bày kiến thức chuẩn bị;

• Chương 2 nghiên cứu tính bị chặn của toán tử Hausdorff thô và giao hoán tử của nó trên các không gian kiểu Morrey-Herz;

• Chương 3 nghiên cứu ước lượng chuẩn cho toán tử Hausdorff đa tuyến tính trên các không gian kiểu Morrey-Herz có hai trọng;

• Chương 4 nghiên cứu tính bị chặn của hai loại giao hoán tử của toán tử Hausdorff trên nhóm Heisenberg.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả sẽ được sử dụng trong toàn bộ luận án.

1.1. Không gian Lebesgue

Trong mục này, chúng tôi nhắc đến không gian Lebesgue, Định lí hội tụ Lebesgue, bất đẳng thức Hölder, bất đẳng thức Minkowski, Định lí Fubini.

1.2. Một số kí hiệu và các không gian hàm

Trong mục này, chúng tôi giải thích một số kí hiệu và nhắc lại định nghĩa về các không gian kiểu Morrey-Herz có trọng.

1.3. Trọng thuần nhất, trọng lũy thừa và trọng Muckenhoupt

Trong mục này, chúng tôi nhắc đến trọng thuần nhất, trọng lũy thừa, trọng Muckenhoupt và các Bổ đề, Mệnh đề quan trọng liên quan.

1.4. Nhóm Heisenberg

Trong mục này, chúng tôi nhắc đến nhóm Heisenberg $\mathbb{H}^n$, không gian ℓ-tâm BMO trên $\mathbb{H}^n$.

Chương 2

TOÁN TỬ HAUSDORFF THÔ $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ VÀ GIAO HOÁN TỬ $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ TRÊN KHÔNG GIAN KIỂU MORREY-HERZ

Trong chương này, chúng tôi đưa ra điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff thô (rough Hausdorff) $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng thuần nhất. Sau đó, có ước lượng chuẩn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ và kết luận mới về ước lượng chuẩn của toán tử Hardy, toán tử Hardy liên hợp cho các không gian trên với trọng lũy thừa. Đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có hai trọng thuần nhất.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo [1] trong danh mục công trình đã công bố.

2.1. Giới thiệu

Vấn đề nghiên cứu là ước lượng chuẩn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ và tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian kiểu Morrey-Herz.

2.2. Toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ và lớp trọng lũy thừa

Trong mục này, chúng tôi trình bày kết quả về điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian có trọng thuần nhất như: không gian tâm Morrey (Định lí 2.1), không gian Herz (Định lí 2.2), không gian Morrey-Herz (Định lí 2.3).

Định lí 2.1. *Cho* $1 \le q < \infty, 1 + \lambda q > 0, \lambda \in \mathbb{R}, \gamma > -n$ *và* $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$.

i) Nếu $\omega(x') \geq c > 0$ với mọi $x' \in S_{n-1}$ và

$$\mathscr{C}_1 = \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1+(n+\gamma)\lambda}} dt < \infty,$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $\dot{M}^{\lambda,q}_\omega(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa,

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_\omega(\mathbb{R}^n)\to\dot{M}^{\lambda,q}_\omega(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\mathscr{C}_1.$$

ii) Ngược lại, giả sử $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1}, \omega(x')d\sigma(x'))$, Φ là hàm thực với dấu không đổi trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó nếu $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $\dot{M}^{\lambda,q}_\omega(\mathbb{R}^n)$ thì $\mathscr{C}_1 < \infty$. Hơn nữa, chúng ta có

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_\omega(\mathbb{R}^n)\to\dot{M}^{\lambda,q}_\omega(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{\|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})}}{\|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}}.\mathscr{C}_1.$$

Định lí 2.2. *Cho $1 \leq p,q < \infty, \alpha \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}$ và $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$.*
i) Nếu $\omega(x') \geq c > 0$ với mọi $x' \in S_{n-1}$ và

$$\mathscr{C}_2 = \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha}} dt < \infty,$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa,

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)\to\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\mathscr{C}_2.$$

ii) Ngược lại, giả sử $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1}, \omega(x')d\sigma(x'))$, Φ là hàm thực có dấu không đổi trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó, nếu $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)$ thì $\mathscr{C}_2 < \infty$. Hơn nữa, chúng ta có

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)\to\dot{K}^{\alpha,p,q}_\omega(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{\|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})}}{\|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}}.\mathscr{C}_2.$$

Định lí 2.3. *Cho $0 < p < \infty, 1 \leq q < \infty, \alpha \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}, \lambda > 0$ và $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$.*
i) Nếu $\omega(x') \geq c > 0$ với mọi $x' \in S_{n-1}$ và

$$\mathscr{C}_3 = \int_0^\infty \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}} dt < \infty,$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa,

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\mathscr{C}_3.$$

ii) Ngược lại, giả sử $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1}, \omega(x')d\sigma(x'))$, Φ là hàm thực với dấu không đổi trên $\mathbb{R}^n$. Khi đó nếu $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ thì $\mathscr{C}_3 < \infty$. Hơn nữa, chúng ta có

$$\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{\|\Omega\|^{q'}_{L^{q'}(S_{n-1})}}{\|\Omega\|^{\frac{q'}{q}}_{L^{q'}(S_{n-1},\omega(x')d\sigma(x'))}}.\mathscr{C}_3.$$

Từ đó, chúng tôi đưa ra các Hệ quả về ước lượng chuẩn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian có trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Hệ quả 2.1), không gian Herz (Hệ quả 2.2), không gian Morrey-Herz (Hệ quả 2.3).

Hệ quả 2.1. *Cho $1 \leq q < \infty, 1 + \lambda q > 0$ và $\lambda \in \mathbb{R}$. Giả sử $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$, $\omega(x) = |x|^{\gamma}$ với $\gamma > -n$ và Φ là hàm bán kính không âm. Khi đó, $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{1.1} = \int_0^{\infty} \frac{\Phi(t)}{t^{1+(n+\gamma)\lambda}} dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to\dot{M}^{\lambda,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\mathscr{C}_{1.1}$.

Hệ quả 2.1 là mở rộng và củng cố lại các kết quả của Chen, Fan và Li (2012).

Hệ quả 2.2. *Cho $1 \leq p, q < \infty, \alpha \in \mathbb{R}$, $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$ và $\omega(x) = |x|^{\gamma}$ với $\gamma \in \mathbb{R}$. Giả sử Φ là hàm bán kính không âm. Khi đó, $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ bị chặn trên $\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{2.1} = \int_0^{\infty} \frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha}} dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)\to\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\mathscr{C}_{2.1}$.

Hệ quả 2.2 là mở rộng của Định lí 3.1 của Chen, Fan và Li (2012) trên không gian Lebesgue với trọng lũy thừa.

Hệ quả 2.3. *Cho* $0 < p < \infty, 1 \leq q < \infty, \alpha \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}$ *và* $\lambda > 0$. *Giả sử* $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$, $\omega(x) = |x|^\gamma$ *và* Φ *là hàm bán kính không âm. Khi đó,* $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ *bị chặn trên* $M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{3.1} = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}} dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)\to M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \|\Omega\|_{L^{q'}(S_{n-1})}.\mathscr{C}_{3.1}$.

Đặc biệt, chúng tôi đạt được kết luận mới về bất đẳng thức cho toán tử Hardy và toán tử Hardy liên hợp nhiều chiều là mở rộng các kết quả của Christ và Grafakos (1995), trên các không gian có trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Hệ quả 2.4), không gian Herz (Hệ quả 2.5), không gian Morrey-Herz (Hệ quả 2.6).

Hệ quả 2.4. *Cho* $1 \leq q < \infty, 1 + \lambda q > 0, \lambda \in \mathbb{R}$, *và* $\omega(x) = |x|^\gamma$ *với* $\gamma > -n$. *Khi đó, toán tử Hardy bị chặn trên* $\dot{M}_{\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{1.2} = \int_1^\infty \frac{1}{t^{n+1+(n+\gamma)\lambda}} dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}\|_{\dot{M}_{\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)\to \dot{M}_{\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{1.2}$. *Tương tự, toán tử Hardy liên hợp bị chặn trên* $\dot{M}_{\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{1.3} = \int_0^1 \frac{1}{t^{1+(n+\gamma)\lambda}} dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}^\star\|_{\dot{M}_{\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)\to \dot{M}_{\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{1.3}$.

Hệ quả 2.5. *Cho* $1 \leq p, q < \infty, \alpha \in \mathbb{R}$ *và* $\omega(x) = |x|^\gamma$ *với* $\gamma \in \mathbb{R}$. *Khi đó, toán tử Hardy bị chặn trên* $\dot{K}_{\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{2.2} = \int_1^\infty \frac{1}{t^{n+1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha}} dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}\|_{\dot{K}_{\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)\to \dot{K}_{\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{2.2}$. *Tương tự, toán tử Hardy liên hợp bị chặn trên* $\dot{K}_{\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{2.3} = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha}} dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}^\star\|_{\dot{K}_{\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)\to \dot{K}_{\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{2.3}$.

Hệ quả 2.6. *Cho* $0 < p < \infty, 1 \le q < \infty, \alpha \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ *và* $\omega(x) = |x|^{\gamma}$. *Khi đó, toán tử Hardy bị chặn trên* $M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{3.2} = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{n+1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}} dt < \infty.$$

Hơn nữa, ta có $\|\mathscr{H}\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n) \to M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{3.2}$. *Tương tự, toán tử Hardy liên hợp bị chặn trên* $M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_{3.3} = \int_0^{1} \frac{1}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+\lambda-\alpha}} dt < \infty.$$

Hơn nữa, ta có $\|\mathscr{H}^{\star}\|_{M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n) \to M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{3.3}$.

2.3. Giao hoán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^{b}$ và lớp trọng thuần nhất

Trong mục này, chúng tôi đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^{b}$ với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz, trên các không gian có hai trọng thuần nhất như: không gian tâm Morrey (Định lí 2.4), không gian Herz (Định lí 2.5), không gian Morrey-Herz (Định lí 2.6).

Định lí 2.4. *Cho* $1 \le q < \infty$, $\Omega \in L^{p'}(S_{n-1})$ *và* $b \in Lip^{\beta}(\mathbb{R}^n)$ *với* $0 < \beta \le 1$. *Giả sử* $v, \omega \in \mathscr{W}_{\gamma}$, $\gamma > -n$ *và* $\omega(x') \ge c > 0$ *với mọi* $x' \in S_{n-1}$. *Nếu* $\lambda_1 = \lambda - \frac{\beta q}{n+\gamma} > 0$ *và*

$$\mathscr{C}_4 = \int_0^{\infty} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1+(\gamma+n)\frac{\lambda_1-1}{q}}(1+t^{-1})^{-\beta}} dt < \infty,$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^{b}$ *bị chặn từ* $\dot{M}_{v,\omega}^{\lambda_1,q}(\mathbb{R}^n)$ *đến* $\dot{M}_{v,\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$.

Định lí 2.5. *Cho* $1 \le p, q < \infty$, $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$ *và* $b \in Lip^{\beta}(\mathbb{R}^n)$ *với* $0 < \beta \le 1$. *Giả sử* $v, \omega \in \mathscr{W}_{\gamma}$, $\gamma > -n$ *và* $\omega(x') \ge c > 0$ *với mọi* $x' \in S_{n-1}$. *Nếu* $\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{n\beta}{n+\gamma}$ *và*

$$\mathscr{C}_5 = \int_0^{\infty} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}-\alpha_1\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}(1+t^{-1})^{-\beta}} dt < \infty.$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^{b}$ *bị chặn từ* $\dot{K}_{v,\omega}^{\alpha_1,p,q}(\mathbb{R}^n)$ *đến* $\dot{K}_{v,\omega}^{\alpha_2,p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Định lí 2.6. *Cho* $0 < p < \infty, 1 \le q < \infty$, $\Omega \in L^{q'}(S_{n-1})$, $\lambda > 0$ *và* $b \in Lip^{\beta}(\mathbb{R}^n)$ *với* $0 < \beta \le 1$. *Giả sử* $v, \omega \in \mathscr{W}_{\gamma}$, $\gamma > -n$ *và* $\omega(x') \ge c > 0$ *với mọi* $x' \in S_{n-1}$. *Nếu* $\alpha_1 = \alpha_2 + \frac{n\beta}{n+\gamma}$ *và*

$$\mathscr{C}_6 = \int_0^{\infty} \frac{|\Phi(t)|}{t^{1-\frac{\gamma}{q}-\frac{n}{q}+(\lambda-\alpha_1)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}(1+t^{-1})^{-\beta}} dt < \infty.$$

thì $\mathscr{H}^{b}_{\Phi,\Omega}$ *bị chặn từ* $M\dot{K}^{\alpha_1,\lambda,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)$ *đến* $M\dot{K}^{\alpha_2,\lambda,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Từ Định lí 2.5 và Định lí 2.6, chọn $\Phi(t) = t^{-n}\chi_{(1,\infty)}(t)$ và $\Omega \equiv 1$. Chúng tôi đạt được kết quả mới về tính bị chặn của giao hoán tử toán tử Hardy trên không gian Morrey-Herz có hai trọng thuần nhất.

Chương 3

TOÁN TỬ HAUSDORFF ĐA TUYẾN TÍNH $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ TRÊN KHÔNG GIAN KIỂU MORREY-HERZ

Trong chương này, chúng tôi ước lượng chuẩn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian hàm tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có hai trọng lũy thừa. Sau đó, có kết luận ước lượng chuẩn cho toán tử Hardy-Ceàro đa tuyến tính trên tích các không gian ở trên. Đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian tâm Morrey, không gian Morrey-Herz có hai trọng Muckenhoupt.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo [2] trong danh mục công trình đã công bố.

3.1. Giới thiệu

Bài toán nghiên cứu là ước lượng chuẩn của toán tử Hausdorff đa tuyến tính $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên không gian kiểu Morrey-Herz.

3.2. Toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ và lớp trọng lũy thừa

Trong mục này, chúng tôi trình bày kết quả về ước lượng chuẩn cho toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian có hai trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Định lí 3.1), không gian Herz (Định lí 3.2), không gian Morrey-Herz (Định lí 3.3).

Định lí 3.1. *Cho* $\Phi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ *và* $v(x) = |x|^{\beta}, \omega(x) = |x|^{\gamma}$, $v_i(x) = |x|^{\beta_i}, \omega_i(x) = |x|^{\gamma_i}$, *với mọi* $i = 1, ..., m$. *Nếu các điều kiện sau thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_i}{q_i} = \frac{\beta}{q}, \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{n+\beta_i}{n+\beta}\right) \lambda_i = \lambda, \text{ và } \sum_{i=1}^{m} \frac{\gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma}{q}$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ *bị chặn từ* $\prod_{i=1}^m \dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ *đến* $\dot{M}^{\lambda,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_7 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m \|A_i^{-1}(y)\|^{-(\beta_i+n)\lambda_i+(\gamma_i-\beta_i)\frac{1}{q_i}} dy < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)\to \dot{M}^{\lambda,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_7.$

Định lí 3.2. *Cho* $\Phi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ *và* $v(x) = |x|^\beta, \omega(x) = |x|^\gamma$, $v_i(x) = |x|^{\beta_i}, \omega_i(x) = |x|^{\gamma_i}$, *với mọi* $i = 1,\ldots,m$. *Nếu các điều kiện sau thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma}{q}, \text{ và } \sum_{i=1}^m \left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i = \left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha,$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ *bị chặn từ* $\prod_{i=1}^m \dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ *to* $\dot{K}^{\alpha,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_8 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m \|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i+\frac{n+\gamma_i}{q_i}} dy < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)\to \dot{K}^{\alpha,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_8.$

Định lí 3.3. *Cho* $\Phi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $\lambda,\lambda_i > 0$ *và* $v(x) = |x|^\beta, \omega(x) = |x|^\gamma$, $v_i(x) = |x|^{\beta_i}, \omega_i(x) = |x|^{\gamma_i}$, *với mọi* $i = 1,\ldots,m$. *Nếu các điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^m \left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\lambda_i = \left(1+\frac{\beta}{n}\right)\lambda, \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma}{q}, \text{ và } \sum_{i=1}^m \left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i = \left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha,$$

thì toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ *bị chặn từ* $\prod_{i=1}^m M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ *đến* $M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)$ *nếu và chỉ nếu*

$$\mathscr{C}_9 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|^n} \prod_{i=1}^m \|A_i^{-1}(y)\|^{\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)(\alpha_i-\lambda_i)+\frac{n+\gamma_i}{q_i}} dy < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}\|_{\prod_{i=1}^m M\dot{K}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}_{v_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)\to M\dot{K}^{\alpha,\lambda,p,q}_{v,\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_9.$

Chọn $A_i(y) = \mathrm{diag}[s_i(y),\ldots,s_i(y)]$, ở đó $s_1(y),\ldots,s_m(y) \neq 0$ hầu khắp trên $\mathbb{R}^n$ với mọi $i = 1,\ldots,m$. Khi đó, chúng tôi đưa ra các Hệ quả về ước lượng chuẩn của toán tử $\mathscr{H}_{\phi,\vec{s}}$ trên các không gian có hai trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Hệ quả 3.1), không gian Herz (Hệ quả 3.2), không gian Morrey-Herz (Hệ quả 3.3).

Hệ quả 3.1. *Cho ϕ là hàm không âm và $v(x) = |x|^\beta, \omega(x) = |x|^\gamma$, $v_i(x) = |x|^{\beta_i}, \omega_i(x) = |x|^{\gamma_i}$, với mọi $i = 1, ..., m$. Nếu các điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{q_i} = \frac{\beta}{q}, \sum_{i=1}^m \left(\frac{n+\beta_i}{n+\beta}\right)\lambda_i = \lambda, \text{ và } \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma}{q}$$

thì $\mathscr{H}_{\phi,\vec{s}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{M}_{v_i,\omega_i}^{\lambda_i,q_i}(\mathbb{R}^n)$ đến $\dot{M}_{v,\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathscr{C}_{7.1} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{i=1}^m |s_i(y)|^{(\beta_i+n)\lambda_i+(\beta_i-\gamma_i)\frac{1}{q_i}}\right)\phi(y)dy < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}_{\phi,\vec{s}}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{M}_{v_i,\omega_i}^{\lambda_i,q_i}(\mathbb{R}^n)\to\dot{M}_{v,\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{7.1}$.

Hệ quả 3.2. *Cho ϕ là hàm không âm và $v(x) = |x|^\beta, \omega(x) = |x|^\gamma$, $v_i(x) = |x|^{\beta_i}, \omega_i(x) = |x|^{\gamma_i}$, với mọi $i = 1, ..., m$. Nếu các điều kiện sau thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma}{q}, \text{ và } \sum_{i=1}^m \left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i = \left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha,$$

thì $\mathscr{H}_{\phi,\vec{s}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i,\omega_i}^{\alpha_i,p_i,q_i}(\mathbb{R}^n)$ đến $\dot{K}_{v,\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathscr{C}_{8.1} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{i=1}^m |s_i(y)|^{-\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i - \frac{(n+\gamma_i)}{q_i}}\right)\phi(y)dy < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}_{\phi,\vec{s}}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{K}_{v_i,\omega_i}^{\alpha_i,p_i,q_i}(\mathbb{R}^n)\to\dot{K}_{v,\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{8.1}$.

Hệ quả 3.3. *Cho ϕ là hàm không âm, $\lambda, \lambda_i > 0$ và $v(x) = |x|^\beta, \omega(x) = |x|^\gamma$, $v_i(x) = |x|^{\beta_i}, \omega_i(x) = |x|^{\gamma_i}$, với mọi $i = 1, ..., m$. Nếu các điều kiện sau được thỏa mãn*

$$\sum_{i=1}^m \left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\lambda_i = \left(1+\frac{\beta}{n}\right)\lambda, \sum_{i=1}^m \frac{\gamma_i}{q_i} = \frac{\gamma}{q}, \text{ và } \sum_{i=1}^m \left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i = \left(1+\frac{\beta}{n}\right)\alpha,$$

thì $\mathscr{H}_{\phi,\vec{s}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m M\dot{K}_{v_i,\omega_i}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}(\mathbb{R}^n)$ đến $M\dot{K}_{v,\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathscr{C}_{9.1} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{i=1}^m |s_i(y)|^{(\lambda_i-\alpha_i)\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right) - \frac{(n+\gamma_i)}{q_i}}\right)\phi(y)dy < \infty.$$

Hơn nữa, $\|\mathscr{H}_{\phi,\vec{s}}\|_{\prod_{i=1}^m M\dot{K}_{v_i,\omega_i}^{\alpha_i,p_i,q_i}(\mathbb{R}^n)\to M\dot{K}_{v,\omega}^{\alpha,p,q}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{9.1}$.

Từ Hệ quả 3.1, chúng tôi có ước lượng chuẩn của toán tử Hardy–Cesàro đa tuyến tính $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ đến $\dot{M}^{\lambda,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathscr{C}_{7.2} = \int_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^m |s_i(t)|^{(\beta_i+n)\lambda_i+(\beta_i-\gamma_i)\frac{1}{q_i}} \right) \psi(t)dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)\to \dot{M}^{\lambda,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{7.2}$.

Từ Hệ quả 3.2, chúng tôi có ước lượng chuẩn của toán tử Hardy–Cesàro đa tuyến tính $U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)$ đến $\dot{K}^{\alpha,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$ nếu và chỉ nếu

$$\mathscr{C}_{8.2} = \int_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^m |s_i(t)|^{-\left(1+\frac{\beta_i}{n}\right)\alpha_i - \frac{(n+\gamma_i)}{q_i}} \right) \psi(t)dt < \infty.$$

Hơn nữa, $\|U^{m,n}_{\psi,\vec{s}}\|_{\prod_{i=1}^m \dot{K}^{\alpha_i,p_i,q_i}_{\nu_i,\omega_i}(\mathbb{R}^n)\to \dot{K}^{\alpha,p,q}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)} \simeq \mathscr{C}_{8.2}$.

Hệ quả 3.2 là mở rộng của Định lí 3.2 của N. M. Chương, N. T. Hồng, H. D. Hưng (2017).

3.3. Toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ và lớp trọng Muckenhoupt

Trong mục này, chúng tôi đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên các không gian có hai trọng Muckenhoupt như: không gian tâm Morrey (Định lí 3.4), không gian Morrey-Herz (Định lí 3.5).

Định lí 3.4. *Cho $1 \le q^*, \xi, \eta < \infty, -\frac{1}{q_i} < \lambda_i < 0$, với mọi $i = 1,\ldots,m$ và $\nu \in A_\eta, \omega \in A_\xi$ với các chỉ số tới hạn r_ν, r_ω cho điều kiện Hölder ngược sao cho $\omega(B(0,R)) \lesssim \nu(B(0,R))$ với mọi $R > 0$. Giả sử $q > q^*\xi r'_\omega, \delta_1 \in (1, r_\omega), \delta_2 \in (1, r_\nu), \lambda^* = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$ và*

$$\mathscr{C}_{10} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n} \prod_{i=1}^m |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{\xi}{q_i}} \|A_i(y)\|^{\frac{\xi n}{q_i}} \mathscr{A}_i(y)dy < \infty,$$

ở đó

$$\mathscr{A}_i(y) = \left(\|A_i(y)\|^{n\left(\lambda_i+\frac{1}{q_i}\right)\frac{\delta_2-1}{\delta_2}} \chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|\le 1\}} + \|A_i(y)\|^{n\eta\left(\lambda_i+\frac{1}{q_i}\right)} \chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|>1\}} \right) \times$$
$$\times \left(\|A_i(y)\|^{-\frac{n}{q_i}\frac{\delta_1-1}{\delta_1}} \chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|>1\}} + \|A_i(y)\|^{-\frac{\xi n}{q_i}} \chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|\le 1\}} \right).$$

Khi đó, $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ bị chặn từ $\prod_{i=1}^m \dot{M}^{\lambda_i,q_i}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$ đến $\dot{M}^{\lambda^*,q^*}_{\nu,\omega}(\mathbb{R}^n)$.

Định lí 3.5. *Cho* $1 \leq q^*, \xi, \eta < \infty, \alpha_i < 0$, $\lambda_i \geq 0$, *với mọi* $i = 1, \ldots, m$ *và* $\omega \in A_\xi, \nu \in A_\eta$ *với các chỉ số tới hạn* r_ω, r_ν *cho điều kiện Hölder ngược sao cho* $\omega(B_k) \lesssim \nu(B_k)$, *với mọi* $k \in \mathbb{Z}$. *Giả sử* $q > \max\{mq^*, q^*\xi r'_\omega\}, \delta_1 \in (1, r_\omega), \delta_2 \in (1, r_\nu)$ *và* α^*, λ^* *là các số thực sao cho*

$$\lambda^* = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \text{ và } \frac{1}{m}\left(\frac{\alpha^*}{n} + \frac{1}{q^*}\right) = \frac{\alpha_i}{n} + \frac{1}{q_i}, \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m.$$

Nếu $\frac{\alpha^*}{n} + \frac{1}{q^*} \leq 0$ *và*

$$\mathscr{C}_{11.1} = \prod_{i=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}} \|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}} \mathscr{B}_{1i}(y) dy\right)^{\frac{1}{m}} < \infty,$$

ở đó

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_{1i}(y) = \|A_i(y)\|^{-\left(\left(\frac{n}{q^*}+\alpha^*\right)\frac{\delta_1-1}{\delta_1}+(\alpha^*-m\lambda_i)\frac{\delta_2-1}{\delta_2}-\xi\alpha^*\right)} \chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|<1\}} + \\ + \|A_i(y)\|^{-\left(\left(\frac{n}{q^*}+\alpha^*\right)\xi+\eta(\alpha^*-m\lambda_i)-\alpha^*\frac{\delta_1-1}{\delta_1}\right)} \chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|\geq 1\}},\end{aligned}$$

hoặc $\frac{\alpha^*}{n} + \frac{1}{q^*} > 0$ *và*

$$\mathscr{C}_{11.2} = \prod_{i=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}} \|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}} \mathscr{B}_{2i}(y) dy\right)^{\frac{1}{m}} < \infty,$$

ở đó

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_{2i}(y) = \|A_i(y)\|^{-\left(\frac{\xi n}{q^*}+(\alpha^*-m\lambda_i)\frac{\delta_2-1}{\delta_2}\right)} \chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|<1\}} + \\ + \|A_i(y)\|^{-\left(\frac{n}{q^*}\frac{\delta_1-1}{\delta_1}+\eta(\alpha^*-m\lambda_i)\right)} \chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|\geq 1\}},\end{aligned}$$

thì toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ *bị chặn từ* $\prod_{i=1}^m M\dot{K}_{\nu,\omega}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}(\mathbb{R}^n)$ *đến* $M\dot{K}_{\nu,\omega}^{\alpha^*,\lambda^*,p,q^*}(\mathbb{R}^n)$.

Định lí 3.6. *Cho* $1 \leq q^*, \xi < \infty, \alpha_i < 0$, $\lambda_i \geq 0$, *với mọi* $i = 1, \ldots, m$ *và* $\omega \in A_\xi$ *với chỉ số tới hạn* r_ω *cho điều kiện Hölder ngược. Giả sử* $q > q^*\xi r'_\omega, \delta \in (1, r_\omega)$ *và* α^*, λ^* *là các số thực thỏa mãn*

$$\lambda^* = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m \text{ và } \frac{\alpha^*}{n} + \frac{1}{q^*} = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i}{n} + \frac{1}{q}.$$

Nếu $\frac{\alpha_i}{n} + \frac{1}{q_i} \leq 0$, *với mọi* $i = 1, \ldots, m$ *và*

$$\mathscr{C}_{12.1} = \prod_{i=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Phi(y)|}{|y|^n} |\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}} \|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}} \Psi_{1i}(y) dy\right)^{\frac{1}{m}} < \infty,$$

ở đó

$$\Psi_{1i}(y) = \|A_i(y)\|^{m\left(\lambda_i - n\left(\frac{\alpha_i}{n}+\frac{1}{q_i}\right)\left(\frac{\delta-1}{\delta}\right)\right)}\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|<1\}} + \\ + \|A_i(y)\|^{m\xi\left(\lambda_i - n\left(\frac{\alpha_i}{n}+\frac{1}{q_i}\right)\right)}\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|\geq 1\}},$$

hoặc $\frac{\alpha_i}{n}+\frac{1}{q_i} > 0$*, với mọi* $i = 1, \ldots, m$ *và*

$$\mathscr{C}_{12.2} = \prod_{i=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|\Phi(y)|}{|y|^n}|\det A_i^{-1}(y)|^{\frac{m\xi}{q_i}}\|A_i(y)\|^{\frac{m\xi n}{q_i}}\Psi_{2i}(y)dy\right)^{\frac{1}{m}} < \infty,$$

ở đó

$$\Psi_{2i}(y) = \|A_i(y)\|^{m\left(\lambda_i\left(\frac{\delta-1}{\delta}\right) - n\xi\left(\frac{\alpha_i}{n}+\frac{1}{q_i}\right)\right)}\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|<1\}} + \\ + \|A_i(y)\|^{m\left(\lambda_i\xi - n\left(\frac{\alpha_i}{n}+\frac{1}{q_i}\right)\left(\frac{\delta-1}{\delta}\right)\right)}\chi_{\{y\in\mathbb{R}^n:\|A_i(y)\|\geq 1\}},$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ *bị chặn từ* $\prod_{i=1}^{m} M\dot{K}_{\omega}^{\alpha_i,\lambda_i,p_i,q_i}(\mathbb{R}^n)$ *đến* $M\dot{K}_{\omega}^{\alpha^*,\lambda^*,p,q^*}(\mathbb{R}^n)$.

Từ Định lí 3.5 và Định lí 3.6, khi $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ chúng tôi đạt được điều kiện đủ cho tính bị chặn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên không gian Herz có trọng Muckenhoupt.

Chương 4

GIAO HOÁN TỬ CỦA TOÁN TỬ HAUSDORFF TRÊN NHÓM HEISENBERG

Trong chương này, chúng tôi đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$, giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,A}$ trên nhóm Heisenberg với biểu trưng thuộc không gian ℓ-tâm BMO, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng lũy thừa hoặc trọng Muckenhoupt.

Nội dung của chương này dựa trên bài báo [3] trong danh mục công trình đã công bố.

4.1. Giới thiệu

Bài toán nghiên cứu là tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$, giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,A}$ trên nhóm Heisenberg.

4.2. Giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ và lớp trọng lũy thừa

Trong mục này, chúng tôi trình bày các kết quả về điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian có trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Định lí 4.1), không gian Morrey-Herz (Định lí 4.2).

Định lí 4.1. *Cho $1 \leq q < \infty$, $1 < q_1, r_1 < \infty$ và $\omega(x) = |x|_h^\gamma$, $\gamma > -Q$. Giả sử $\Omega \in L^{q'}(S_{Q-1})$, $b \in C\dot{M}O^{\ell,r_1}_\omega(\mathbb{H}^n), \ell < \frac{1}{Q}$ và $\lambda \in (-\frac{1}{q}, 0)$, $\lambda_1 \in (-\frac{1}{q_1}, 0)$, $\lambda_1 = \lambda - \ell$. Nếu $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1}$ và*

$$\mathscr{C}_{13} = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{t^{1+(Q+\gamma)\lambda_1}} \left(1 + \Psi(t) + t^{-(Q+\gamma)\ell}\right) dt < \infty,$$

thì $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ bị chặn từ $\dot{M}^{\lambda_1,q_1}_\omega(\mathbb{H}^n)$ đến $\dot{M}^{\lambda,q}_\omega(\mathbb{H}^n)$.

Định lí 4.2. *Cho* $1 \leq p, q < \infty$, $1 < q_1, r_1 < \infty$ *và* $\omega(x) = |x|_h^{\gamma}$, $\gamma > -Q$. *Giả sử* $\Omega \in L^{q'}(S_{Q-1})$, $b \in C\dot{M}O_{\omega}^{\ell, r_1}(\mathbb{H}^n)$, $\ell < \frac{1}{Q}$, $\lambda \geq 0$ *và* $\alpha_1 = \alpha + (Q+\gamma)(\frac{1}{r_1} + \ell)$. *Nếu* $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1}$ *và*

$$\mathscr{C}_{15} = \int_0^{\infty} \frac{\Phi(t)}{t^{1-\frac{Q+\gamma}{q_1}+\lambda-\alpha_1}} \left(1 + \Psi(t) + t^{-(Q+\gamma)\ell}\right) dt < \infty,$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^{b}$ *bị chặn từ* $M\dot{K}_{\omega}^{\alpha_1,\lambda,p,q_1}(\mathbb{H}^n)$ *đến* $M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{H}^n)$.

4.3. Giao hoán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^{b}$ và lớp trọng Muckenhoupt

Trong mục này, chúng tôi trình bày kết quả về điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^{b}$ trên không gian tâm Morrey có trọng Muckenhoupt (Định lí 4.3).

Định lí 4.3. *Cho* $1 \leq q, q_1^*, r_1^*, \zeta < \infty$, $0 \leq \ell < \frac{1}{Q}$, $\omega \in A_{\zeta}$ *với chỉ số tới hạn* r_{ω} *cho điều kiện Hölder ngược. Giả sử* $\Omega \in L^{q'}(S_{Q-1})$, $b \in C\dot{M}O_{\omega}^{r_1^*,\ell}(\mathbb{H}^n)$, $\delta \in (1, r_{\omega})$, $\lambda \in (-\frac{1}{q}, 0)$, $\lambda_1 \in (-\frac{1}{q_1}, 0)$ *và* $\lambda_1 = \lambda - \ell$. *Nếu* $\frac{1}{q} > \left(\frac{1}{q_1^*} + \frac{1}{r_1^*}\right) \zeta \frac{r_{\omega}}{r_{\omega}-1}$ *và*

$$\mathscr{C}_{14} = \int_0^{\infty} \frac{\Phi(t)}{t} \left(t^{-Q\frac{(\delta-1)\lambda_1}{\delta}} \chi_{(0,1]}(t) + t^{-Q\zeta\lambda_1} \chi_{(1,\infty)}(t)\right) \left(1 + \Psi_1(t)\right) dt < \infty,$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}^{b}$ *bị chặn từ* $\dot{M}_{\omega}^{\lambda_1,q_1^*}(\mathbb{H}^n)$ *đến* $\dot{M}_{\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{H}^n)$.

4.4. Giao hoán tử $\mathscr{H}_{\Phi,A}^{b}$ và lớp trọng lũy thừa

Trong mục này, chúng tôi trình bày các kết quả về điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}_{\Phi,A}^{b}$ trên các không gian có trọng lũy thừa như: không gian tâm Morrey (Định lí 4.4), không gian Morrey-Herz (Định lí 4.5).

Định lí 4.4. *Cho* $1 \leq q < \infty$, $1 < q_1, r_1 < \infty$, $\gamma > -Q$, $\omega(x) = |x|_h^{\gamma}$, $b \in C\dot{M}O_{\omega}^{r_1}(\mathbb{H}^n)$ *và* $\lambda \in (-\frac{1}{q_1}, 0)$. *Nếu* $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1}$ *và*

$$\mathscr{C}_{16} = \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q} . \psi(y) . \mu(y) \|A(y)\|^{(Q+\gamma)(\frac{1}{q_1}+\lambda)} dy < \infty,$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,A}^{b}$ *bị chặn từ* $\dot{M}_{\omega}^{\lambda,q_1}(\mathbb{H}^n)$ *đến* $\dot{M}_{\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{H}^n)$.

Định lí 4.5. *Cho* $1 \leq p, q < \infty$, $1 < q_1, r_1 < \infty$, $\gamma > -Q$, $\omega(x) = |x|_h^{\gamma}$, $b \in C\dot{M}O_{\omega}^{r_1}(\mathbb{H}^n)$, $\lambda \geq 0$, $\alpha_2 = \alpha + \frac{Q+\gamma}{r_1}$. *Nếu* $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{r_1}$ *và*

$$\mathscr{C}_{18} = \int_{\mathbb{H}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q}.\psi(y).\mu(y)(2-\kappa^*)^{1-\frac{1}{p}} \|A(y)\|^{\lambda-\alpha_2} \Big(\sum_{i=\kappa^*-1}^{0} 2^{i(\lambda-\alpha_2)} \Big) dy < \infty,$$

với $\kappa^* = \kappa^*(y)$ *là số nguyên lớn nhất sao cho*

$$\|A(y)\|.\|A^{-1}(y)\| < 2^{-\kappa^*}, \text{ với mọi hầu khắp } y \in \mathbb{H}^n,$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,A}^{b}$ *bị chặn từ* $M\dot{K}_{\omega}^{\alpha_2,\lambda,p,q_1}(\mathbb{H}^n)$ *đến* $M\dot{K}_{\omega}^{\alpha,\lambda,p,q}(\mathbb{H}^n)$.

4.5. Giao hoán tử $\mathscr{H}_{\Phi,A}^{b}$ và lớp trọng Muckenhoupt

Trong mục này, chúng tôi trình bày kết quả về điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử $\mathscr{H}_{\Phi,A}^{b}$ trên không gian tâm Morrey có trọng Muckenhoupt (Định lí 4.6).

Định lí 4.6. *Cho* $1 \leq q, q_1^*, r_1^*, \zeta < \infty$, $\omega \in A_\zeta$ *với chỉ số tới hạn* r_ω *cho điều kiện Hölder ngược,* $b \in C\dot{M}O_{\omega}^{r_1^*}(\mathbb{H}^n)$, $\lambda \in (-\frac{1}{q_1^*}, 0)$ *và* $\delta \in (1, r_\omega)$. *Nếu* $\frac{1}{q} > \left(\frac{1}{q_1^*} + \frac{1}{r_1^*}\right) \zeta \frac{r_\omega}{r_\omega - 1}$ *và*

$$\mathscr{C}_{17} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Phi(y)}{|y|_h^Q}.\psi_1(y).\mu_1(y) \times$$
$$\times \left(\|A(y)\|^{Q\zeta\lambda} \chi_{\{y\in\mathbb{H}^n: \|A(y)\|\leq 1\}} + \|A(y)\|^{Q\frac{(\delta-1)\lambda}{\delta}} \chi_{\{y\in\mathbb{H}^n: \|A(y)\|>1\}} \right) dy < \infty,$$

thì $\mathscr{H}_{\Phi,A}^{b}$ *bị chặn từ* $\dot{M}_{\omega}^{\lambda,q_1^*}(\mathbb{H}^n)$ *đến* $\dot{M}_{\omega}^{\lambda,q}(\mathbb{H}^n)$.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

1. Các kết quả đạt được

Các kết quả đạt được của luận án bao gồm:

1) Đưa ra điều kiện cần và đủ cho tính bị chặn của toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng thuần nhất. Sau đó, có ước lượng chuẩn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ và kết luận mới về ước lượng chuẩn của toán tử Hardy, toán tử Hardy liên hợp cho các không gian trên với trọng lũy thừa. Đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có hai trọng thuần nhất.

2) Ước lượng chuẩn của toán tử Hausdorff đa tuyến tính $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian hàm tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có hai trọng lũy thừa. Sau đó, có kết luận ước lượng chuẩn cho toán tử Hardy-Ceàro đa tuyến tính trên tích các không gian ở trên. Đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$ trên tích các không gian tâm Morrey, không gian Morrey-Herz có hai trọng Muckenhoupt.

3) Đưa ra điều kiện đủ cho tính bị chặn của giao hoán tử toán tử Hausdorff thô $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$, giao hoán tử của toán tử ma trận Hausdorff $\mathscr{H}^b_{\Phi,A}$ trên nhóm Heisenberg với biểu trưng thuộc không gian ℓ-tâm BMO, trên các không gian tâm Morrey, không gian Herz, không gian Morrey-Herz có trọng lũy thừa hoặc trọng Muckenhoupt.

2. Kiến nghị một số vấn đề nghiên cứu tiếp theo

Bên cạnh các kết quả đã đạt được trong luận án, một số vấn đề mở cần được tiếp tục nghiên cứu bao gồm:

1) Chúng tôi nghiên cứu chuẩn của toán tử $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ và giao hoán tử $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz, trên các không gian hàm kiểu Morrey-Herz có trọng thuần nhất. Thiết lập được mối liên hệ giữa toán tử tích phân kì dị và toán tử Hausdorff.

2) Chúng tôi nghiên cứu được chuẩn của giao hoán tử toán tử Hausdorff đa tuyến tính $\mathscr{H}_{\Phi,\vec{A}}$, với biểu trưng thuộc không gian Lipschitz, trên tích các không gian kiểu Morrey-Herz có hai trọng Muckenhoupt.

3) Chúng tôi nghiên cứu được chuẩn của một số lớp toán tử Hausdorff trên nhóm Heisenberg, trên các không gian kiểu Morrey-Herz có hai trọng lũy thừa hoặc trọng Muckenhoupt.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC CỦA TÁC GIẢ

[1] N. M. Chuong, D. V. Duong, N. D. Duyet, (2020), Weighted Morrey-Herz space estimates for rough Hausdorff operator and its commutators, *J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.* Vol. 11, No. 2, 753–787. (SCIE)

[2] N. M. Chuong, D. V. Duong, N. D. Duyet, (2020), Two Weighted estimates for multilinear Hausdorff Operators on the Morrey-Herz Spaces, *Adv. Oper. Theory.* Vol. 5, No. 4, 1780–1813. (ESCI/Scopus)

[3] N. M. Chuong, D. V. Duong, N. D. Duyet, (2020), Weighted Estimates for Commutators of Hausdorff Operators on the Heisenberg Group, *Russian Mathematics.* Vol. 64, No. 2, 35–55. (ESCI/Scopus)